PH21L

NGUYỄN ANH TRƯỜNG - NGUYỄN PHÚ KHÁNH
ĐẬU THANH KỲ - NGUYỄN MINH NHIÊN
NGUYỄN TẤN SIÊNG - ĐỖ NGỌC THUỶ
(Nhóm giáo viên chuyên toán THPT)

PHÂN LOẠI & PHƯƠNG PHÁP GIẢI ĐẠI SỐ 10

(Tái bản lần nhất có chỉnh lý và bổ sung)

- Dành cho học sinh lớp 10 ôn tập và nâng cao kiến thức
- Biên soạn theo nội dung, chương trình sách giáo khoa của Bộ GD & ĐT

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN
ĐVL / 13393 / 14

Lời nói đầu

Các em học sinh thân mến!

"**Phân loại và phương pháp giải Đại số 10**" là một trong những cuốn thuộc bộ sách "*Phân loại và phương pháp giải: lớp 10, 11, 12* ", do nhóm tác giả chuyên toán THPT biên soạn.

Với cách viết khoa học và sinh động giúp bạn đọc tiếp cận với môn Toán một cách tự nhiên, không áp lực, bạn đọc trở nên tự tin và năng động hơn; hiểu rõ bản chất, biết cách phân tích để tìm ra trọng tâm của vấn đề và biết giải thích, lập luận cho từng bài toán. Sự đa dạng của hệ thống bài tập và tình huống giúp bạn đọc luôn hứng thú khi giải toán.

Tác giả chú trọng biên soạn những câu hỏi mở, nội dung cơ bản bám sát sách giáo khoa và cấu trúc đề thi đại học, đồng thời phân bài tập thành các dạng toán có lời giải chi tiết. Hiện nay đề thi đại học không khó, tổ hợp của nhiều vấn đề đơn giản, nhưng chứa nhiều câu hỏi mở nếu không nắm chắc lý thuyết sẽ lúng túng trong việc tìm lời giải bài toán. Với một bài toán, không nên thỏa mãn ngay với một lời giải mình vừa tìm được mà phải cố gắng tìm nhiều cách giải nhất cho bài toán đó, mỗi một cách giải sẽ có thêm phần kiến thức mới ôn tập.

Môn Toán là một môn rất ưa phong cách tài tử, nhưng phải là tài tử một cách sáng tạo và thông minh. Khi giải một bài toán, thay vì dùng thời gian để lục lọi trí nhớ, thì ta cần phải suy nghĩ phân tích để tìm ra phương pháp giải quyết bài toán đó. Đối với Toán học, không có trang sách nào là thừa. Từng trang, từng dòng đều phải hiểu. Môn Toán đòi hỏi phải kiên nhẫn và bền bỉ ngay từ những bài tập đơn giản nhất, những kiến thức cơ bản nhất. Vì chính những kiến thức cơ bản mới giúp bạn đọc hiểu được những kiến thức nâng cao sau này. Ludwig Van Beethoven: "Giọt nước có thể làm mòn tảng đá, không phải vì giọt nước có sức mạnh, mà do nước chảy liên tục ngày đêm. Chỉ có sự phấn đấu không mệt mỏi mới đem lại tài năng. Do đó ta có thể khẳng định, không nhích từng bước thì không bao giờ có thể đi xa ngàn dặm".

Mặc dù tác giả đã dành nhiều tâm huyết cho cuốn sách, song sự sai sót là điều khó tránh khỏi. Chúng tôi rất mong nhận được sự phản biện và góp ý quý báu của quý độc giả để những lần tái bản sau cuốn sách được hoàn thiện hơn.

Thay mặt nhóm biên soạn
Nguyễn Phú Khánh.

Chương 1 MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP

§1. MỆNH ĐỀ VÀ MỆNH ĐỀ CHỨA BIẾN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. *Định nghĩa:*

   Mệnh đề là một câu khẳng định *Đúng* hoặc *Sai* .

   Một mệnh đề không thể vừa đúng hoặc vừa sai

2. *Mệnh đề phủ định:*

   Cho mệnh đề P. Mệnh đề "Không phải P " gọi là ***mệnh đề phủ định*** của P.

   Ký hiệu là $\overline{P}$. Nếu P đúng thì $\overline{P}$ sai, nếu P sai thì $\overline{P}$ đúng

3. *Mệnh đề kéo theo và mệnh đề đảo*

   Cho hai mệnh đề P và Q. Mệnh đề "nếu P thì Q" gọi là ***mệnh đề kéo theo***

   Ký hiệu là $P \Rightarrow Q$. Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng Q sai

   Cho mệnh đề $P \Rightarrow Q$. Khi đó mệnh đề $Q \Rightarrow P$ gọi là ***mệnh đề đảo*** của $P \Rightarrow Q$

4. *Mệnh đề tương đương*

   Cho hai mệnh đề P và Q. Mệnh đề "P nếu và chỉ nếu Q" gọi là ***mệnh đề tương đương***

   Ký hiệu là $P \Leftrightarrow Q$.

   Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng khi cả $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ cùng đúng

   Chú ý: "Tương đương" còn được gọi bằng các thuật ngữ khác như "điều kiện cần và đủ", "khi và chỉ khi", "nếu và chỉ nếu".

5. *Mệnh đề chứa biến*

   Mệnh đề chứa biến là một câu khẳng định chứa biến nhận giá trị trong một tập X nào đó mà với mỗi giá trị của biến thuộc X ta được một mệnh đề.

   Ví dụ: $P(n)$: "n chia hết cho 5 " với n là số tự nhiên

   $P(x;y)$:" $2x + y = 5$ " với x, y là số thực

6. *Các kí hiệu* $\forall$, $\exists$ *và mệnh đề phủ định của mệnh đề có chứa kí hiệu* $\forall$, $\exists$.

   Kí hiệu $\forall$: đọc là với mọi, $\exists$: đọc là tồn tại

   Phủ định của mệnh đề " $\forall x \in X, P(x)$ " là mệnh đề " $\exists x \in X, \overline{P(x)}$ "

   Phủ định của mệnh đề " $\exists x \in X, P(x)$ " là mệnh đề " $\forall x \in X, \overline{P(x)}$ "

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: *XÁC ĐỊNH MỆNH ĐỀ VÀ TÍNH ĐÚNG SAI CỦA MỆNH ĐỀ*

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Các câu sau đây, câu nào là mệnh đề, câu nào không phải là mệnh đề? Nếu là mệnh đề hãy cho biết mệnh đề đó đúng hay sai.

(1) Ở đây đẹp quá!

(2) Phương trình $x^2 - 3x + 1 = 0$ vô nghiệm

(3) 16 không là số nguyên tố

(4) Hai phương trình $x^2 - 4x + 3 = 0$ và $x^2 - \sqrt{x+3} + 1 = 0$ có nghiệm chung.

(5) Số π có lớn hơn 3 hay không?

(6) Italia vô địch Worldcup 2006

(7) Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng có diện tích bằng nhau.

(8) Một tứ giác là hình thoi khi và chỉ khi nó có hai đường chéo vuông góc với nhau.

Lời giải

Câu (1) và (5) không là mệnh đề(vì là câu cảm thán, câu hỏi)

Các câu (3), (4), (6), (8) là những mệnh đề đúng

Câu (2) và (7) là những mệnh đề sai.

Ví dụ 2: Cho ba mệnh đề sau, với n là số tự nhiên

(1) $n + 8$ là số chính phương

(2) Chữ số tận cùng của n là 4

(3) $n - 1$ là số chính phương

Biết rằng có hai mệnh đề đúng và một mệnh đề sai. Hãy xác định mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai.

Lời giải

Ta có số chính phương có các chữ số tận cùng là 0, 1, 4, 5, 6, 9. Vì vậy

- Nhận thấy giữa mệnh đề (1) và (2) có mâu thuẫn. Bởi vì, giả sử 2 mệnh đề này đồng thời là đúng thì n + 8 có chữ số tận cùng là 2 nên không thể là số chính phương. Vậy trong hai mệnh đề này phải có một mệnh đề là đúng và một mệnh đề là sai.
- Tương tự, nhận thấy giữa mệnh đề (2) và (3) cũng có mâu thuẫn. Bởi vì, giả sử mệnh đề này đồng thời là đúng thì n – 1 có chữ số tận cùng là 3 nên không thể là số chính phương.

Vậy trong ba mệnh đề trên thì mệnh đề (1) và (3) là đúng, còn mệnh đề (2) là sai.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1.0: Các câu sau đây, câu nào là mệnh đề, câu nào không phải là mệnh đề? Nếu là mệnh đề hãy cho biết mệnh đề đó đúng hay sai.

a) Không được đi lối này!

b) Bây giờ là mấy giờ?

c) Chiến tranh thế giới lần thứ hai kết thúc năm 1946.

d) 16 chia 3 dư 1.

e) 2003 không là số nguyên tố.

f) $\sqrt{5}$ là số vô tỉ.

g) Hai đường tròn phân biệt có nhiều nhất là hai điểm chung.

Hướng dẫn giải

Câu không phải mệnh đề là a), b)

Câu d), f) là mệnh đề đúng. Câu e) sai. Câu g) đúng

Bài 1.1: Tại Tiger Cup 98 có bốn đội lọt vào vòng bán kết: Việt Nam, Singapor, Thái Lan và Inđônêxia. Trước khi thi đấu vòng bán kết, ba bạn Dung, Quang, Trung dự đoán như sau:

Dung: Singapor nhì, còn Thái Lan ba.

Quang: Việt Nam nhì, còn Thái Lan tư.

Trung: Singapor nhất và Inđônêxia nhì.

Kết quả, mỗi bạn dự đoán đúng một đội và sai một đội. Hỏi mỗi đội đã đạt giải mấy?

Hướng dẫn giải

Ta xét dự đoán của bạn Dung

+ Nếu Singgapor nhì thì Singapor nhất là sai do đó Inđônêxia nhì là đúng(mâu thuẫn)
+ Như vậy Thái lan thứ ba là đúng suy ra Việt Nam nhì, Singapor nhất và Inđônêxia thứ tư

DẠNG TOÁN 2: *CÁC PHÉP TOÁN VỀ MỆNH ĐỀ .*

Các phép toán mệnh đề được sử dụng nhằm mục đích kết nối các mệnh đề lại với nhau tạo ra một mệnh đề mới. Một số các phép toán mệnh đề là : Mệnh đề phủ định(phép phủ định), mệnh đề kéo theo(phép kéo theo), mệnh đề đảo, mệnh đề tương đương(phép tương đương).

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Nêu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau, cho biết mệnh đề này đúng hay sai?

P: " Hình thoi có hai đường chéo vuông góc với nhau"

Q: " 6 là số nguyên tố"

R: " Tổng hai cạnh của một tam giác lớn hơn cạnh còn lại"

S: "$5 > -3$"

K: "Phương trình $x^4 - 2x^2 + 2 = 0$ có nghiệm "

H: "$\left(\sqrt{3} - \sqrt{12}\right)^2 = 3$ "

Lời giải

Ta có các mệnh đề phủ định là

$\overline{P}$: "Hai đường chéo của hình thoi không vuông góc với nhau", mệnh đề này sai

$\overline{Q}$: "6 không phải là số nguyên tố", mệnh đề này đúng

$\overline{R}$: "Tổng hai cạnh của một tam giác nhỏ hơn hoặc bằng cạnh còn lại", mệnh đề này sai

$\overline{S}$: "$5 \le -3$", mệnh đề này sai

$\overline{K}$: " phương trình $x^4 - 2x^2 + 2 = 0$ vô nghiệm", mệnh đề này đúng vì $x^4 - 2x^2 + 2 = \left(x^2 - 1\right)^2 + 1 > 0$

$\overline{H}$: "$\left(\sqrt{3} - \sqrt{12}\right)^2 = 3$ ", mệnh đề này sai

Ví dụ 2: Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và phát biểu mệnh đề đảo, xét tính đúng sai của nó.

a) P: "Tứ giác ABCD là hình thoi" và Q: " Tứ giác ABCD, AC và BD cắt nhau tại trung điểm mỗi đường"

b) P: "$2 > 9$" và Q: "$4 < 3$"

c) P: "Tam giác ABC vuông cân tại A" và Q: " Tam giác ABC có $\widehat{A} = 2\widehat{B}$ "

d) P: "Ngày 2 tháng 9 là ngày Quốc Khánh của nước Việt Nam" và Q: "Ngày 27 tháng 7 là ngày thương binh liệt sĩ"

Lời giải

a) Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là "Nếu tứ giác ABCD là hình thoi thì AC và BD cắt nhau tại trung điểm mỗi đường", mệnh đề này đúng.

Mệnh đề đảo là $Q \Rightarrow P$: "Nếu tứ giác ABCD có AC và BD cắt nhau tại trung điểm mỗi đường thì ABCD là hình thoi", mệnh đề này sai.

b) Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là "Nếu $2 > 9$ thì $4 < 3$", mệnh đề này đúng vì mệnh đề P sai.

Mệnh đề đảo là $Q \Rightarrow P$: "Nếu $4 < 3$ thì $2 > 9$", mệnh đề này đúng vì mệnh đề Q sai.

c) Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là "Nếu tam giác ABC vuông cân tại A thì $\widehat{A} = 2\widehat{B}$ ", mệnh đề này đúng

Mệnh đề đảo là $Q \Rightarrow P$: "Nếu tam giác ABC có $\widehat{A} = 2\widehat{B}$ thì nó vuông cân tại A", mệnh đề này sai

d) Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là "Nếu ngày 2 tháng 9 là ngày Quốc Khánh của nước Việt Nam thì ngày 27 tháng 7 là ngày thương binh liệt sĩ"

Mệnh đề đảo là $Q \Rightarrow P$: "Nếu ngày 27 tháng 7 là ngày thương binh liệt sĩ thì ngày 2 tháng 9 là ngày Quốc Khánh của nước Việt Nam"

Hai mệnh đề trên đều đúng vì mệnh đề P, Q đều đúng

Ví dụ 3: Phát biểu mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ bằng hai cách và xét tính đúng sai của nó

a) P: "Tứ giác ABCD là hình thoi" và Q: "Tứ giác ABCD là hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau"

b) P: "Bất phương trình $\sqrt{x^2 - 3x} > 1$ có nghiệm" và Q: "$\sqrt{(-1)^2 - 3.(-1)} > 1$"

Lời giải

a) Ta có mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng vì mệnh đề $P \Rightarrow Q$, $Q \Rightarrow P$ đều đúng và được phát biểu bằng hai cách như sau:

"Tứ giác ABCD là hình thoi khi và chỉ khi tứ giác ABCD là hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau" và

"Tứ giác ABCD là hình thoi nếu và chỉ nếu tứ giác ABCD là hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau"

b) Ta có mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng vì mệnh đề P, Q đều đúng(do đó mệnh đề $P \Rightarrow Q$, $Q \Rightarrow P$ đều đúng) và được phát biểu bằng hai cách như sau:

"Bất phương trình $\sqrt{x^2 - 3x} > 1$ có nghiệm khi và chỉ khi $\sqrt{(-1)^2 - 3.(-1)} > 1$"

và "Bất phương trình $\sqrt{x^2 - 3x} > 1$ có nghiệm nếu và chỉ nếu $\sqrt{(-1)^2 - 3.(-1)} > 1$"

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1.2: Nêu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau, cho biết mệnh đề này đúng hay sai?

P: "Trong tam giác tổng ba góc bằng 180^0"

Q: "$\left(\sqrt{3} - \sqrt{27}\right)^2$ là số nguyên "

R: "Việt Nam vô địch Worldcup 2020"

S: "$-\frac{\sqrt{5}}{2} > -2$"

K: "Bất phương trình $x^{2013} > 2030$ vô nghiệm "

Hướng dẫn giải

Ta có các mệnh đề phủ định là

$\overline{P}$: " Trong tam giác tổng ba góc không bằng 180^0", mệnh đề này sai

$\overline{Q}$: " $\left(\sqrt{3}-\sqrt{27}\right)^2$ không phải là số nguyên ", mệnh đề này sai

$\overline{R}$:" Việt Nam không vô địch Worldcup 2020", mệnh đề này chưa xác định được đúng hay sai

$\overline{S}$: " $-\frac{\sqrt{5}}{2} \le -2$ ", mệnh đề này đúng

$\overline{K}$: " Bất phương trình $x^{2013} > 2030$ có nghiệm ", mệnh đề này đúng

Bài 1.3: Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và phát biểu mệnh đề đảo, xét tính đúng sai của nó.

a) P: "Tứ giác ABCD là hình chữ nhật" và Q: "Tứ giác ABCD có hai đường thẳng AC và BD vuông góc với nhau"

b) P : "$-\sqrt{3} > -\sqrt{2}$" và Q : "$\left(-\sqrt{3}\right)^3 > \left(-\sqrt{2}\right)^3$"

c) P: "Tam giác ABC có $\hat{A} = \hat{B} + \hat{C}$ " và Q: "Tam giác ABC có $BC^2 = AB^2 + AC^2$"

d) P: "Tố Hữu là nhà Toán học lớn của Việt Nam" và Q: "Évariste Galois là nhà Thơ lỗi lạc của Thế giới "

Hướng dẫn giải

a) $P \Rightarrow Q$: " Nếu tứ giác ABCD là hình chữ nhật thì tứ giác ABCD có hai đường thẳng AC và BD vuông góc với nhau", mệnh đề sai

$Q \Rightarrow P$: " Nếu tứ giác ABCD hai đường thẳng AC và BD vuông góc với nhau thì tứ giác ABCD có là hình chữ nhật ", mệnh đề sai

b) $P \Rightarrow Q$: " Nếu $-\sqrt{3} > -\sqrt{2}$ thì $\left(-\sqrt{3}\right)^3 > \left(-\sqrt{2}\right)^3$ ", mệnh đề đúng

$P \Rightarrow Q$: " Nếu $\left(-\sqrt{3}\right)^3 > \left(-\sqrt{2}\right)^3$ thì $-\sqrt{3} > -\sqrt{2}$ ", mệnh đề sai

c) $P \Rightarrow Q$: "Nếu tam giác ABC có $\hat{A} = \hat{B} + \hat{C}$ thì tam giác ABC có $BC^2 = AB^2 + AC^2$"

$Q \Rightarrow P$: "Nếu tam giác ABC có $BC^2 = AB^2 + AC^2$ thì $\hat{A} = \hat{B} + \hat{C}$ "

Cả hai mệnh đề đều đúng.

d) $P \Rightarrow Q$:" Nếu Tố Hữu là nhà Toán học lớn của Việt Nam thì Évariste Galois là nhà Thơ lỗi lạc của Thế giới ", $Q \Rightarrow P$:" Nếu Évariste Galois là nhà Thơ lỗi lạc của Thế giới thì Tố Hữu là nhà Toán học lớn của Việt Nam ". Hai mệnh đề đúng.

Bài 1.4: Phát biểu mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ bằng hai cách và và xét tính đúng sai của nó

a) Cho tứ giác ABDC. Xét hai mệnh đề

P: "Tứ giác ABCD là hình vuông".

Q: "Tứ giác ABCD là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau".

b) P: "Bất phương trình $x^2 - 3x + 1 > 0$ có nghiệm" và Q: " Bất phương trình $x^2 - 3x + 1 \le 0$ vô nghiệm"

Hướng dẫn giải

a) Ta có mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ đúng vì mệnh đề $P \Rightarrow Q$, $Q \Rightarrow P$ đều đúng và được phát biểu bằng hai cách như sau:

"Tứ giác ABCD là hình vuông khi và chỉ khi tứ giác ABCD là hình chữ nhật có hai đường chéo bằng vuông góc với nhau " và

"Tứ giác ABCD là hình vuông nếu và chỉ nếu tứ giác ABCD là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau "

b) Ta có mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ sai vì mệnh đề P đúng còn Q sai.

Phát biểu mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ bằng hai cách

"Bất phương trình $x^2 - 3x + 1 > 0$ có nghiệm khi và chỉ khi bất phương trình $x^2 - 3x + 1 \le 0$ vô nghiệm" và "Bất phương trình $x^2 - 3x + 1 > 0$ có nghiệm nếu và chỉ nếu bất phương trình $x^2 - 3x + 1 \le 0$ vô nghiệm"

Bài 1.5: Cho các mệnh đề :

A : "Nếu ΔABC đều có cạnh bằng a, đường cao là h thì $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ " ;

B : "Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình vuông" ;

C : "15 là số nguyên tố" ;

D : "$\sqrt{125}$ là một số nguyên".

a) Hãy cho biết trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai :

$A \Rightarrow B$, $A \Rightarrow D$, $B \Rightarrow C$.

b) Hãy cho biết trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai :

$A \Leftrightarrow B$, $B \Leftrightarrow C$, $B \Leftrightarrow D$.

Hướng dẫn giải

Ta có A và D là các mệnh đề đúng, B và C là các mệnh đề sai. Do đó :

a) Mệnh đề $A \Rightarrow B$ sai vì A đúng và B sai.

Mệnh đề $A \Rightarrow D$ đúng vì A và D đều đúng.

Mệnh đề $B \Rightarrow C$ đúng vì B sai.

b) Mệnh đề $A \Leftrightarrow B$ sai vì mệnh đề $A \Rightarrow B$ sai (Hoặc A đúng và B sai). Mệnh đề $B \Leftrightarrow C$ đúng vì hai mệnh đề B và C đều sai.

Mệnh đề $A \Leftrightarrow D$ đúng vì hai mệnh đề A và D đều đúng.

Bài 1.6: Hãy phát biểu mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$, $\overline{Q} \Rightarrow P$ và xét tính đúng sai của mệnh đề này.

a) Cho tứ giác ABCD và hai mệnh đề:

P: "Tổng 2 góc đối của tứ giác lồi bằng 180^0 " và Q: " Tứ giác nội tiếp được đường tròn ".

b) P : " $\sqrt{2}-\sqrt{3}>-1$ " và Q: " $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2>(-1)^2$ "

Hướng dẫn giải

a) $P \Rightarrow Q$: " Nếu tổng 2 góc đối của tứ giác lồi bằng 180^0 thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn ".

$\overline{Q} \Rightarrow P$: "Nếu tứ giác không nội tiếp đường tròn thì tổng 2 góc đối của tứ giác đó bằng 180^0"

Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ đúng, mệnh đề $Q \Rightarrow P$ sai.

b) $P \Rightarrow Q$: " Nếu $\sqrt{2}-\sqrt{3}>-1$ thì $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2>(-1)^2$ "

$\overline{Q} \Rightarrow P$: " Nếu $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2 \le (-1)^2$ thì $\sqrt{2}-\sqrt{3}>-1$ "

Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ sai vì P đúng, Q sai, mệnh đề $\overline{Q} \Rightarrow P$ đúng vì P và Q đều đúng.

DẠNG TOÁN 3: *MỆNH ĐỀ CHỨA BIẾN VÀ MỆNH ĐỀ CHỨA KÍ HIỆU* $\forall, \exists$.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho mệnh đề chứa biến "$P(x): x > x^3$", xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $P(1)$ b) $P\left(\frac{1}{3}\right)$

c) $\forall x \in N, P(x)$ d) $\exists x \in N, P(x)$

Lời giải

a) Ta có $P(1): 1 > 1^3$ đây là mệnh đề sai

b) Ta có $P\left(\frac{1}{3}\right): \frac{1}{3} > \left(\frac{1}{3}\right)^3$ đây là mệnh đề đúng

c) Ta có $\forall x \in N, x > x^3$ là mệnh đề sai vì $P(1)$ là mệnh đề sai

d) Ta có $\exists x \in N, x > x^3$ là mệnh đề đúng vì $x - x^3 = x(1-x)(1+x) \le 0$ với mọi số tự nhiên.

Ví dụ 2: Dùng các kí hiệu để viết các câu sau và viết mệnh đề phủ định của nó.

a) Tích của ba số tự nhiên liên tiếp chia hết cho sáu

b) Với mọi số thực bình phương của là một số không âm.

c) Có một số nguyên mà bình phương của nó bằng chính nó.

d) Có một số hữu tỉ mà nghịch đảo của nó lớn hơn chính nó.

Lời giải

a) Ta có $P: \forall n \in N, n(n+1)(n+2) \vdots 6$, mệnh đề phủ định là $\overline{P}: \exists n \in N, n(n+1)(n+2) \not\vdots 6$.

b) Ta có $Q: \forall x \in \mathbb{R}, x^2 \ge 0$, mệnh đề phủ định là $\overline{Q}: \exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$

c) Ta có $R: \exists n \in Z, n^2 = n$, mệnh đề phủ định là $\overline{R}: \forall n \in Z, n^2 \ne n$.

d) $\exists q \in Q, \frac{1}{q} > q$, mệnh đề phủ định là $\forall q \in Q, \frac{1}{q} \le q$.

Ví dụ 3: Xác định tính đúng sai của mệnh đề sau và tìm phủ định của nó :

a) A: "$\forall x \in R, x^2 \ge 0$ "

b) B: " Tồn tại số tự nhiên đều là số nguyên tố".

c) C: " $\exists x \in N$, x chia hết cho $x+1$ "

d) D: "$\forall n \in N, n^4 - n^2 + 1$ là hợp số"

e) E: "Tồn tại hình thang là hình vuông ".

f) F: "Tồn tại số thực a sao cho $a + 1 + \frac{1}{a+1} \le 2$"

Lời giải

a) Mệnh đề A đúng và $\overline{A}: \exists x \in R, x^2 < 0$

b) Mệnh đề B đúng và $\overline{B}$: "Với mọi số tự nhiên đều không phải là số nguyên tố"

c) Mệnh đề C sai và $\overline{C}$: "$\forall x \in N, x \not\vdots (x+1)$"

d) Mệnh đề D sai vì với $n = 2$ ta có $n^4 - n^2 + 1 = 13$ không phải là hợp số

Mệnh đề phủ định là $\overline{D}$: "$\exists n \in N, n^4 - n^2 + 1$ là số số nguyên tố"

e) Mệnh đề E đúng và $\overline{E}$: " Với mọi hình thang đều không là hình vuông ".

f) Mệnh đề F đúng và mệnh đề phủ định là $\overline{F}$: "Với mọi số thực a thì $a + 1 + \frac{1}{a+1} > 2$"

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1.7: Xét đúng (sai) mệnh đề và phủ định các mệnh đề sau :

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 - x^2 + 1 > 0$

b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^4 - x^2 + 1 = \left(x^2 + \sqrt{3}x + 1\right)\left(x^2 - \sqrt{3}x + 1\right)$

c) $\exists x \in N, n^2 + 3$ chia hết cho 4

d) $\exists q \in Q, 2q^2 - 1 = 0$

e) $\exists n \in N, n(n+1)$ là một số chính phương

Hướng dẫn giải

a) Mệnh đề $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 - x^2 + 1 > 0$ sai chẳng hạn khi $x = -1$ ta có

$(-1)^3 - (-1)^2 + 1 = -1 < 0$.

Mệnh đề phủ định là $\exists x \in \mathbb{R}, x^3 - x^2 + 1 \le 0$.

b) Mệnh đề $\forall x \in \mathbb{R}, x^4 - x^2 + 1 = \left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right)\left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right)$ đúng vì

$x^4 - x^2 + 1 = \left(x^2 + 1\right)^2 - 3x^2 = \left(x^2 + \sqrt{3}x + 1\right)\left(x^2 - \sqrt{3}x + 1\right)$

Mệnh đề phủ định là $\exists x \in \mathbb{R}, x^4 - x^2 + 1 \ne \left(x^2 + \sqrt{3}x + 1\right)\left(x^2 - \sqrt{3}x + 1\right)$.

c) Mệnh đề $\exists x \in N, n^2 + 3$ chia hết cho 4 đúng vì $n = 1 \in N$ và $n^2 + 3 = 4 : 4$

Mệnh đề phủ định là "$\forall x \in N, n^2 + 3$ không chia hết cho 4"

d) Mệnh đề $\exists q \in Q, 2q^2 - 1 = 0$ sai. Mệnh đề phủ định là $\forall q \in Q, 2q^2 - 1 \ne 0$

e) Mệnh đề "$\exists n \in N, n(n+1)$ là một số chính phương" đúng. Mệnh đề phủ định là "$\forall n \in N, n(n+1)$ không phải là một số chính phương"

Bài 1.8:

a) Với $n \in \mathbb{N}$, cho mệnh đề chứa biến $P(n)$: "$n^2 + 2$ chia hết cho 4". Xét tính đúng sai của mệnh đề $P(2007)$.

b) Xét tính đúng sai của mệnh đề $P(n)$: "$\exists n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2}n(n+1)$ chia hết cho 11".

Hướng dẫn giải

a) Ta có : Với $n = 2007$ thì $n^2 + 2 = 2007^2 + 2$ là số lẻ nên không chia hết cho 4. Vậy $P(2007)$ là mệnh đề sai.

b) Xét biểu thức $\frac{n(n+1)}{2}$, với $n \in \mathbb{N}^*$. ta có :

Với $n = 10$ thì $\frac{n(n+1)}{2} = 55$: chia hết cho 11. Vậy mệnh đề đã cho là mệnh đề đúng.

Bài 1.9:

a) Cho mệnh đề P : "Với mọi số thực x, nếu x là số hữu tỉ thì 2x là số hữu tỉ". Dùng kí hiệu viết P, $\overline{P}$ và xác định tính đúng - sai của nó.

b) Phát biểu MĐ đảo của P và chứng tỏ MĐ đó là đúng. Phát biểu MĐ dưới dạng MĐ tương đương

Hướng dẫn giải

a) Mệnh đề P "$\forall x \in R, x \in Q \Rightarrow 2x \in Q$" . MĐ đúng.

$\overline{P}$: "$\exists x \in R, x \in Q \Rightarrow 2x \notin Q$" . MĐ sai

b) MĐ đảo của P là " Với mọi số thực x, $x \in Q$ khi và chỉ khi $2x \in Q$". Hay "$\forall x \in R, x \in Q \Leftrightarrow 2x \in Q$".

Bài 1.10: Cho số tự nhiên n. Xét hai mệnh đề chứa biến:

A(n) : "n là số chẵn", B(n) : "n^2 là số chẵn".

a) Hãy phát biểu mệnh đề $A(n) \Rightarrow B(n)$. Cho biết mệnh đề này đúng hay sai ?

b) Hãy phát biểu mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}, B(n) \Rightarrow A(n)$".

c) Hãy phát biểu mệnh đề "$\forall n \in \mathbb{N}, A(n) \Leftrightarrow B(n)$".

Hướng dẫn giải

a) $A(n) \Rightarrow B(n)$: "Nếu n là số chẵn thì n^2 là số chẵn". Đây là mệnh đề đúng, vì khi đó $n = 2k$ $(k \in \mathbb{N}) \Rightarrow n^2 = 4k^2$ là số chẵn.

b) "$\forall n \in \mathbb{N}, B(n) \Rightarrow A(n)$" : Với mọi số tự nhiên n, nếu n^2 là số chẵn thì n là số chẵn.

c) "$\forall n \in \mathbb{N}, A(n) \Leftrightarrow B(n)$" : Với mọi số tự nhiên n, n là số chẵn khi và chỉ khi n^2 là số chẵn.

Bài 1.11: Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $P : "\forall x \in R, \forall y \in R : x + y = 1"$ b) $Q : "\exists x \in R, \exists y \in R : x + y = 2"$

c) $R : "\exists \, \in R, \forall y \in R : x + y = 3"$ d) $S : "\forall x \in R, \exists y \in R : x + y = 4"$

Hướng dẫn giải

a) Mệnh đề P sai vì chẳng hạn $x = 1 \in \mathbb{R}, y = 2 \in \mathbb{R}$ nhưng $x + y \ne 1$

b) Mệnh đề Q đúng vì $x = y = 1 \Rightarrow x + y = 2$

c) Vì $x + y = 3$ nên với mọi $y \in \mathbb{R}$ thì luôn tồn tại $x = 3 - y$ do đó mệnh đề R đúng

d) Mệnh đề S đúng

§2: ÁP DỤNG MỆNH ĐỀ VÀO SUY LUẬN TOÁN HỌC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. *Định lí và chứng minh định lí.*

- Trong toán học định lý là một mệnh đề đúng. Nhiều định lý được phát biểu dưới dạng "$\forall x \in X,\ P(x) \Rightarrow Q(x)$", $P(x), Q(x)$ là các mệnh đề chứa biến
- Có hai cách để chứng minh định lí dưới dạng trên

Cách 1: Chứng minh trực tiếp gồm các bước sau:

- Lấy $x \in X$ bất kỳ mà $P(x)$ đúng
- Chứng minh $Q(x)$ đúng(bằng suy luận và kiến thức toán học đã biết)

Cách 2: Chứng minh bằng phản định lí gồm các bước sau:

- Giả sử tồn tại $x_0 \in X$ sao cho $P(x_0)$ đúng và $Q(x_0)$ sai
- Dùng suy luận và các kiến thức toán học để đi đến mâu thuẫn.

2. **Định lí đảo, điều kiện cần, điều kiện đủ, điều kiện cần và đủ.**

- Cho định lí dưới dạng "$\forall x \in X,\ P(x) \Rightarrow Q(x)$" (1). Khi đó

$P(x)$ là ***điều kiện đủ*** để có $Q(x)$

$Q(x)$ là ***điều kiện cần*** để có $P(x)$

- Mệnh đề $\forall x \in X,\ Q(x) \Rightarrow P(x)$ đúng thì được gọi ***định lí đảo*** của định lí dạng (1)

Lúc đó (1) được gọi là ***định lý thuận*** và khi đó có thể gộp lại thành một định lí $\forall x \in X,\ Q(x) \Leftrightarrow P(x)$, ta gọi là "$P(x)$ là ***điều kiện cần và đủ*** để có $Q(x)$"

Ngoài ra còn nói "$P(x)$ nếu và chỉ nếu $Q(x)$", "$P(x)$ khi và chỉ khi $Q(x)$",

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: *PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẰNG PHẢN CHỨNG.*

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, n^3 chia hết cho 3 thì n chia hết cho 3.

Lời giải

Giả sử n không chia hết cho 3 khi đó $n = 3k+1$ hoặc $n = 3k+2$, $k \in Z$

Với $n = 3k+1$ ta có $n^3 = (3k+1)^3 = 27k^3 + 27k^2 + 9k + 1$ không chia hết cho 3 (mâu thuẫn)

Với $n = 3k+2$ ta có $n^3 = (3k+2)^3 = 27k^3 + 54k^2 + 36k + 4$ không chia hết cho ba (mâu thuẫn)

Vậy n chia hết cho 3.

Ví dụ 2: Cho tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$. Chứng minh rằng nếu tồn tại số thực α sao cho $a.f(\alpha) \leq 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ luôn có nghiệm.

Lời giải

Ta có $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a},\ \Delta = b^2 - 4ac$.

Giả sử phương trình đã cho vô nghiệm, nghĩa là $\Delta < 0$.

Khi đó ta có: $af(x) = a^2\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4} > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

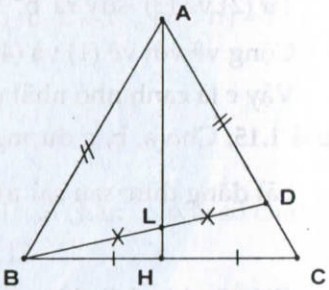
Suy ra không tồn tại α để $af(\alpha) \leq 0$, trái với giả thiết.

Vậy điều ta giả sử ở trên là sai, hay phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng một tam giác có đường trung tuyến vừa là phân giác xuất phát từ một đỉnh là tam giác cân tại đỉnh đó.

Lời giải

Giả sử tam giác ABC có AH vừa là đường trung tuyến vừa là đường phân giác và không cân tại A.



Không mất tính tổng quát xem như $AC > AB$.

Trên AC lấy D sao cho $AB = AD$.

Gọi L là giao điểm của BD và AH.

Khi đó $AB = AD,\ \widehat{BAL} = \widehat{LAD}$ và AL chung nên $\Delta ABL = \Delta ADL$

Do đó $AL = LD$ hay L là trung điểm của BD

Suy ra LH là đường trung bình của tam giác CBD

$\Rightarrow LH // DC$ điều này mâu thuẫn vì LH, DC cắt nhau tại A

Vậy tam giác ABC cân tại A.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1.12: Chứng minh bằng phương pháp phản chứng: Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ vô nghiệm thì a và c cùng dấu.

Hướng dẫn giải

Giả sử phương trình vô nghiệm và a, c trái dấu. Với điều kiện a, c trái dấu có a.c<0 suy ra $\Delta = b^2 - 4ac = b^2 + 4(-ac) > 0$

Nên phương trình có hai nghiệm phân biệt, điều này mâu thuẫn với giả thiết phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình vô nghiệm thì a, c phải cùng dấu.

Bài 1.13: Chứng minh bằng phương pháp phản chứng: Nếu hai số nguyên dương có tổng bình phương chia hết cho 3 thì cả hai số đó phải chia hết cho 3.

Hướng dẫn giải

Giả sử trong hai số nguyên dương a và b có ít nhất một số không chia hết cho 3, chẳng hạn a không chia hết cho 3. Thế thì a có dạng: $a = 3k + 1$ hoặc $a = 3k+2$. Lúc đó $a^2 = 3m + 1$, nên nếu b chia hết cho 3 hoặc b không chia hết cho 3 thì $a^2 + b^2$ cũng có dạng: $3n + 1$ hoặc $3n + 2$, tức là $a^2 + b^2$ không chia hết cho 3, trái giả thiết. Vậy nếu $a^2 + b^2$ chia hết cho 3 thì cả a và b đều chia hết cho 3.

Bài 1.14: Chứng minh rằng : Nếu độ dài các cạnh của tam giác thỏa mãn bất đẳng thức $a^2 + b^2 > 5c^2$ thì c là độ dài cạnh nhỏ nhất của tam giác.

Hướng dẫn giải

Giả sử c không phải là cạnh nhỏ nhất của tam giác.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \le c \Rightarrow a^2 \le c^2$ (1)

Theo bất đẳng thức trong tam giác, ta có $b < a + c \Rightarrow b^2 < (a + c)^2$ (2).

Do $a \le c \Rightarrow (a + c)^2 \le 4c^2$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $b^2 \le 4c^2$ (4).

Cộng vế với vế (1) và (4) ta có $a^2 + b^2 \le 5c^2$ mâu thuẫn với giả thiết

Vậy c là cạnh nhỏ nhất của tam giác.

Bài 1.15; Cho a, b, c dương nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng ít nhất một trong ba bất đẳng thức sau sai $a(1-b) > \frac{1}{4}$, $b(1-c) > \frac{1}{4}$, $c(1-a) > \frac{1}{4}$

Hướng dẫn giải

Giả sử cả ba bất đẳng thức đều đúng.

Khi đó, nhân theo vế của các bất đẳng thức trên ta được:

$a(1-b).b(1-c).c(1-a) > \left(\frac{1}{4}\right)^3$ hay $a(1-a).b(1-b).c(1-c) > \frac{1}{64}$ (*)

Mặt khác $a(1-a) = -a^2 + a = \frac{1}{4} - \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{4}$

Do $0 < a < 1 \Rightarrow 0 < a(1-a) \le \frac{1}{4}$

Tương tự thì $0 < b(1-b) \le \frac{1}{4}$, $0 < c(1-c) \le \frac{1}{4}$

Nhân theo vế ta được $a(1-a).b(1-b).c(1-c) \le \frac{1}{64}$ (**)

Bất đẳng thức (**) mâu thuẫn (*)

Vậy có ít nhất một trong các bất đẳng thức đã cho là sai. (đpcm)

Bài 1.16: Nếu $a_1a_2 \ge 2(b_1 + b_2)$ thì ít nhất một trong hai phương trình $x^2 + a_1x + b_1 = 0$, $x^2 + a_2x + b_2 = 0$ có nghiệm.

Hướng dẫn giải

Giả sử cả hai phương trình trên vô nghiệm

Khi đó $D_1 = a_1^2 - 4b_1 < 0$, $D_1 = a_2^2 - 4b_2 < 0$

$\Rightarrow a_1^2 - 4b_1 + a_2^2 - 4b_2 < 0 \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 < 4(b_1 + b_2)$ (1)

Mà $(a_1 - a_2)^2 \ge 0 \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 \ge 2a_1a_2$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2a_1a_2 < 4(b_1 + b_2)$ hay $a_1a_2 < 2(b_1 + b_2)$ trái giả thiết.

Vậy phải có ít nhất 1 trong hai số Δ_1, Δ_2 lớn hơn 0 do đó ít nhất 1 trong 2 phương trình $x^2 + a_1x + b_1 = 0$, $x^2 + a_2x + b_2 = 0$ có nghiệm.

Bài 1.17: Chứng minh rằng $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

Hướng dẫn giải

Dễ dàng chứng minh được nếu n^2 là số chẵn thì n là số chẵn

Giả sử $\sqrt{2}$ là số hữu tỉ, tức là $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, trong đó $m, n \in \mathbb{N}^*$, $(m, n) = 1$

Từ $\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2$ là số chẵn

$\Rightarrow$ m là số chẵn $\Rightarrow m = 2k$, $k \in N^*$

Từ $m^2 = 2n^2 \Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2 \Rightarrow n^2$ là số chẵn $\Rightarrow$ n là số chẵn

Do đó m chẵn, n chẵn, mâu thuẫn với $(m, n) = 1$.

Vậy $\sqrt{2}$ là số vô tỉ.

Bài 1.18: Cho các số a, b, c thỏa các điều kiện : $\begin{cases} a + b + c > 0 & (1) \\ ab + bc + ca > 0 & (2) \\ abc > 0 & (3) \end{cases}$

Chứng minh rằng cả ba số a, b, c đều dương.

Hướng dẫn giải

Giả sử ba số a, b, c không đồng thời là số dương. Vậy có ít nhất một số không dương.

Do a, b, c có vai trò bình đẳng nên ta có thể giả sử : $a \le 0$

+ Nếu $a = 0$ thì mâu thuẫn với (3)
+ Nếu $a < 0$ thì từ (3) $\Rightarrow bc < 0$

Ta có (2) $\Leftrightarrow a(b + c) > -bc \Rightarrow a(b + c) > 0$

$\Rightarrow b + c < 0 \Rightarrow a + b + c < 0$ mâu thuẫn (1).

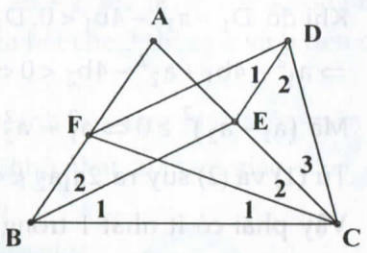
Vậy cả ba số a, b, c đều dương.

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN
ĐVL / 13393 / 14

Bài 1.19: Chứng minh bằng phản chứng định lí sau : "Nếu tam giác ABC có các đường phân giác trong BE, CF bằng nhau, thì tam giác ABC cân".

Hướng dẫn giải

- Nếu $\hat{B} > \hat{C}$ thì ta dựng hình bình hành BEDF như hình vẽ .



Ta có : $\hat{B} > \hat{C} \Rightarrow \widehat{B_2} > \widehat{C_2} \Rightarrow \widehat{D_1} > \widehat{C_2}$ (1)

Ngoài ra, BE = CF $\Rightarrow$ DF = CE

$\Rightarrow \widehat{D_1} + \widehat{D_2} = \widehat{C_2} + \widehat{C_3}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra

$\widehat{D_2} < \widehat{C_3} \Rightarrow$ EC < ED $\Rightarrow$ EC < FB .

Xét các tam giác BCE và CBF, ta thấy :

BC chung, BE = CF, BF > CE nên $\widehat{C_1} > \widehat{B_1} \Rightarrow \hat{C} > \hat{B}$. Mâu thuẫn.

- Trường hợp $\hat{C} > \hat{B}$, chứng minh hoàn toàn tương tự như trên.

Do đó $\hat{B} = \hat{C}$. Vậy tam giác ABC cân tại A.

Bài 1.20: Cho 7 đoạn thẳng có độ dài lớn hơn 10 và nhỏ hơn 100. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 đoạn để có thể ghép thành một tam giác.

Hướng dẫn giải

Trước hết sắp xếp các đoạn đã cho theo thứ tự tăng dần của độ dài $a_1, a_2, ..., a_7$ và chứng minh rằng trong dãy đã xếp luôn tìm được 3 đoạn liên tiếp sao cho tổng của 2 đoạn đầu lớn hơn đoạn cuối (vì điều kiện để 3 đoạn có thể ghép thành một tam giác là tổng của 2 đoạn lớn hơn đoạn thứ ba).

Giả sử điều cần chứng minh là không xảy ra, nghĩa là đồng thời xảy ra các bất đẳng thức sau: $a_1 + a_2 \le a_3; a_2 + a_3 \le a_4; ...; a_5 + a_6 \le a_7$

Từ giả thiết a_1, a_2 có giá trị lớn hơn 10, ta nhận được $a_3 > 20$. Từ $a_2 > 10$ và $a_3 > 20$ ta nhận được $a_3 > 30, a_5 > 50, a_6 > 80$ và $a_7 > 130$. Điều $a_7 > 130$ là mâu thuẫn với giả thiết các độ dài nhỏ hơn 100. Có mâu thuẫn này là do giả sử điều cần chứng minh không xảy ra.

Vậy, luôn tồn tại 3 đoạn liên tiếp sao cho tổng của 2 đoạn đầu lớn hơn đoạn cuối. Hay nói cách khác là 3 đoạn này có thể ghép thành một tam giác.

DẠNG TOÁN 2: *SỬ DỤNG THUẬT NGỮ ĐIỀU KIỆN CẦN, ĐIỀU KIỆN ĐỦ, ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ .*

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho định lí : "Cho số tự nhiên n. Nếu n^5 chia hết cho 5 thì n chia hết cho 5". Định lí này được viết dưới dạng $P \Rightarrow Q$.

a) Hãy xác định các mệnh đề P và Q.

b) Phát biểu định lí trên bằng cách dùng thuật ngữ "điều kiện cần".

c) Phát biểu định lí trên bằng cách dùng thuật ngữ "điều kiện đủ".

d) Hãy phát biểu định lí đảo (nếu có) của định lí trên rồi dùng các thuật ngữ "điều kiện cần và đủ" phát biểu gộp cả hai định lí thuận và đảo.

Lời giải.

a) P : "n là số tự nhiên và n^5 chia hết cho 5", Q : "n chia hết cho 5".

b) Với n là số tự nhiên, n chia hết cho 5 là điều kiện cần để n^5 chia hết cho 5 ; hoặc phát biểu cách khác : Với n là số tự nhiên, điều kiện cần để n^5 chia hết cho 5 là n chia hết cho 5.

c) Với n là số tự nhiên, n^5 chia hết cho 5 là *điều kiện đủ* để n chia hết cho 5.

d) Định lí đảo : "Cho số tự nhiên n, nếu n chia hết cho 5 thì n^5 chia hết cho 5". Thật vậy, nếu n = 5k thì $n^5 = 5^5.k^5$: Số này chia hết cho 5.

Điều kiện cần và đủ để n chia hết cho 5 là n^5 chia hết cho 5.

Ví dụ 2: Phát biểu các mệnh đề sau với thuật ngữ "Điều kiện cần", "Điều kiện đủ"

a) Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có diện tích bằng nhau

b) Nếu số nguyên dương chia hết cho 6 thì chia hết cho 3

c) Nếu hình thang có hai đường chéo bằng nhau thì nó là hình thang cân

d) Nếu tam giác ABC vuông tại A và AH là đường cao thì $AB^2 = BC.BH$

Lời giải

a) Hai tam giác bằng nhau là điều kiện đủ để chúng có diện tích bằng nhau
Hai tam giác có diện tích bằng nhau là điều kiện cần để chúng bằng nhau

b) Số nguyên dương chia hết cho 6 là điều kiện đủ để nó chia hết cho 3
Số nguyên dương chia hết cho 3 là điều kiện cần để nó chia hết cho 6

c) Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là điều kiện đủ để nó là hình thang cân
Hình thang cân là điều kiện cần để nó có hai đường chéo bằng nhau

d) Tam giác ABC vuông tại A và AH là đường cao là điều kiện đủ để $AB^2 = BC.BH$

Tam giác ABC có $AB^2 = BC.BH$ là điều kiện cần để nó vuông tại A và AH là đường cao.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1.21: Phát biểu các định lý sau đây bằng cách sử dụng khái niệm " Điều kiện cần", " Điều kiện đủ "

a) Nếu trong mặt phẳng, hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ 3 thì hai đường thẳng đó song song với nhau

b) Nếu số nguyên dương có chữ tận cùng bằng 5 thì chia hết cho 5

c) Nếu tứ giác là hình thoi thì 2 đường chéo vuông góc với nhau

d) Nếu 2 tam giác bằng nhau thì chúng có các góc tương ứng bằng nhau

e) Nếu số nguyên dương a chia hết cho 24 thì chia hết cho 4 và 6

Hướng dẫn giải

a) Trong mặt phẳng, hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ 3 là điều kiện đủ để hai đường thẳng đó song song với nhau.

Trong mặt phẳng, hai đường thẳng đó song song với nhau là điều kiện cần để hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ 3.

b) Số nguyên dương có chữ số tận cùng bằng 5 là điều kiện đủ để chia hết cho 5.

Số nguyên dương chia hết cho 5 là điều kiện cần để nó có chữ số tận cùng bằng 5.

c) Tứ giác là hình thoi là điều kiện đủ để nó có 2 đường chéo vuông góc với nhau

Tứ giác có hai đường chéo vuông góc với nhau là điều kiện cần để nó là hình thoi

d) Hai tam giác bằng nhau là điều kiện đủ để chúng có các góc tương ứng bằng nhau

Hai tam giác có các góc tương ứng bằng nhau là điều kiện cần để chúng bằng nhau

e) Số nguyên dương a chia hết cho 24 là điều kiện đủ để nó chia hết cho 4 và 6

Số nguyên dương a chia hết cho 4 và 6 là điều kiện cần để nó chia hết cho 24.

Bài 1.22. Dùng thuật ngữ điều kiện cần và đủ để phát biểu định lí sau

a) Một tam giác là tam giác cân, nếu và chỉ nếu nó có hai góc bằng nhau

b) Tứ giác là hình bình hành khi và chỉ khi tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

c) $x \geq y \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} \geq \sqrt[3]{y}$

d) Tứ giác MNPQ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

Hướng dẫn giải

a) Một tam giác là tam giác cân là điều kiện cần và đủ để nó có hai góc bằng nhau

b) Tứ giác là hình bình hành là điều kiện cần và đủ để tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

c) $x \geq y$ là điều kiện cần và đủ để $\sqrt[3]{x} \geq \sqrt[3]{y}$

d) Điều kiện cần và đủ để tứ giác MNPQ là hình bình hành là $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$.

Bài 1.23: Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần", "điều kiện đủ" để phát biểu định lí sau:

a) "Nếu một tứ giác là hình vuông thì nó có bốn cạnh bằng nhau".
Có định lí đảo của định lí trên không , vì sao?

b) "Nếu một tứ giác là hình thoi thì nó có hai đường chéo vuông góc".
Có định lí đảo của định lí trên không , vì sao?

Hướng dẫn giải

a) Một tứ giác là hình vuông là điều kiện đủ để nó có 4 cạnh bằng nhau.
Một tứ giác có 4 cạnh bằng nhau là điều kiện cần để nó là hình vuông.
Không có định lí đảo vì tứ giác có 4 cạnh bằng nhau có thể là hình thoi

b) Một tứ giác là hình thoi là điều kiện đủ để nó có hai đường chéo vuông góc.
Một tứ giác có hai đường chéo vuông góc là điều kiện cần để nó là hình thoi
Không có định lí đảo vì tứ giác có hai đường chéo vuông góc có thể là hình vuông hoặc một đa giác bất kì có hai đường chéo vuông góc.

§3: TẬP HỢP VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

A.TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tập hợp

- **Tập hợp** là một khái niệm cơ bản của toán học, không định nghĩa.
- **Cách xác định tập hợp:**
  + Liệt kê các phần tử: viết các phần tử của tập hợp trong hai dấu móc {... }.
  + Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.
- **Tập rỗng:** là tập hợp không chứa phần tử nào, kí hiệu $\varnothing$.

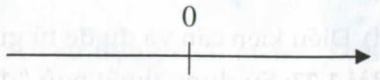
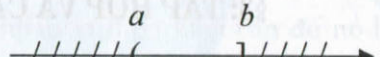
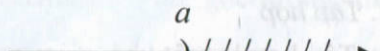
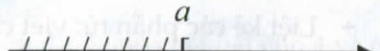
2. Tập hợp con – Tập hợp bằng nhau

- $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$

  Các tính chất:

  + $A \subset A, \forall A$ + $\varnothing \subset A, \forall A$ + $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$
- $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ và } B \subset A) \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

3. Một số tập con của tập hợp số thực

Tên gọi, ký hiệu	Tập hợp	Hình biểu diễn
Tập số thực $(-\infty;+\infty)$	$\mathbb{R}$	
Đoạn $[a;b]$	$\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\le b\}$	
Khoảng $(a;b)$	$\{x\notin\mathbb{R}\mid a<x<b\}$	
Khoảng $(-\infty;a)$	$\{x\in\mathbb{R}\mid x<a\}$	
Khoảng $(a;+\infty)$	$\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\}$	
Nửa khoảng $[a;b)$	$\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x<b\}$	
Nửa khoảng $(a;b]$	$\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\le b\}$	
Nửa khoảng $(-\infty;a]$	$\{x\in\mathbb{R}\mid x\le a\}$	
Nửa khoảng $[a;+\infty)$	$\{x\in\mathbb{R}\mid x\ge a\}$	

4. Các phép toán tập hợp

- Giao của hai tập hợp: $A\cap B\Leftrightarrow\{x\mid x\in A \text{ và } x\in B\}$
- Hợp của hai tập hợp: $A\cup B\Leftrightarrow\{x\mid x\in A \text{ hoặc } x\in B\}$
- Hiệu của hai tập hợp: $A\setminus B\Leftrightarrow\{x\mid x\in A \text{ và } x\notin B\}$

  Phần bù: Cho $B\subset A$ thì $C_AB=A\setminus B$.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: *XÁC ĐỊNH TẬP HỢP VÀ PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP*

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Xác định các tập hợp sau bằng cách nêu tính chất đặc trưng

$A=\{0;1;2;3;4\}$; $B=\{0;4;8;12;16\}$; $C=\{1;2;4;8;16\}$

Lời giải

Ta có các tập hợp A, B, C được viết dưới dạng nêu các tính chất đặc trưng là

$A=\{x\in\mathbb{N}\mid x\le 4\}$; $B=\{x\in\mathbb{N}\mid x\vdots 4 \text{ và } x\le 16\}$

$C=\{2^n\mid n\le 4 \text{ và } n\in\mathbb{N}\}$

Ví dụ 2: Cho $A=\{-4;-2;-1;2;3;4\}$ và $B=\{x\in\mathbb{Z}\mid|x|\le 4\}$.

Tìm tập hợp X sao cho

a) $X\subset B\setminus A$ b) $A\subset X\subset B$

c) $A\cup X=B$ với X có đúng bốn phần tử

Lời giải

Ta có $\begin{cases}|x|\le 4\\ x\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4\le x\le 4\\ x\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow x\in\{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$

Suy ra $B=\{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$

a) Ta có $B\setminus A=\{-3;0;1\}$

Suy ra $X\subset B\setminus A$ thì các tập hợp X là

$\varnothing,\{-3\},\{0\},\{1\},\{-3;0\},\{-3;1\},\{0;1\},\{-3;0;1\}$

b) Ta có $\{-4;-2;-1;2;3;4\}\subset X\subset\{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$ suy ra tập hợp X là

$\{-4;-2;-1;2;3;4\},\{-4;-2;-3;-1;2;3;4\},\{-4;-2;-1;0;2;3;4\}$

$\{-4;-2;-1;1;2;3;4\},\{-4;-2;-3;-1;0;2;3;4\},\{-4;-2;-3;-1;1;2;3;4\}$

$\{-4;-2;-1;0;1;2;3;4\},\{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$

c) Ta có $A\cup X=B$ với X có đúng bốn phần tử khi đó tập hợp X là

$\{-4;-3;0;1\},\{-3;-2;0;1\},\{-3;-1;0;1\},\{-3;0;1;2\},\{-3;0;1;3\},\{-3;0;1;4\}$

Ví dụ 4: Cho các tập hợp:

$A=\left\{x\in R\mid\left(x^2+7x+6\right)\left(x^2-4\right)=0\right\}$; $B=\{x\in\mathbb{N}\mid 2x\le 8\}$

$C=\{2x+1\mid x\in\mathbb{Z} \text{ và } -2\le x\le 4\}$

a) Hãy viết lại các tập hợp A, B, C dưới dạng liệt kê các phần tử

b) Tìm $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus C$, $C_{A\cup B}(B \setminus C)$.

c) Tìm $(A \cup C) \setminus B$.

Lời giải

a) • Ta có: $(x^2+7x+6)(x^2-4)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x^2+7x+6=0 \\ x^2-4=0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=-1 \\ x=-6 \end{bmatrix}$ hoặc $\begin{bmatrix} x=-2 \\ x=2 \end{bmatrix}$

Vậy $A=\{-6;-2;-1;2\}$

• Ta có $\begin{cases} x\in N \\ 2x\le 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in N \\ x\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\{0,1,2,3,4\}$. Vậy $B=\{0;1;2;3;4\}$

• Ta có $\begin{cases} x\in Z \\ -2\le x\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\{-2,-1,0,1,2,3,4\}$. Suy ra $C=\{-3;-1;1;3;5;7;9\}$

b) Ta có: $A\cup B=\{-6;-2;-1;0;1;2;3;4\}$, $A\cap B=\{2\}$, $B\setminus C=\{0;2;4\}$

$C_{A\cup B}(B\setminus C)=(A\cup B)\setminus(B\setminus C)=\{-6;-2;-1;1;3\}$

c) Ta có: $A\cup C=\{-6;-3;-2;-1;1;2;3;5;7;9\}$

Suy ra $(A\cup C)\setminus B=\{-6;-3;-2;-1;5;7;9\}$

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1.24: Xác định các tập hợp sau bằng cách nêu tính chất đặc trưng

$A=\{-4;-3;-2;-1;0\ ;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\}$, $B=\{1\ ;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9\}$, $C=\{0;1;4;9;16;25\}$

Hướng dẫn giải

Ta có các tập hợp A,B,C được viết dưới dạng nêu các tính chất đặc trưng là $A=\{x\in N\mid |x|\le 4\}$, $B=\{x\in N\mid x$ là số lẻ nhỏ hơn $10\}$, $C=\{n^2\mid n$ là số tự nhiên nhỏ hơn $6\}$

Bài 1.25 Cho tập hợp $A=\left\{x\in\mathbb{R}\mid \frac{14}{3\sqrt{x}+6}\in Z\right\}$

a) Hãy xác định tập A bằng cách liệt kê các phần tử

b) Tìm tất cả các tập con của tập hợp A.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\sqrt{x}\ge 0$ suy ra $0<\frac{14}{3\sqrt{x}+6}\le\frac{14}{6}$

Mặt khác $\frac{14}{3\sqrt{x}+6}\in Z$ nên $\frac{14}{3\sqrt{x}+6}=1$ hoặc $\frac{14}{3\sqrt{x}+6}=2$

Hay $x=\frac{1}{9}$ hoặc $x=\frac{64}{9}$. Vậy $A=\left\{\frac{1}{9};\frac{64}{9}\right\}$

b) Tất cả các tập con của tập hợp A là $\varnothing, \left\{\frac{1}{9}\right\}, \left\{\frac{64}{9}\right\}, \left\{\frac{1}{9};\frac{64}{9}\right\}$.

Bài 1.26: Cho $A=\left\{x\in\mathbb{R}\mid (x^4-16)(x^2-1)=0\right\}$ và $B=\{x\in N\mid 2x-9\le 0\}$.

Tìm tập hợp X sao cho

a) $X\subset B\setminus A$

b) $A\setminus B=X\cap A$ với X có đúng hai phần tử

Hướng dẫn giải

Ta có $A=\{-2;-1;1;2\}$ và $B=\{0;1;2;3;4\}$

a) Ta có $B\setminus A=\{0;3;4\}$

Suy ra $X\subset B\setminus A$ thì các tập hợp X là

$\varnothing, \{0\}, \{3\}, \{4\}, \{0;3\}, \{0;4\}, \{3;4\}, \{0;3;4\}$

b) Ta có $A\setminus B=\{-2;-1\}$ với X có đúng hai phần tử khi đó $X=\{-2;-1\}$.

Bài 1.27: Cho tập $A=\{-1;1;5;8\}$, $B=$"Gồm các ước số nguyên dương của 16"

a) Viết tập A dưới dạng chỉ ra tính chất đặc trưng của các phần tử.

Viết tập B dưới dạng liệt kê các phần tử.

b) Xác định các phép toán $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $A=\left\{x\in\mathbb{R}\mid (x+1)(x-1)(x-5)(x-8)=0\right\}$

$B=\{1;\ 2;\ 4;\ 8;\ 16\}$

b) Ta có $A\cap B=\{1;8\}$, $A\cup B=\{-1;\ 1;\ 2;\ 4;\ 5;\ 8;\ 16\}$, $A\setminus B=\{-1;\ 5\}$

Bài 1.28: Cho các tập hợp $E=\{x\in N\mid 1\le x<7\}$

$A=\{x\in N\mid (x^2-9)(x^2-5x-6)=0\}$

và $B=\{x\in N\mid x$ là số nguyên tố nhỏ hơn $6\}$

a) Chứng minh rằng $A\subset E$ và $B\subset E$

b) Tìm $C_E A$; $C_E B$; $C_E(A\cup B)$

c) Chứng minh rằng: $E\setminus(A\cap B)=(E\setminus A)\cup(E\setminus B)$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $E=\{1;2;3;4;5;6\}$ $A=\{3;6\}$ và $B=\{2;3;5\}$

Suy ra $A\subset E$ và $B\subset E$

b) Ta có $C_E A=E\setminus A=\{1;2;4;5\}$; $C_E B=E\setminus B=\{1;4;6\}$

$A\cup B=\{2;3;5;6\}\Rightarrow C_E(A\cup B)=E\setminus(A\cup B)=\{1;4\}$

c) Ta có $A\cap B=\{3\}\Rightarrow C_E(A\cap B)=E\setminus(A\cap B)=\{1;2;4;5;6\}$

$E\setminus A=\{1;2;4;5\}$; $E\setminus B=\{1;4;6\}\Rightarrow(E\setminus A)\cup(E\setminus B)=\{1;2;4;5;6\}$

Suy ra $E\setminus(A\cap B)=(E\setminus A)\cup(E\setminus B)$.

DẠNG TOÁN 2: *SỬ DỤNG BIỂU ĐỒ VEN ĐỂ GIẢI TOÁN.*

Phương pháp giải.

- Chuyển bài toán về ngôn ngữ tập hợp
- Sử dụng biểu đồ ven để minh họa các tập hợp
- Dựa vào biểu đồ ven ta thiết lập được đẳng thức (hoặc phương trình hệ phương trình) từ đó tìm được kết quả bài toán

Trong dạng toán này ta kí hiệu $n(X)$ là số phần tử của tập X.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Mỗi học sinh của lớp $10A_1$ đều biết chơi đá cầu hoặc cầu lông, biết rằng có 25 em biết chơi đá cầu, 30 em biết chơi cầu lông , 15 em biết chơi cả hai. Hỏi lớp $10A_1$ có bao nhiêu em chỉ biết đá cầu? bao nhiêu em chỉ biết đánh cầu lông? Sĩ số lớp là bao nhiêu?

Lời giải

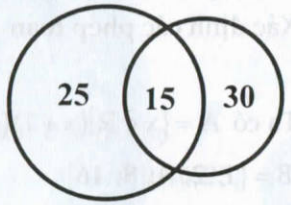
Dựa vào biểu đồ ven ta suy ra số học sinh chỉ biết đá cầu là $25-15=10$

Số học sinh chỉ biết đánh cầu lông là

$30-15=15$

Do đó ta có sĩ số học sinh của lớp $10A_1$ là

$10+15+15=40$



Ví dụ 2: Trong lớp 10C có 45 học sinh trong đó có 25 em thích môn Văn, 20 em thích môn Toán, 18 em thích môn Sử, 6 em không thích môn nào, 5 em thích cả ba môn. Hỏi số em thích chỉ một môn trong ba môn trên.

Lời giải

Gọi a,b,c theo thứ tự là số học sinh chỉ thích môn Văn, Sử, Toán;

x là số học sịnh chỉ thích hai môn là văn và toán

y là số học sịnh chỉ thích hai môn là Sử và toán

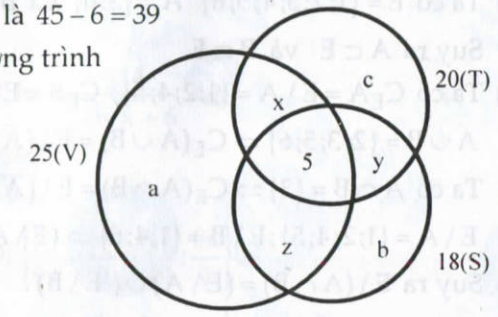
z là số học sịnh chỉ thích hai môn là văn và Sử

Ta có số em thích ít nhất một môn là $45-6=39$

Sựa vào biểu đồ ven ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a+x+z+5=25 & (1)\\ b+y+z+5=18 & (2)\\ c+x+y+5=20 & (3)\\ x+y+z+a+b+c+5=39 & (4)\end{cases}$$

Cộng vế với vế (1), (2), (3) ta có



$a+b+c+2(x+y+z)+15=63$ (5)

Từ (4) và (5) ta có

$a+b+c+2(39-5-a-b-c)+15=63 \Leftrightarrow a+b+c=20$

Vậy chỉ có 20 em thích chỉ một môn trong ba môn trên.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1.29: Một nhóm học sinh giỏi các bộ môn: Anh, Toán, Văn. Có 8 em giỏi Văn, 10 em giỏi Anh, 12 em giỏi Toán, 3 em giỏi Văn và Toán, 4 em giỏi Toán và Anh, 5 em giỏi Văn và Anh , 2 em giỏi cả ba môn. Hỏi nhóm đó có bao nhiêu em?

Hướng dẫn giải

Ký hiệu A là tập hợp những học sinh giỏi Anh, T là tập hợp những học sinh giỏi toán, V là tập hợp những học sinh giỏi Văn.

Theo giả thiết ta có: $n(V)=8,\ n(A)=10,\ n(T)=12,$

$n(V\cap T)=3,\ n(T\cap A)=4,\ n(V\cap A)=5,\ n(A\cap B\cap C)=2.$

$$n(V\cup A\cup T)=n(V)+n(A)+n(T)-n(V\cap A)-n(A\cap T)$$
$$-n(T\cap V)+n(V\cap A\cap T)$$

$8+10+12-3-4-5+2=20$.

Vậy nhóm đó có 20 em.

Bài 1.30: Có 40 học sinh giỏi, mỗi em giỏi ít nhất một môn. Có 22 em giỏi Văn, 25 em giỏi Toán, 20 em giỏi Anh. Có 8 em giỏi đúng hai môn Văn, Toán; Có 7 em giỏi đúng hai môn Toán, Anh; Có 6 em giỏi đúng hai môn Anh, Văn. Hỏi: Có bao nhiêu em giỏi cả ba môn Văn, Toán, Anh?

Hướng dẫn giải

Ký hiệu A là tập hợp những học sinh giỏi Anh, T là tập hợp những học sinh giỏi toán, V là tập hợp những học sinh giỏi Văn.

Theo giả thiết ta có: $n(V)=22,\ n(T)=25,\ n(A)=20,$

$n(V\cap T)=8,\ n(T\cap A)=7,\ n(V\cap A)=6,\ n(A\cup B\cup C)=40.$

$$n(V\cup A\cup T)=n(V)+n(A)+n(T)-n(V\cap A)$$
$$-n(A\cap T)-n(T\cap V)+n(V\cap A\cap T)$$
$$\Rightarrow n(V\cap A\cap T)=n(V\cup A\cup T)-n(V)-n(A)$$
$$-n(T)+n(V\cap A)+n(A\cap T)+n(T\cap V)$$

$40-22-25-20+8+7+6=14$.

Vậy có 14 em học giỏi cả ba môn

Bài 1.31: Trong Kỳ thi tốt nghiệp phổ thông, ở một trường kết quả số thí sinh đạt danh hiệu xuất sắc như sau: Về môn Toán: 48 thí sinh; Về môn Vật lý: 37 thí sinh; Về môn Văn: 42 thí sinh; Về môn Toán hoặc môn Vật lý: 75 thí sinh; Về môn Toán hoặc môn Văn: 76 thí sinh; Về môn Vật lý hoặc môn Văn: 66 thí sinh; Về cả 3 môn: 4 thí sinh. Vậy có bao nhiêu học sinh nhận được danh hiệu xuất sắc về:

a) Một môn?

b) Hai môn?

c) ít nhất một môn?

Hướng dẫn giải

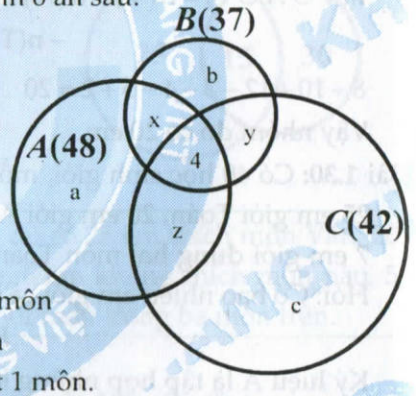
Gọi A, B, C lần lượt là tập hợp những học sinh xuất sắc về môn Toán, môn Vật Lý, môn Văn.

Gọi a, b, c lần lượt là số học sinh chỉ đạt danh hiệu xuất sắc một môn về môn Toán, môn Vật Lý, môn Văn.

Gọi x, y, z lần lượt là số học sinh đạt danh hiệu xuất sắc hai môn về môn Toán và môn Vật Lý, môn Vật Lý và môn Văn, môn Văn và môn Toán.

Dùng biểu đồ Ven đưa về hệ 6 phương trình 6 ẩn sau:

$$\begin{cases} a+x+z+4=48 \\ b+x+y+4=37 \\ c+y+z+4=42 \\ a+b+x+y+z=71 \\ a+c+x+y+z=72 \\ b+c+x+y+z=62 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=28 \\ b=18 \\ c=19 \\ x=6 \\ y=9 \\ z=10 \end{cases}$$



ĐS: a) 65 thí sinh đạt danh hiệu xuất sắc 1 môn

b) 25 thí sinh đạt danh hiệu xuất sắc 2 môn

c) 94 thí sinh đạt danh hiệu xuất sắc ít nhất 1 môn.

DẠNG TOÁN 3: *CHỨNG MINH TẬP HỢP BẰNG NHAU, TẬP HỢP CON.*

Phương pháp giải.

- Để chứng minh $A \subset B$

  Lấy $\forall x, x \in A$ ta đi chứng minh $x \in B$

- Để chứng minh $A = B$ ta đi chứng minh

  + $A \subset B$ và $B \subset A$ hoặc $\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B$

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho các tập hợp

$A = \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in Z\right\}$, $B = \left\{-\frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in Z\right\}$ và $C = \left\{-\frac{2\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in Z\right\}$

a) Chứng minh rằng $A = B$.

b) $A \subset C$

Lời giải

a) • Ta có $\forall x \in A \Rightarrow \exists k_0 \in Z : x = \frac{\pi}{3} + k_0\pi$ suy ra

$$x = \frac{\pi}{3} - \pi + (k_0+1)\pi = -\frac{2\pi}{3} + (k_0+1)\pi.$$

Vì $k_0 \in Z \Rightarrow k_0 + 1 \in Z$ do đó $x \in B$ suy ra $A \subset B$ (1).

• $\forall x \in B \Rightarrow \exists k_0 \in Z : x = -\frac{2\pi}{3} + k_0\pi$ suy ra

$$x = -\frac{2\pi}{3} + \pi + (k_0-1)\pi = \frac{\pi}{3} + (k_0-1)\pi.$$

Vì $k_0 \in Z \Rightarrow k_0 - 1 \in Z$ do đó $x \in A$ suy ra $B \subset A$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $A = B$.

b) Ta có $\forall x \in A \Rightarrow \exists k_0 \in Z : x = \frac{\pi}{3} + k_0\pi$ suy ra

$$x = \frac{\pi}{3} - \pi + \frac{2(k_0+1)\pi}{2} = -\frac{2\pi}{3} + \frac{2(k_0+1)\pi}{2}.$$

Vì $k_0 \in Z \Rightarrow 2(k_0+1) \in Z$ do đó $x \in C$

Suy ra $A \subset C$.

Ví dụ 2: Cho A và B là hai tập hợp. Chứng minh rằng

a) $(A \setminus B) \subset A$ b) $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$ c) $A \cup (B \setminus A) = A \cup B$

Lời giải

a) Ta có $\forall x, x \in A \setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases} \Rightarrow x \in A$

Suy ra $(A \setminus B) \subset A$

b) Ta có $x \in A \cap (B \setminus A) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in (B \setminus A) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \\ x \notin A \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing$

Suy ra $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$

c) Ta có $x \in A \cup (B \setminus A) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in (B \setminus A) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ \left\{\begin{array}{l} x \in B \\ x \notin A \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in A \cup B$

Ví dụ 3: Cho các tập hợp A, B và C. Chứng minh rằng

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Lời giải

a) Ta có $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \cup C \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in A \\ \left[\begin{array}{l} x \in B \\ x \in C \end{array}\right. \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \in A \\ x \in C \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \cap B \\ x \in A \cap C \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Suy ra $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

b) Ta có $x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \cap C \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ \left\{\begin{array}{l} x \in B \\ x \in C \end{array}\right. \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in C \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in A \cup B \\ x \in A \cup C \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Suy ra $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1.32: Cho các tập hợp

$$A = \left\{-\frac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in Z\right\},\ B = \left\{\frac{11\pi}{6} + k2\pi, k \in Z\right\} \text{ và } C = \left\{\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2},\ k \in Z\right\}$$

a) Chứng minh rằng $A = B$. b) $A \subset C$

Hướng dẫn giải

a) • Ta có $\forall x \in A \Rightarrow \exists k_0 \in Z : x = -\frac{\pi}{6} + k_0 2\pi$ suy ra

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi + (k_0 - 1)2\pi = \frac{11\pi}{6} + (k_0 - 1)2\pi.$$

Vì $k_0 \in Z \Rightarrow k_0 - 1 \in Z$ do đó $x \in B$ suy ra $A \subset B$ (1).

• $\forall x \in B \Rightarrow \exists k_0 \in Z : x = \frac{11\pi}{6} + k_0 2\pi$ suy ra

$$x = \frac{11\pi}{6} - 2\pi + (k_0 + 1)2\pi = -\frac{\pi}{6} + (k_0 + 1)2\pi.$$

Vì $k_0 \in Z \Rightarrow k_0 + 1 \in Z$ do đó $x \in A$ suy ra $B \subset A$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $A = B$.

b) Ta có $\forall x \in A \Rightarrow \exists k_0 \in Z : x = -\frac{\pi}{6} + k_0 2\pi$ suy ra

$$x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + k_0 2\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{(4k_0 - 1)\pi}{2}.$$

Vì $k_0 \in Z \Rightarrow 4k_0 - 1 \in Z$ do đó $x \in C$. Suy ra $A \subset C$.

Bài 1.33: Cho các tập hợp $A \subset B, C \subset D$. Chứng minh rằng

a) $A \cup C \subset B \cup D$ b) $A \cap C \subset B$ c) $C_B A \cup A = B$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\forall x, x \in A \cup C \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in C \end{array}\right.$

Với $x \in A$ vì $A \subset B \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \in B \cup D$. Suy ra $A \cup C \subset B \cup D$.

b) Ta có $\forall x, x \in A \cap C \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in A \\ x \in C \end{array}\right. \Rightarrow x \in A$

Vì $A \subset B \Rightarrow x \in B$. Suy ra $A \cap C \subset B$.

c) $\forall x, x \in C_B A \cup A \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in C_B A \\ x \in A \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \in B \\ x \notin A \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in B \\ x \in A \end{array}\right.$

Suy ra $C_B A \cup A = B$

Bài 1.34: Cho các tập hợp A, B và C. Chứng minh rằng

a) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\forall x, x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \setminus B \\ x \in B \setminus A \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \in A \\ x \notin B \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \in B \\ x \notin A \end{array}\right. \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \notin A \\ x \notin B \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \cup B \\ x \notin A \cap B \end{cases} \Leftrightarrow (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

Suy ra $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

b) $\forall x, x \in A \setminus (B \cap C) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \cap C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \left[\begin{array}{l} x \notin B \\ x \notin C \end{array}\right. \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \\ x \in A \\ x \notin C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \setminus B \\ x \in A \setminus C \end{cases} \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

c) $\forall x, x \in A \setminus (B \cup C) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \cup C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \\ x \notin C \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \\ x \in A \\ x \notin C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \setminus B \\ x \in A \setminus C \end{cases} \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

DẠNG TOÁN 4: *PHÉP TOÁN TRÊN TẬP CON CỦA TẬP SỐ THỰC.*

Phương pháp giải.

- Để tìm $A \cap B$ ta làm như sau
  - Sắp xếp theo thứ tự tăng dần các điểm đầu mút của các tập hợp A, B lên trục số
  - Biểu diễn các tập A, B trên trục số (phần nào không thuộc các tập đó thì gạch bỏ)
  - Phần không bị gạch bỏ chính là giao của hai tập hợp A, B
- Để tìm $A \cup B$ ta làm như sau
  - Sắp xếp theo thứ tự tăng dần các điểm đầu mút của các tập hợp A, B lên trục số
  - Tô đậm các tập A, B trên trục số
  - Phần tô đậm chính là hợp của hai tập hợp A, B

- Để tìm $A \setminus B$ ta làm như sau
  - Sắp xếp theo thứ tự tăng dần các điểm đầu mút của các tập hợp A, B lên trục số
  - Biểu diễn tập A trên trục số (gạch bỏ phần không thuộc tập A), gạch bỏ phần thuộc tập B trên trục số
  - Phần không bị gạch bỏ chính là $A \setminus B$.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho các tập hợp:

$A = \{x \in R \mid x < 3\}$ $B = \{x \in R \mid 1 < x \le 5\}$ $C = \{x \in R \mid -2 \le x \le 4\}$

a) Hãy viết lại các tập hợp A, B, C dưới kí hiệu khoảng, nửa khoảng, đoạn.

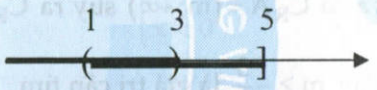
b) Tìm $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$.

c) Tìm $(B \cup C) \setminus (A \cap C)$

Lời giải

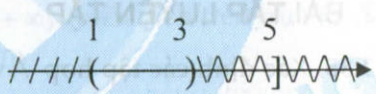
a) Ta có: $A = (-\infty; 3)$ $B = (1; 5]$ $C = [-2; 4]$.

b) • Biểu diễn trên trục số



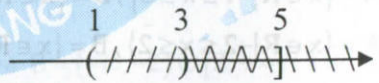
Suy ra $A \cup B = (-\infty; 5]$

• Biểu diễn trên trục số



Suy ra $A \cap B = (1; 3)$

• Biểu diễn trên trục số



Suy ra $A \setminus B = (-\infty; 1]$

c) Bằng cách biểu diễn trên trục số ta có: $A \cap C = [-2; 3)$ và $B \cup C = [-2; 5]$

Suy ra ta có $(B \cup C) \setminus (A \cap C) = [3; 5]$

Nhận xét: Việc biểu diễn trên trục số để tìm các phép toán tập hợp ta làm trên giấy nháp và trình bày kết quả vào.

Ví dụ 3: Cho các tập hợp $A = (-\infty; m)$ và $B = [3m - 1; 3m + 3]$. Tìm m để

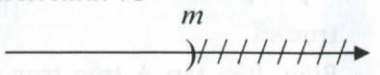
a) $A \cap B = \varnothing$ b) $B \subset A$

c) $A \subset C_{\mathbb{R}} B$ d) $C_{\mathbb{R}} A \cap B \neq \varnothing$

Công ty TNHH một thành viên dịch vụ văn hóa KHANG VIỆT
Nhà sách KHANG VIỆT

Lời giải

Ta có biểu diễn trên trục số các tập A và B trên hình vẽ

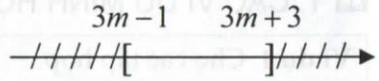


a) Ta có $A \cap B = \varnothing$

$\Leftrightarrow m \le 3m-1 \Leftrightarrow m \ge \frac{1}{2}$

Vậy $m \ge \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

b) Ta có $B \subset A \Leftrightarrow 3m+3 < m \Leftrightarrow m < -\frac{3}{2}$



Vậy $m < -\frac{3}{2}$ là giá trị cần tìm.

c) Ta có $C_{\mathbb{R}}B = (-\infty; 3m-1) \cup (3m+3; +\infty)$

Suy ra $A \subset C_{\mathbb{R}}B \Leftrightarrow m \le 3m-1 \Leftrightarrow m \ge \frac{1}{2}$

Vậy $m \ge \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

d) Ta có $C_{\mathbb{R}}A = [m; +\infty)$ suy ra $C_{\mathbb{R}}A \cap B \ne \varnothing \Leftrightarrow m \le 3m+3 \Leftrightarrow m \ge -\frac{3}{2}$

Vậy $m \ge -\frac{3}{2}$ là giá trị cần tìm.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1.35: Xác định các tập hợp $A \cup B, A \setminus C, A \cap B \cap C$ và biểu diễn trên trục số các tập hợp tìm được biết:

a) $A = \{x \in R | -1 \le x \le 3\}, B = \{x \in R | x \ge 1\}, C = (-\infty; 1)$

b) $A = \{x \in R | -2 \le x \le 2\}, B = \{x \in R | x \ge 3\}, C = (-\infty; 0)$

Hướng dẫn giải

a) Có $A = [-1; 3]$ và $B = [1; +\infty)$

$A \cup B = [-1; +\infty)$, $A \setminus C = [1; 3]$, $A \cap B \cap C = \phi$

b) Có $A = [-2; 2]$ và $B = [3; +\infty)$

$A \cup B = [-2; 2] \cup [3; +\infty)$, $A \setminus C = [0; 2]$, $A \cap B \cap C = \phi$

Bài 1.36: Cho hai tập hợp $A = [0; 4), B = \{x \in \mathbb{R} / |x| \le 2\}$.

Hãy xác định các tập hợp $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$

Hướng dẫn giải

$A = [0; 4), B = [-2; 2]$, $A \cup B = [-2; 4)$, $A \cap B = [0; 2]$, $A \setminus B = (2; 4)$

Bài 1.37: a) Cho $A = \{x \in R | -1 \le x < 5\}$, $B = \{x \in R | -2 < x < 0$ hoặc $1 < x \le 6\}$

$C = \{x \in R | x \ge 2\}$

Tìm $A \cap B, A \cup C, B \setminus C$ và biểu diễn cách lấy kết quả trên trục số

b) Cho $A = (-\infty, -2)$, $B = [2m+1, +\infty)$. Tìm m để $A \cup B = R$.

Hướng dẫn giải

a) $A \cap B = [-1; 0) \cup (1; 5)$ $A \cup C = [-1; +\infty)$ $B \setminus C = (-2; 0) \cup (1; 2)$

b) $A \cup B = R \Leftrightarrow 2m+1 < -2 \Leftrightarrow m < \frac{-3}{2}$

Bài 1.38: a) Tìm m để $(1; m] \cap (2; +\infty) \ne \varnothing$.

b) Viết tập A gồm các phần tử x thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x \le 3 \\ x+1 \ge 0 \\ x < 0 \end{cases}$ dưới dạng tập số.

Hướng dẫn giải

a) Để $(1; m] \cap (2; +\infty) \ne \varnothing$ thì $m < 2$.

b) Viết tập A gồm các phần tử x thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x \le 3 \\ x+1 \ge 0 \\ x < 0 \end{cases}$ dưới dạng tập số.

Có $\begin{cases} x \le 3 \\ x+1 \ge 0 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 3 \\ x \ge -1 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 3] \\ x \in [-1; +\infty) \\ x \in (-\infty; 0) \end{cases}$ (biểu diễn trên trục số)

$\Leftrightarrow x \in (-\infty; 3] \cap [-1; +\infty) \cap (-\infty; 0) \Leftrightarrow x \in [-1; 0)$.

Vậy $A = [-1; 0)$.

Bài 1.39: Cho tập hợp $A = \left[m-1; \frac{m+1}{2}\right]$ và $B = (-\infty; -2) \cup [2; +\infty)$. Tìm m để

a) $A \subset B$ b) $A \cap B = \varnothing$

Hướng dẫn giải

Điều kiện để tồn tại tập hợp A là $m - 1 < \frac{m+1}{2} \Leftrightarrow m < 3$ (*)

a) $A \subset B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A \subset (-\infty; -2) \\ A \subset [2; +\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{m+1}{2} < -2 \\ m-1 \ge 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -5 \\ m \ge 3 \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện (*) ta có $m < -5$ là giá trị cần tìm

b) $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le m-1 \\ \dfrac{m+1}{2} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge -1 \\ m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le m < 3$

Kết hợp với điều kiện (*) ta có $-1 \le m < 3$ là giá trị cần tìm

Bài 1.40: Cho hai tập khác rỗng : $A = (m-1;4]$, $B = (-2;2m+2)$, với $m \in \mathbb{R}$. Xác định m để :

a) $A \cap B \ne \varnothing$;

b) $A \subset B$;

c) $B \subset A$;

d) $(A \cap B) \subset (-1;3)$.

Hướng dẫn giải

Với $A = (m-1;4]$, $B = (-2;2m+2)$ khác tập rỗng, ta có điều kiện

$\begin{cases} m-1 < 4 \\ 2m+2 > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 5$ (*).

Với điều kiện (*), ta có :

a) $A \cap B \ne \varnothing \Leftrightarrow m-1 < 2m+2 \Leftrightarrow m > -3$. So sánh với (*) ta thấy các giá trị m thỏa mãn yêu cầu $A \cap B \ne \varnothing$ là $-2 < m < 5$.

b) $A \subset B \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \ge -2 \\ 2m+2 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge -1 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$. So sánh (*) ta thấy các giá trị m thỏa mãn yêu cầu $A \subset B$ là $1 < m < 5$.

c) $B \subset A \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \le -2 \\ 2m+2 \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le -1 \\ m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \le -1$. So sánh với (*) ta thấy các giá trị m thỏa mãn yêu cầu $B \subset A$ là $-2 < m \le -1$.

d) $(A \cap B) \subset (-1;3) \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \ge -1 \\ 2m+2 \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le m \le \dfrac{1}{2}$ (thỏa (*)).

§4. SỐ GẦN ĐÚNG. SAI SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Số gần đúng

Trong nhiều trường hợp ta không thể biết được giá trị đúng của đại lượng mà ta chỉ biết số gần đúng của nó.

Ví dụ: giá trị gần đúng của π là 3,14 hay 3,14159; còn đối với $\sqrt{2}$ là 1,41 hay 1,414;...

Như vậy có sự sai lệch giữa giá trị chính xác của một đại lượng và giá trị gần đúng của nó. Để đánh giá mức độ sai lệch đó, người ta đưa ra khái niệm sai số tuyệt đối.

2. Sai số tuyệt đối:

a) Sai số tuyệt đối của số gần đúng

Nếu a là số gần đúng của $\bar{a}$ thì $\Delta_a = |\bar{a} - a|$ được gọi là ***sai số tuyệt đối*** của số gần đúng a.

- **Độ chính xác của một số gần đúng**

Trong thực tế, nhiều khi ta không biết $\bar{a}$ nên ta không tính được Δ_a. Tuy nhiên ta có thể đánh giá Δ_a không vượt quá một số dương d nào đó.

Nếu $\Delta_a \le d$ thì $a - d \le \bar{a} \le a + d$, khi đó ta viết $\bar{a} = a \pm d$

d Gọi là ***độ chính xác của số gần đúng***.

b) Sai số tương đối

Sai số tương đối của số gần đúng a, kí hiệu là δ_a là tỉ số giữa sai số tuyệt đối và $|a|$, tức là $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|}$.

Nhận xét: Nếu $\bar{a} = a \pm d$ thì $\Delta_a \le d$ suy ra $\delta_a \le \dfrac{d}{|a|}$. Do đó $\dfrac{d}{|a|}$ ***càng nhỏ*** thì chất lượng của phép đo đạc hay tính toán ***càng cao***.

3. Quy tròn số gần đúng

- **Nguyên tắc quy tròn các số như sau:**

- Nếu chữ số **ngay sau hàng quy tròn** nhỏ hơn 5 thì ta chỉ việc thay chữ số đó và các chữ số bên phải nó bởi 0.
- Nếu chữ số **ngay sau hàng quy tròn** lớn hơn hay bằng 5 thì ta thay chữ số đó và các chữ số bên phải nó bởi 0 và cộng thêm một đơn vị vào số hàng làm tròn.

Nhận xét: Khi thay số đúng bởi số qui tròn đến một hàng nào đó thì sai số tuyệt đối của số qui tròn không vượt quá nửa đơn vị của hàng qui tròn. Như vậy, độ chính xác của số qui tròn bằng nửa đơn vị của hàng qui tròn.

***Chú ý*: Các viết số quy tròn của số gần đúng căn cứ vào độ chính xác cho trước:**

Cho số gần đúng a với độ chính xác d. Khi được yêu cầu quy tròn a mà không nói rõ quy tròn đến hàng nào thì ta quy tròn a đến hàng cao nhất mà d **nhỏ hơn một đơn vị** của hàng đó.

4. Chữ số chắc (đáng tin)

Cho số gần đúng a của số $\bar{a}$ với độ chính xác d. Trong số a, một chữ số được gọi là **chữ số chắc** (hay **đáng tin**) nếu d không vượt quá nửa đơn vị của hàng có chữ số đó.

Nhận xét: Tất cả các chữ số đứng bên trái chữ số chắc đều là chữ số chắc. Tất cả các chữ số đứng bên phải chữ số không chắc đều là chữ số không chắc.

5. Dạng chuẩn của số gần đúng

- Nếu số gần đúng là số thập phân không nguyên thì dạng chuẩn là dạng mà mọi chữ số của nó đều là chữ chắc chắn.

- Nếu số gần đúng là số nguyên thì dạng chuẩn của nó là $A.10^k$ trong đó **A là số nguyên**, k là hàng thấp nhất có chữ số chắc ($k \in N$). (suy ra mọi chữ số của A đều là chữ số chắc chắn)

  Khi đó độ chính xác $d = 0,5.10^k$.

6. *Kí hiệu khoa học của một số*

Mọi số thập phân khác 0 đều viết được dưới dạng $\alpha.10^n$, $1 \le |\alpha| < 10$, $n \in Z$ (Quy ước $10^{-n} = \frac{1}{10^n}$) dạng như vậy được gọi là ***kí hiệu khoa học*** của số đó.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: *TÍNH SAI SỐ TUYỆT ĐỐI, SAI SỐ TƯƠNG ĐỐI CỦA SỐ GẦN ĐÚNG. VIẾT SỐ QUY TRÒN.*

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Độ dài của cái cầu bến thủy hai (Nghệ An) người ta đo được là $996m \pm 0,5m$. Sai số tương đối tối đa trong phép đo là bao nhiêu.

Lời giải

Ta có độ dài gần đúng của cầu là $a = 996$ với độ chính xác $d = 0,5$

Vì sai số tuyệt đối $\Delta_a \le d = 0,5$ nên sai số tương đối

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \le \frac{d}{|a|} = \frac{0,5}{996} \approx 0,05\%$$

Vậy sai số tương đối tối đa trong phép đo trên là $0,05\%$.

Ví dụ 2: Hãy xác định sai số tuyệt đối của các số gần đúng a, b biết sai số tương đối của chúng.

a) $a = 123456$, $\delta_a = 0,2\%$ b) $a = 1,24358$, $\delta_a = 0,5\%$

Lời giải

Ta có $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \Leftrightarrow \Delta_a = |a|\delta_a$

a) Với $a = 123456$, $\delta_a = 0,2\%$ ta có sai số tuyệt đối là

$\Delta_a = 123456.0,2\% = 146,912$

b) Với $a = 1,24358$, $\delta_a = 0,5\%$ ta có sai số tuyệt đối là

$\Delta_a = 1,24358.0,5\% = 0,0062179$.

Ví dụ 3: Làm tròn các số sau với độ chính xác cho trước.

a) $a = 2,235$ với độ chính xác $d = 0,002$

b) $a = 23748023$ với độ chính xác $d = 101$

Lời giải

a) Ta có $0,001 < 0,002 < 0,01$ nên hàng cao nhất mà d nhỏ hơn một đơn vị của hàng đó là hàng phần trăm

Do đó ta phải quy tròn số $a = 2,235$ đến hàng phần trăm suy ra $\bar{a} \approx 2,24$.

b) Ta có $100 < 101 < 1000$ nên hàng cao nhất mà d nhỏ hơn một đơn vị của hàng đó là hàng nghìn

Do đó ta phải quy tròn số $a = 23748023$ đến hàng nghìn suy ra $\bar{a} \approx 23748000$

Ví dụ 4: a) Hãy viết giá trị gần đúng của $\sqrt{8}$ chính xác đến hàng phần trăm và hàng phần nghìn biết $\sqrt{8} = 2,8284....$ Ước lượng sai số tuyệt đối trong mỗi trường hợp.

b) Hãy viết giá trị gần đúng của $\sqrt[3]{2015^4}$ chính xác đến hàng chục và hàng trăm biết $\sqrt[3]{2015^4} = 25450,71...$. Ước lượng sai số tuyệt đối trong mỗi trường hợp.

Lời giải

a) Ta có $\sqrt{8} = 2,8284...$ do đó giá trị gần đúng của $\sqrt{8}$ đến hàng phần trăm là 2,83

Ta có $\left|\sqrt{8} - 2,83\right| = 2,83 - \sqrt{8} \le 2,83 - 2,8284 = 0,0016$

Suy ra sai số tuyệt đối của số gần đúng 2,83 không vượt quá 0,0016.

Giá trị gần đúng của $\sqrt{8}$ đến hàng phần nghìn là 2,828

Ta có $\left|\sqrt{8} - 2,828\right| = \sqrt{8} - 2,828 \le 2,8284 - 2,828 = 0,0004$

Suy ra sai số tuyệt đối của số gần đúng 2,828 không vượt quá 0,0004.

b) Sử dụng máy tính bỏ túi ta có $\sqrt[3]{2015^4} = 25450,71966...$

Do đó giá trị gần đúng của $\sqrt[3]{2015^4}$ đến hàng chục là 25450

Ta có $\left|\sqrt[3]{2015^4} - 25450\right| = \sqrt[3]{2015^4} - 25450 \le 25450,72 - 25450 = 0,72$

Suy ra sai số tuyệt đối của số gần đúng 25450 không vượt quá 0,72.

Giá trị gần đúng của $\sqrt[3]{2015^4}$ đến hàng trăm là 25500.

Ta có $\left|\sqrt[3]{2015^4} - 25500\right| = 25500 - \sqrt[3]{2015^4} \le 25500 - 25450,71 = 49,29$

Suy ra sai số tuyệt đối của số gần đúng 25500 không vượt quá 49,29.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1.41. Sử dụng máy tính bỏ túi, hãy viết giá trị gần đúng của mỗi số sau, chính xác đến hàng phần trăm và hàng phần nghìn :

a) $\sqrt{3}$; b) π^2.

Hướng dẫn giải

a) Sử dụng máy tính bỏ túi ta có $\sqrt{3} = 1,732050808...$ Do đó: Giá trị gần đúng của $\sqrt{3}$ chính xác đến hàng phần trăm là 1,73. Giá trị gần đúng của $\sqrt{3}$ chính xác đến hàng phần nghìn là 1,732.

b) Sử dụng máy tính bỏ túi ta có giá trị của π^2 là 9,8696044... Do đó : Giá trị gần đúng của π^2 chính xác đến hàng phần trăm là 9,87. Giá trị gần đúng của π^2 chính xác đến hàng phần nghìn là 9,870.

Bài 1.42: Hãy viết số quy tròn của số a với độ chính xác d được cho sau đây :

a) $\bar{a} = 17658 \pm 16$; b) $\bar{a} = 15,318 \pm 0,056$.

Hướng dẫn giải

a) Vì $10 < 16 < 100$ nên hàng cao nhất mà d nhỏ hơn một đơn vị của hàng đó là hàng trăm. Nên ta phải quy tròn số 17638 đến hàng trăm. Vậy số quy tròn là 17700 (hay viết $\bar{a} \approx 17700$).

b) Ta có $0,01 < 0,056 < 0,1$ nên hàng cao nhất mà d nhỏ hơn một đơn vị của hàng đó là hàng phần chục. Do đó phải quy tròn số 15,318 đến hàng phần chục. Vậy số quy tròn là 15,3 (hay viết $\bar{a} \approx 15,3$).

Bài 1.43: Cho số $x = \frac{2}{7}$. Cho các giá trị gần đúng của x là : 0,28 ; 0,29 ; 0,286.

Hãy xác định sai số tuyệt đối trong từng trường hợp và cho biết giá trị gần đúng nào là tốt nhất.

Hướng dẫn giải

Ta có các sai số tuyệt đối là :

$$\Delta_a = \left|\frac{2}{7} - 0,28\right| = \frac{1}{175} \; ; \; \Delta_b = \left|\frac{2}{7} - 0,29\right| = \frac{3}{700} ; \; \Delta_c = \left|\frac{2}{7} - 0,286\right| = \frac{1}{3500}.$$

Vì $\Delta_c < \Delta_b < \Delta_a$ nên c = 0,286 là số gần đúng tốt nhất.

Bài 1.44: Một miếng đất hình chữ nhật có chiều rộng $x = 43m \pm 0,5m$ và chiều dài $y = 63m \pm 0,5m$.

Chứng minh rằng chu vi P của miếng đất là $P = 212m \pm 2m$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $x = 43 + u$, $y = 63 + v$.

Ta có $P = 2x + 2y = 2(43 + 63) + 2u + 2v = 212 + 2(u + v)$.

Theo giả thiết $-0,5 \le u \le 0,5$ và $-0,5 \le v \le 0,5$ nên $-2 \le 2(u + v) \le 2$.

Do đó $P = 212m \pm 2m$.

DẠNG TOÁN 2: XÁC ĐỊNH CÁC CHỮ SỐ CHẮC CỦA MỘT SỐ GẦN ĐÚNG, DẠNG CHUẨN CỦA CHỮ SỐ GẦN ĐÚNG VÀ KÍ HIỆU KHOA HỌC CỦA MỘT SỐ.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Tìm số chắc và viết dạng chuẩn của số gần đúng a biết

a) Số người dân tỉnh Nghệ An là $a = 3214056$ người với độ chính xác $d = 100$ người.

b) $a = 1,3462$ sai số tương đối của a bằng 1%.

Lời giải

a) Vì $\frac{100}{2} = 50 < 100 < \frac{1000}{2} = 500$ nên chữ số hàng trăm(số 0) không là số chắc, còn chữ số hàng nghìn(số 4) là chữ số chắc.

Vậy chữ số chắc là 1,2,3,4.

Cách viết dưới dạng chuẩn là 3214.10^3.

b) Ta có $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \Rightarrow \Delta_a = \delta_a.|a| = 1\%.1,3462 = 0,013462$

Suy ra độ chính xác của số gần đúng a không vượt quá 0,013462 nên ta có thể xem độ chính xác là $d = 0,013462$.

Ta có $\frac{0,01}{2} = 0,005 < 0,013462 < \frac{0,1}{2} = 0,05$ nên chữ số hàng phần trăm(số 4) không là số chắc, còn chữ số hàng phần chục(số 3) là chữ số chắc.

Vậy chữ số chắc là 1 và 3.

Cách viết dưới dạng chuẩn là 1,3.

Ví dụ 2: Viết các số gần đúng sau dưới dạng chuẩn

a) $a = 467346 \pm 12$ b) $b = 2,4653245 \pm 0,006$

Lời giải

a) Ta có $\frac{10}{2} = 5 < 12 < \frac{100}{2} = 50$ nên chữ số hàng trăm trở đi là chữ số chắc do đó số gần đúng viết dưới dạng chuẩn là 4673.10^2.

b) Ta có $\frac{0,01}{2} = 0,005 < 0,006 < \frac{0,1}{2} = 0,05$ nên chữ số hàng phần chục trở đi là chữ số chữ số chắc do đó số gần đúng viết dưới dạng chuẩn là 2,5.

Ví dụ 3: Các nhà khoa học Mỹ đang nghiên cứu liệu một máy bay có thể có tốc độ gấp bảy lần tốc độ ánh sáng. Với máy bay đó trong một năm (giả sử một năm có 365 ngày) nó bay được bao nhiêu? Biết vận tốc ánh sáng là 300 nghìn km/s. Viết kết quả dưới dạng kí hiệu khoa học.

Lời giải

Ta có một năm có 365 ngày, một ngày có 24 giờ, một giờ có 60 phút và một phút có 60 giây

Vậy một năm có $24.365.60.60 = 31536000$ giây.

Vì vận tốc ánh sáng là 300 nghìn km/s nên trong vòng một năm nó đi được $31536000.300 = 9,4608.10^9$ km.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1.45: Số dân của một tỉnh là $A = 1034258 \pm 300$ (người). Hãy tìm các chữ số chắc và viết A dưới dạng chuẩn.

Hướng dẫn giải

Ta có : $\frac{100}{2} = 50 < 300 < 500 = \frac{1000}{2}$ nên các chữ số 8 (hàng đơn vị), 5 (hàng chục) và 2 (hàng trăm) đều là các chữ số không chắc.

Các chữ số còn lại 1, 0, 3, 4 là chữ số chắc.

Do đó cách viết chuẩn của số A là $A \approx 1034.10^3$ (người).

Bài 1.46: Đo chiều dài của một con dốc, ta được số đo a = 192,55 m , với sai số tương đối không vượt quá 0,2%. Hãy tìm các chữ số chắc của d và nêu cách viết chuẩn giá trị gần đúng của a .

Hướng dẫn giải

Ta có sai số tuyệt đối của số đo chiều dài con dốc là :

$\Delta_a = a.\delta_a \le 192,55.0,2\% = 0,3851$

Vì $0,05 < \Delta_a < 0,5$. Do đó chữ số chắc của d là 1, 9, 2.

Vậy cách viết chuẩn của a là 193 m (quy tròn đến hàng đơn vị).

Bài 1.47: Cho $3,141592 < \pi < 3,141593$. Hãy viết giá trị gần đúng của số π dưới dạng chuẩn và đánh giá sai số tuyệt đối của giá trị gần đúng này trong mỗi trường hợp sau :

a) Giá trị gần đúng của π có 5 chữ số chắc;

b) Giá trị gần đúng của π có 6 chữ số chắc;

c) Giá trị gần đúng của π có 3 chữ số chắc.

Hướng dẫn giải

a) Vì có 5 chữ số chắc nên số gần đúng của π được viết dưới dạng chuẩn là 3,1416 (hay $\pi \approx 3,1416$).

Sai số tuyệt đối của số gần đúng là $\Delta_\pi = |3,1416 - \pi| \le 0,000008$.

b) Vì có 6 chữ số chắc nên $\pi \approx 3,14159$ và sai số tuyệt đối của số gần đúng này là $\Delta_\pi = |3,14159 - \pi| \le 0,000003$.

c) Vì có 3 chữ số chắc nên $\pi \approx 3,14$ và $\Delta_\pi |3,14 - \pi| \le 0,001593$.

ÔN TẬP CHƯƠNG I

Bài 1.48: Cho Oxy, lập mệnh đề kéo theo và mệnh đề tương đương của hai mệnh đề sau đây và cho biết tính đúng, sai của chúng:

P : "Điểm M nằm trên phân giác của góc Oxy".

Q : "Điểm M cách đều hai cạnh Ox, Oy".

Hướng dẫn giải

$P \Rightarrow Q$: "Nếu điểm M nằm trên phân giác của góc Oxy thì M cách đều hai cạnh Ox, Oy ": đúng.

$Q \Rightarrow P$: "Nếu điểm M cách đều hai cạnh Ox, Oy thì M nằm trên phân giác của góc Oxy " : đúng.

$P \Leftrightarrow Q$: "Điểm M nằm trên phân giác của góc Oxy nếu và chỉ nếu (khi và chỉ khi) điểm M cách đều hai cạnh Ox, Oy" : đúng.

Hay : $P \Leftrightarrow Q$: "Điều kiện cần và đủ để điểm M nằm trên phân giác của góc Oxy là M cách đều hai cạnh Ox, Oy" : đúng.

Bài 1.49: Cho định lí : "Cho số tự nhiên n. Nếu n^5 chia hết cho 5 thì n chia hết cho 5". Định lí này được viết dưới dạng $P \Rightarrow Q$.

a) Hãy xác định các mệnh đề P và Q.

b) Phát biểu định lí trên bằng cách dùng thuật ngữ "điều kiện cần".

c) Phát biểu định lí trên bằng cách dùng thuật ngữ "điều kiện đủ".

d) Hãy phát biểu định lí đảo (nếu có) của định lí trên rồi dùng các thuật ngữ "điều kiện cần và đủ" phát biểu gộp cả hai định lí thuận và đảo.

Hướng dẫn giải

a) P : "n là số tự nhiên và n^5 chia hết cho 5", Q : "n chia hết cho 5".

b) Với n là số tự nhiên, n chia hết cho 5 là điều kiện cần để n^5 chia hết cho 5 ; hoặc phát biểu cách khác : Với n là số tự nhiên, điều kiện cần để n^5 chia hết cho 5 là n chia hết cho 5.

c) Với n là số tự nhiên, n^5 chia hết cho 5 là *điều kiện đủ* để n chia hết cho 5.

d) Định lí đảo : "Cho số tự nhiên n, nếu n chia hết cho 5 thì n^5 chia hết cho 5".

Thật vậy, nếu $n = 5k$ thì $n^5 = 5^5.k^5$: Số này chia hết cho 5.

Điều kiện cần và đủ để n chia hết cho 5 là n^5 chia hết cho 5.

Bài 1.50: Cho tập $X = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 \}$.

a) Hãy tìm tất cả các tập con của X có chứa các phần tử 1, 3, 5, 7.

b) Có bao nhiêu tập con của X chứa đúng 2 phần tử ?

Hướng dẫn giải

a) Các tập con của X chứa có các phần tử 1, 3, 5, 7 được thành lập bằng cách thêm vào tập $\{1 ; 3 ; 5 ; 7\}$ các phần tử còn lại của tập X.

Do đó tất cả các tập con của X có chứa các phần tử 1, 3, 5, 7 là : $\{1;3;5;7\}$, $\{1;3;5;7;2\}$, $\{1;3;5;7;4\}$, $\{1;3;5;7;6\}$, $\{1;3;5;7;2;4\}$, $\{1;3;5;7;2;6\}$, $\{1;3;5;7;4;6\}$ và X.

b) Giả sử tập cần tìm là { a ; b }với $a \neq b$.

- Vì X có 7 phần tử nên có 7 cách chọn phần tử a. Sau khi chọn a thì X còn 6 phần tử, do đó với mỗi cách chọn a, ta có 6 cách chọn phần tử b, như vậy có $7.6 = 42$ cặp (a ; b) theo cách chọn này.

  Nhưng với cách chọn trên thì với hai phần tử bất kì a, b ta đã chọn lặp lại hai lần, đó là hai cặp (a;b) và (b;a), nhưng chỉ có duy nhất tập $\{a;b\}$.

  Do đó, có $\frac{42}{2} = 21$ tập con của X chứa đúng hai phần tử.

Bài 1.51: Xét tính đúng sai của mệnh đề sau và nêu mệnh đề phủ định của nó.

a) $\exists x \in Q : 4x^2 - 1 = 0$;

b) $\exists x \in \mathbb{Z}, x^2 = 3$;

c) $\forall n \in N^* : 2^n + 3$ là một số nguyên tố ;

d) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 4x + 5 > 0$.

e) $\forall x \in \mathbb{R}, x^4 - x^2 + 2x + 2 \geq 0$

Hướng dẫn giải

a) Giải phương trình : $4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$. Vậy mệnh đề đã cho đúng.

Mệnh đề phủ định $\forall x \in Q : 4x^2 - 1 \neq 0$

b) Ta có $x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$. Vì $\pm\sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$ nên mệnh đề đã cho sai.

Mệnh đề phủ định $\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 \neq 3$

c) Với $n = 5$ thì $2^n + 3 = 35$, số này chia hết cho 5 (không nguyên tố). Do đó mệnh đề đã cho sai.

Mệnh đề phủ định "$\exists n \in N^* : 2^n + 3$ không phải là một số nguyên tố"

d) Mệnh đề đúng vì $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Mệnh đề phủ định $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 4x + 5 \leq 0$

e) $x^4 - x^2 + 2x + 2 = \left(x^2 - 1\right)^2 + (x+1)^2$ nên mệnh đề đã cho đúng

Mệnh đề phủ định $\exists x \in \mathbb{R}, x^4 - x^2 + 2x + 2 < 0$

Bài 1.52: Xét định lí : "Nếu x là số thực âm thì $x + \frac{1}{x} \leq -2$ ".

a) Viết định lí trên dưới dạng kí hiệu.

b) Định lí trên có định lí đảo không ? Giải thích.

c) Sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần" và "điều kiện đủ" để phát biểu định lí trên.

Hướng dẫn giải

a) $x \in \mathbb{R}, x < 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \leq -2$

b) Mệnh đề đảo là $x \in \mathbb{R}, x + \frac{1}{x} \leq -2 \Rightarrow x < 0$

Ta có $x + \frac{1}{x} + 2 = \frac{x^2 + 2x + 1}{x} = \frac{(x+1)^2}{x}$ do đó $x + \frac{1}{x} \leq -2 \Rightarrow x < 0$ là mệnh đề đúng

Vậy định lí trên có định lí đảo.

Bài 1.53: Chứng minh bằng phản chứng định lí sau:

Chứng minh rằng với $n \in N$, ta có: n : lẻ $\Leftrightarrow 3n + 1$: chẵn

Hướng dẫn giải

Thuận: Cho n : lẻ, thì $n = 2k + 1$ ($k \in N$)

$\Rightarrow 3n + 1 = 3(2k + 1) + 1 = 6k + 4 = 2(3k + 2)$, với $3k + 2 \in N$

$\Rightarrow 3n + 1$: chẵn

Đảo : Cho $3n + 1$: chẵn, ta chứng minh n : lẻ

Dùng phương pháp phản chứng:

Giả sử n : chẵn, tức là $n = 2k$ ($k \in N$)

$\Rightarrow 3n + 1 = 6k + 1 \Rightarrow 3n + 1$: lẻ: trái với giả thiết. Vậy $3n + 1$: lẻ.

Từ hai phần thuận và đảo ta được: n: lẻ $\Leftrightarrow 3n + 1$: chẵn

Bài 1.54: Cho các tập hợp:

$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x < 6\}$,

$B = \{x \in \mathbb{Q} \mid (1 - 3x)(x^4 - 3x^2 + 2) = 0\}$, $C = \{0;1;2;3;4;5;6\}$

a) Viết các tập hợp A, B dưới dạng liệt kê các phần tử, tập C dưới dạng chỉ rõ tính đặc trưng của phần tử.

b) Tìm $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $C_{B \cup A} A \cap B$.

c) Chứng minh rằng $A \cap (B \cup C) = A$.

Hướng dẫn giải

a) $A = \{-1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$, $B = \left\{-1; \frac{1}{3}; 1\right\}$ vì

$$(1 - 3x)(x^4 - 3x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{2} \notin Q \\ x = 1/3 \end{array}\right.$$

$C = \{x \in N \mid x \leq 6\}$

b) $A \cap B = \{-1;1\}$; $A \cup B = \{-1;0;\frac{1}{3};1;2;3;4;5\}$, $A \setminus B = \{0;2;3;4;5\}$,

$C_{B \cup A}(A \cap B) = \{0;1/3;2;3;4;5\}$

c) $B \cup C = \{-1;0;1/3;1;2;3;4;5;6\}$, $A \cap (B \cup C) = \{-1;0;1;2;3;4;5\} = A$

Bài 1.55: Tìm quan hệ bao hàm hay bằng nhau giữa các tập hợp sau đây:

a) $A=\{x\in\mathbb{N}\mid x<2\}$; $B=\{x\in\mathbb{Q}\mid (x^2-x)(x^2-2)=0\}$.

b) $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid 4x^2-9=0\}$; $B=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2+4x=0\}$.

c) $A=\{x\in\mathbb{N}\mid 1<x<4\}$; $B=\{x\in\mathbb{Z}\mid x^2-9=0\}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $A=\{x\in\mathbb{N}\mid x<2\}\Rightarrow A=\{0;1\}$. (1)

$B=\{x\in\mathbb{Q}\mid (x^2-x)(x^2-2)=0\}$.

$(x^2-x)(x^2-2)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x^2-x=0\\x^2-2=0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=0\vee x=1\\x=\pm\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}\end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=0\\x=1\end{bmatrix}\Rightarrow B=\{0;1\}$ (2)

Từ (1) và (2) cho: $A=B$.

b) Ta có: $4x^2-9=0\Leftrightarrow x=\pm\frac{3}{2}\notin\mathbb{Z}\Rightarrow A=\varnothing$ (3)

$x^2+4x=0\Leftrightarrow x=0\vee x=-4\Rightarrow B=\{0;-4\}$. (4)

Từ (3) và (4) cho: $A\subset B$.

c) Ta có: $A=\{x\in\mathbb{N}\mid 1<x<4\}\Rightarrow A=\{2;3\}$.

$B=\{x\in\mathbb{Z}\mid x^2-9=0\}\Rightarrow B=\{-3;3\}$.

Ta thấy: $2\in A$ mà $2\notin B$ nên $A\not\subset B$; $-3\in B$ mà $-3\notin A$ nên $B\not\subset A$.

Bài 1.56: Cho $A=\{0;2;4;6\}$, $B=\{4;5;6\}$.

a) Hãy xác định tất cả các tập con khác rỗng X, Y của A biết rằng $X\cup Y=A$ và $(A\cap B)\subset X$;

b) Hãy xác định tất cả các tập P biết rằng $(A\cap B)\subset P\subset(A\cup B)$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $A\cap B=\{4;6\}\subset X$.

Do đó các tập X, Y thỏa mãn yêu cầu là: $X=\{4;6\}$ và $Y=\{0;2\}$, $X=\{4;6;0\}$ và $Y=\{2\}$, $X=\{4;6;2\}$ và $Y=\{0\}$.

b) Ta có $A\cup B=\{0;2;4;6;5\}$, do đó các tập P thỏa mãn điều kiện $(A\cap B)\subset P\subset(A\cup B)$ là :

$\{4;6\}$, $\{4;6;0\}$, $\{4;6;2\}$, $\{4;6;5\}$, $\{4;6;0;2\}$, $\{4;6;2;5\}$, $\{4;6;5;0\}$ và $\{4;6;0;2;5\}$.

Bài 1.57: Cho ba tập hợp:

$A=\{x\in\mathbb{R}\mid -3\le x<1\}$; $B=\{x\in\mathbb{R}\mid -1\le x\le 5\}$; $C=\{x\in\mathbb{R}\mid |x|\ge 2\}$.

a) Xác định các tập hợp sau đây và viết kết quả dưới dạng khoảng, đoạn hay nửa khoảng: $A\cap B$, $A\cup B$, $(B\setminus A)\cap C$.

b) Chứng minh rằng: $C_{\mathbb{R}}(A\cup B)=(C_{\mathbb{R}}A)\cap(C_{\mathbb{R}}B)$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có : $A\cap B=[-3;1)\cap[-1;5]=[-1;1)$;

$A\cup B=[-3;1)\cup[-1;5]=[-3;5]$; $B\setminus A=[-1;5]\setminus[-3;1)=[1;5]$.

$C=\{x\in\mathbb{R}\mid |x|\ge 2\}=(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$; $(B\setminus A)\cap C=[2;5]$.

b) Ta có : $C_{\mathbb{R}}(A\cup B)=C_{\mathbb{R}}[-3;5]=(-\infty;-3)\cup(5;+\infty)$. (1)

$C_{\mathbb{R}}A=C_{\mathbb{R}}[-3;1)=(-\infty;-3)\cup[1;+\infty)$; $C_{\mathbb{R}}B=C_{\mathbb{R}}[-1;5]=(-\infty;-1)\cup(5;+\infty)$;

$(C_{\mathbb{R}}A)\cap(C_{\mathbb{R}}B)=(-\infty;-3)\cup(5;+\infty)$. (2)

(1) và (2) cho: $C_{\mathbb{R}}(A\cup B)=(C_{\mathbb{R}}A)\cap(C_{\mathbb{R}}B)$.

Bài 1.58: Cho hai tập hợp A, B bất kì.

Chứng minh rằng: $A\cup B=A\cap B\Leftrightarrow A=B$.

Hướng dẫn giải

- Thuận: $A\cup B=A\cap B$, ta chứng minh : $A=B$

$\forall x, x\in A\Rightarrow x\in A\cup B$ (vì $A\subset A\cup B$) $\Rightarrow x\in A\cap B$

(vì $A\cup B=A\cap B$) $\Rightarrow x\in B$ (vì $A\cap B\subset B$)

Như thế : $\forall x, x\in A\Rightarrow x\in B$, nên $A\subset B$ (a)

$\forall x, x\in B\Rightarrow x\in A\cup B$ (vì $B\subset A\cup B$) $\Rightarrow x\in A\cap B$

(vì $A\cup B=A\cap B$) $\Rightarrow x\in A$ (vì $A\cap B\subset A$)

Như thế : $\forall x, x\in B\Rightarrow x\in A$, nên $B\subset A$ (b)

Từ (a) và (b) cho $A=B$

- Đảo: Cho $A=B$, ta chứng minh : $A\cup B=A\cap B$

Ta có $A\cup B=A\cup A$ (vì $B=A$) $=A$ (c)

$A\cap B=A\cap A$ (vì $B=A$) $=A$ (d)

Từ (c) và (d) cho $A\cup B=A\cap B$.

Từ hai phần thuận và đảo ta được: $A\cup B=A\cap B\Leftrightarrow A=B$

Chương 2 HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ HÀM SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

- Cho $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \varnothing$. *Hàm số* f xác định trên D là một qui tắc đặt tương ứng mỗi số $x \in D$ với một và chỉ một số $y \in \mathbb{R}$.
- x được gọi là **biến số** (đối số), y được gọi là **giá trị** của hàm số f tại x. Kí hiệu: $y = f(x)$.
- D được gọi là ***tập xác định*** của hàm số f.

2. Cách cho hàm số

- Cho bằng bảng • Cho bằng biểu đồ • Cho bằng công thức $y = f(x)$.

Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

3. Đồ thị của hàm số

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D là tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ trên mặt phẳng toạ độ với mọi $x \in D$.

Chú ý: Ta thường gặp đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là một đường. Khi đó ta nói $y = f(x)$ là *phương trình* của đường đó.

4. Sự biến thiên của hàm số

Cho hàm số f xác định trên K.

- Hàm số $y = f(x)$ **đồng biến (tăng)** trên K nếu
$$\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$
- Hàm số $y = f(x)$ **nghịch biến (giảm)** trên K nếu
$$\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

5. Tính chẵn lẻ của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D.

- Hàm số f được gọi là **hàm số chẵn** nếu với $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$
- Hàm số f được gọi là **hàm số lẻ** nếu với $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$

Chú ý: *+ Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.*
+ Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng.

6: Tịnh tiến đồ thị song song với trục tọa độ

Định lý: Cho (G) là đồ thị của $y = f(x)$ và $p > 0, q > 0$; ta có

Tịnh tiến (G) lên trên q đơn vị thì được đồ thị $y = f(x) + q$

Tịnh tiến (G) xuống dưới q đơn vị thì được đồ thị $y = f(x) - q$

Tịnh tiến (G) sang trái p đơn vị thì được đồ thị $y = f(x + p)$

Tịnh tiến (G) sang phải p đơn vị thì được đồ thị $y = f(x - p)$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: *TÌM TẬP XÁC ĐỊNH CỦA PHƯƠNG TRÌNH.*

Phương pháp giải.

Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập các giá trị của x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa

Chú ý: Nếu $P(x)$ là một đa thức thì:

* $\dfrac{1}{P(x)}$ có nghĩa $\Leftrightarrow P(x) \neq 0$
* $\sqrt{P(x)}$ có nghĩa $\Leftrightarrow P(x) \geq 0$
* $\dfrac{1}{\sqrt{P(x)}}$ có nghĩa $\Leftrightarrow P(x) > 0$

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y = \dfrac{2x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 - 5x - 2}$ b) $y = \dfrac{x}{(x^2 - 1)^2 - 2x^2}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x^3 + x^2 - 5x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ x \neq \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Suy ra tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{2; \dfrac{-3 - \sqrt{5}}{2}; \dfrac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right\}$.

b) ĐKXĐ: $(x^2 - 1)^2 - 2x^2 \neq 0 \Leftrightarrow (x^2 - \sqrt{2}x - 1)(x^2 + \sqrt{2}x - 1) \neq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \sqrt{2}x - 1 \neq 0 \\ x^2 + \sqrt{2}x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{2} \\ x \neq \dfrac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

Suy ra tập xác định của hàm số là

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}; \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}; \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}\right\}.$$

Ví dụ 2: Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y=\dfrac{\sqrt{5-3|x|}}{x^2+4x+3}$ b) $y=\dfrac{x+4}{\sqrt{x^2-16}}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $\begin{cases}5-3|x|\ge 0\\ x^2+4x+3\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x|\le\dfrac{5}{3}\\ \begin{cases}x\ne -1\\ x\ne -3\end{cases}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{5}{3}\le x\le\dfrac{5}{3}\\ x\ne -1\\ x\ne -3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{5}{3}\le x\le\dfrac{5}{3}\\ x\ne -1\end{cases}$

Suy ra tập xác định của hàm số là $D=\left[-\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{3}\right]\setminus\{-1\}$.

b) ĐKXĐ: $x^2-16>0\Leftrightarrow|x|>4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>4\\ x<-4\end{array}\right.$

Suy ra tập xác định của hàm số là $D=(-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$.

Ví dụ 3: Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x^2+2x+3}$ b) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{khi } x\ge 1\\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x<1\end{cases}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x^2+2x+3\ne 0$ đúng với mọi x

Suy ra tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

b) Khi $x\ge 1$ thì hàm số là $y=\dfrac{1}{x}$ luôn xác định với $x\ge 1$.

Khi $x<1$ thì hàm số là $y=\sqrt{x+1}$ xác định khi

$\begin{cases}x<1\\ x+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<1\\ x\ge -1\end{cases}\Leftrightarrow -1\le x<1$

Do đó hàm số đã cho xác định khi $x\ge -1$

Suy ra tập xác định của hàm số là $D=[-1;+\infty)$.

Ví dụ 4: Cho hàm số: $y=\dfrac{mx}{\sqrt{x-m+2}-1}$ với m là tham số

a) Tìm tập xác định của hàm số theo tham số m

b) Tìm m để hàm số xác định trên $(0;1)$

Lời giải

a) ĐKXĐ $\begin{cases}x-m+2\ge 0\\ \sqrt{x-m+2}\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge m-2\\ x\ne m-1\end{cases}$

Suy ra tập xác định của hàm số là $D=[m-2;+\infty)\setminus\{m-1\}$.

b) Hàm số xác định trên $(0;1)\Leftrightarrow(0;1)\subset[m-2;m-1)\cup(m-1;+\infty)$

$\left[\begin{array}{l}(0;1)\subset[m-2;m-1)\\ (0;1)\subset(m-1;+\infty)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\ m-1\le 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\ m\le 1\end{array}\right.$

Vậy $m\in(-\infty;1]\cup\{2\}$ là giá trị cần tìm.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 2.0. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{2\sqrt{x-1}}{|x|-2}$. b) $y=\sqrt{x+2}-\dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$.

c) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{x^2+x+1}$. d) $y=x+\sqrt{x^2-4x+4}$.

e) $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-x-6}$.

Hướng dẫn giải

a) ĐKXĐ: $\begin{cases}x\ge 1\\ |x|\ne 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ x\ne\pm 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ x\ne 2\end{cases}\Rightarrow$ TXĐ: $D=[1;+\infty)\setminus\{2\}$

b) ĐKXĐ: $\begin{cases}x+2\ge 0\\ x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ x>1\end{cases}\Leftrightarrow x>1\Rightarrow$ TXĐ: $D=(1;+\infty)$

c) ĐKXĐ: $x^2+x+1\ne 0\Leftrightarrow\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\ne 0$ (đúng $\forall x$) $\Rightarrow$ TXĐ: $D=\mathbb{R}$

d) ĐKXĐ: $x^2-4x+4\ge 0\Leftrightarrow(x-2)^2\ge 0$ (đúng $\forall x$) $\Rightarrow$ TXĐ: $D=\mathbb{R}$

e) ĐKXĐ: $\begin{cases}x+1\ge 0\\ x^2-x-6\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ x\ne -2\\ x\ne 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ x\ne 3\end{cases}\Rightarrow$ TXĐ: $D=[-1;+\infty)\setminus\{3\}$.

Bài 2.1: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x-3\sqrt{x}+2}$ b) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sqrt{1+4x}}}$

Hướng dẫn giải

a) ĐKXĐ: $\begin{cases}x^2-2x+3\ge 0\\ x-3\sqrt{x}+2\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2+2\ge 0\\ \left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne 1\\ x\ne 4\end{cases}$

Suy ra $D=\mathbb{R}\setminus\{1;4\}$

b) ĐKXĐ: $\begin{cases}1-\sqrt{1+4x}>0\\ 1+4x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1>1+4x\\ x\ge -\dfrac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow -\dfrac{1}{4}\le x<0\Rightarrow D=\left[-\dfrac{1}{4};0\right)$

Bài 2.2: Tìm giá trị của tham số m để:

a) Hàm số $y=\dfrac{x+2m+2}{x-m}$ xác định trên $(-1;0)$

b) Hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-m}+1}$ có tập xác định là $[0;+\infty)$

Hướng dẫn giải

a) ĐKXĐ: $x\neq m$

Hàm số xác định trên $(-1;0)\Leftrightarrow m\notin(-1;0)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\geq 0\\ m\leq -1\end{array}\right.$

b) ĐKXĐ: $\left\{\begin{array}{l}x\geq 0\\ x\geq m\end{array}\right.$ (*)

Nếu $m>0$ thì (*) $\Leftrightarrow x\geq m\Rightarrow D=[m;+\infty)$ nên $m>0$ không thỏa mãn

Nếu $m\leq 0$ thì (*) $\Leftrightarrow x\geq 0\Rightarrow D=[0;+\infty)$

Vậy $m\leq 0$ là giá trị cần tìm.

Bài 2.3: Tìm giá trị của tham số m để:

a) Hàm số $y=\sqrt{x-m+1}+\dfrac{2x}{\sqrt{-x+2m}}$ xác định trên $(-1;3)$.

b) Hàm số $y=\sqrt{x+m}+\sqrt{2x-m+1}$ xác định trên $(0;+\infty)$.

c) Hàm số $y=\sqrt{-x-2m+6}-\dfrac{1}{\sqrt{x+m}}$ xác định trên $(-1;0)$.

Hướng dẫn giải

a) $m\geq 2$, b) $m\in[0;1]$ c) $m\in[1;3]$

DẠNG TOÁN 2: *XÉT TÍNH CHẴN, LẺ CỦA HÀM SỐ*

Phương pháp giải.

* **Sử dụng định nghĩa**

Hàm số $y=f(x)$ xác định trên D:

- Hàm số chẵn $\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\forall x\in D\Rightarrow -x\in D\\ f(-x)=f(x)\end{array}\right.$
- Hàm số lẻ $\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\forall x\in D\Rightarrow -x\in D\\ f(-x)=-f(x)\end{array}\right.$

Chú ý : Một hàm số có thể không chẵn cũng không lẻ

Đồ thị hàm số chẵn nhận trục Oy làm trục đối xứng

Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng

* **Quy trình xét hàm số chẵn, lẻ.**

B1: Tìm tập xác định của hàm số.

B2: Kiểm tra

Nếu $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$ Chuyển qua bước ba

Nếu $\exists x_0\in D\Rightarrow -x_0\notin D$ kết luận hàm không chẵn cũng không lẻ.

B3: xác định $f(-x)$ và so sánh với $f(x)$.

Nếu bằng nhau thì kết luận hàm số là chẵn

Nếu đối nhau thì kết luận hàm số là lẻ

Nếu tồn tại một giá trị $\exists x_0\in D$ mà $f(-x_0)\neq f(x_0)$, $f(-x_0)\neq -f(x_0)$ kết luận hàm số không chẵn cũng không lẻ.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $f(x)=3x^3+2\sqrt[3]{x}$ b) $f(x)=x^4+\sqrt{x^2+1}$

Lời giải

a) Ta có TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có $-x\in\mathbb{R}$ và $f(-x)=3(-x)^3+2\sqrt[3]{-x}=-\left(3x^3+2\sqrt[3]{x}\right)=-f(x)$

Do đó $f(x)=3x^3+2\sqrt[3]{x}$ là hàm số lẻ

b) Ta có TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có $-x\in\mathbb{R}$ và $f(-x)=(-x)^4+\sqrt{(-x)^2+1}=x^4+\sqrt{x^2+1}=f(x)$

Do đó $f(x)=x^4+\sqrt{x^2+1}$ là hàm số chẵn

Ví dụ 2: Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}-x}-2x^2-1$ b) $f(x)=\left\{\begin{array}{l}-1 \text{ Khi } x<0\\ 0 \text{ Khi } x=0\\ 1 \text{ Khi } x>0\end{array}\right.$

Lời giải

a) Ta có $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\geq x\Rightarrow\sqrt{x^2+1}-x\neq 0$ với mọi x.

Suy ra TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Mặt khác $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\geq -x\Rightarrow\sqrt{x^2+1}+x\neq 0$ do đó

$$f(x)=\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}-2x^2-1=2x\sqrt{x^2+1}$$

Với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có $-x\in\mathbb{R}$ và $f(-x)=2(-x)\sqrt{(-x)^2+1}=-2x\sqrt{x^2+1}=-f(x)$

Do đó $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}-x}-2x^2-1$ là hàm số lẻ.

b) Ta có TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Dễ thấy mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có $-x\in\mathbb{R}$

Với mọi $x>0$ ta có $-x<0$ suy ra $f(-x)=-1, f(x)=1\Rightarrow f(-x)=-f(x)$

Với mọi $x<0$ ta có $-x>0$ suy ra $f(-x)=1, f(x)=-1\Rightarrow f(-x)=-f(x)$

Và $f(-0)=-f(0)=0$

Do đó với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có $f(-x)=-f(x)$

Vậy hàm số $f(x)=\begin{cases}-1 & \text{Khi } x<0\\ 0 & \text{Khi } x=0\\ 1 & \text{Khi } x>0\end{cases}$ là hàm số lẻ.

Ví dụ 3: Tìm m để hàm số: $f(x)=\dfrac{x^2\left(x^2-2\right)+\left(2m^2-2\right)x}{\sqrt{x^2+1}-m}$ là hàm số chẵn.

Lời giải

ĐKXĐ: $\sqrt{x^2+1}\neq m$ (*)

Giả sử hàm số chẵn suy ra $f(-x)=f(x)$ với mọi x thỏa mãn điều kiện (*)

Ta có $f(-x)=\dfrac{x^2\left(x^2-2\right)-\left(2m^2-2\right)x}{\sqrt{x^2+1}-m}$

Suy ra $f(-x)=f(x)$ với mọi x thỏa mãn điều kiện (*)

$\Leftrightarrow\dfrac{x^2\left(x^2-2\right)-\left(2m^2-2\right)x}{\sqrt{x^2+1}-m}=\dfrac{x^2\left(x^2-2\right)+\left(2m^2-2\right)x}{\sqrt{x^2+1}-m}$ với mọi x thỏa mãn điều kiện (*)

$\Leftrightarrow 2\left(2m^2-2\right)x=0$ với mọi x thỏa mãn điều kiện (*)

$\Leftrightarrow 2m^2-2=0\Leftrightarrow m=\pm1$

* Với $m=1$ ta có hàm số là $f(x)=\dfrac{x^2\left(x^2-2\right)}{\sqrt{x^2+1}-1}$

ĐKXĐ: $\sqrt{x^2+1}\neq1\Leftrightarrow x\neq0$

Suy ra TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Dễ thấy với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ta có $-x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và $f(-x)=f(x)$

Do đó $f(x)=\dfrac{x^2\left(x^2-2\right)}{\sqrt{x^2+1}-1}$ là hàm số chẵn

* Với $m=-1$ ta có hàm số là $f(x)=\dfrac{x^2\left(x^2-2\right)}{\sqrt{x^2+1}+1}$

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Dễ thấy với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có $-x\in\mathbb{R}$ và $f(-x)=f(x)$

Do đó $f(x)=\dfrac{x^2\left(x^2-2\right)}{\sqrt{x^2+1}+1}$ là hàm số chẵn.

Vậy $m=\pm1$ là giá trị cần tìm.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 2.4:: Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}$

b) $f(x)=\dfrac{x-5}{x-1}$

c) $f(x)=3x^2-2x+1$

d) $f(x)=\dfrac{x^3}{|x|-1}$

e) $f(x)=\dfrac{|x-1|+|x+1|}{|2x-1|+|2x+1|}$

f) $f(x)=\dfrac{|x+2|+|x-2|}{|x-1|-|x+1|}$

Hướng dẫn giải

a) TXĐ: $D=[-1;1]$ nên $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

$f(-x)=\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}=-f(x),\ \forall x\in D$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

b) TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Ta có $x=-1\in D$ nhưng $-x=1\notin D$

Do đó hàm số không chẵn và không lẻ

c) TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có $f(1)=2, f(-1)=6$

Suy ra $f(-1)\neq f(1), f(-1)\neq -f(1)$

Do đó hàm số không chẵn và không lẻ.

d) TXĐ: $D=(-\infty-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$ nên $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

$f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{|-x|-1}=-\dfrac{x^3}{|x|-1}=-f(x),\ \forall x\in D$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

e) TXĐ: $D=\mathbb{R}\Rightarrow\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$.

$f(-x)=\dfrac{|-x-1|+|-x+1|}{|-2x-1|+|-2x+1|}=f(x),\ \forall x\in D$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

f) ĐKXĐ: $|x-1| \neq |x+1| \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \neq x+1 \\ x-1 \neq -(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 0$

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow \forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

$f(-x) = \dfrac{|-x+2|+|-x-2|}{|-x-1|-|-x+1|} = -f(x),\ \forall x \in D$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Bài 2.5: Cho hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ có cùng tập xác định D. Chứng minh rằng

a) Nếu hai hàm số trên lẻ thì hàm số $y = f(x) + g(x)$ là hàm số lẻ

b) Nếu hai hàm số trên một chẵn một lẻ thì hàm số $y = f(x)g(x)$ là hàm số lẻ

Hướng dẫn giải

a) Ta có hàm số $y = f(x) + g(x)$ có tập xác định D.

Do hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ lẻ nên $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

và $f(-x) = -f(x)$, $g(-x) = -g(x)$

suy ra $y(-x) = f(-x) + g(-x) = -[f(x) + g(x)] = -y(x)$

Suy ra hàm số $y = f(x) + g(x)$ là hàm số lẻ.

b) Giả sử hàm số $y = f(x)$ chẵn, $y = g(x)$ lẻ

Khi đó hàm số $y = f(x)g(x)$ có tập xác định là D nên $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có $y(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)[-g(x)] = -f(x)g(x) = -y(x)$

Do đó hàm số $y = f(x)g(x)$ lẻ.

Bài 2.6: a) Tìm m để đồ thị hàm số sau nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng

$y = x^3 - (m^2 - 9)x^2 + (m+3)x + m - 3$.

b) Tìm m để đồ thị hàm số sau nhận trục tung làm trục đối xứng

$y = x^4 - (m^2 - 3m + 2)x^3 + m^2 - 1$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có TXĐ: $D = \mathbb{R} \Rightarrow \forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Đồ thị hàm số đã cho nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng khi và chỉ khi nó là hàm số lẻ

$\Leftrightarrow f(-x) = -f(x),\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (-x)^3 - (m^2-9)(-x)^2 + (m+3)(-x) + m - 3$

$= -\left[x^3 - (m^2-9)x^2 + (m+3)x + m - 3\right],\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 2(m^2-9)x^2 - 2(m-3) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 9 = 0 \\ m - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$

b) Ta có TXĐ: $D = \mathbb{R} \Rightarrow \forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Đồ thị hàm số đã cho nhận trục tung làm trục đối xứng khi và chỉ khi nó là hàm số chẵn

$\Leftrightarrow f(-x) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (-x)^4 - (m^2-3m+2)(-x)^3 + m^2 - 1 = x^4 - (m^2-3m+2)x^3 + m^2 - 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 2(m^2-3m+2)x^3 = 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 2 \end{array}\right.$

DẠNG TOÁN 3: *XÉT TÍNH ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN(ĐƠN ĐIỆU) CỦA HÀM SỐ TRÊN MỘT KHOẢNG*

Phương pháp giải.

C1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K.

Lấy $x_1, x_2 \in K;\ x_1 < x_2$, đặt $T = f(x_2) - f(x_1)$

- Hàm số đồng biến trên $K \Leftrightarrow T > 0$.
- Hàm số nghịch biến trên $K \Leftrightarrow T < 0$.

C2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K.

Lấy $x_1, x_2 \in K;\ x_1 \neq x_2$, đặt $T = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

- Hàm số đồng biến trên $K \Leftrightarrow T > 0$.
- Hàm số nghịch biến trên $K \Leftrightarrow T < 0$.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Xét sự biến thiên của hàm số sau trên khoảng $(1;+\infty)$

a) $y = \dfrac{3}{x-1}$ b) $y = x + \dfrac{1}{x}$

Lời Giải

a) Với mọi $x_1, x_2 \in (1;+\infty),\ x_1 \neq x_2$ ta có

$f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{3}{x_2 - 1} - \dfrac{3}{x_1 - 1} = \dfrac{3(x_1 - x_2)}{(x_2-1)(x_1-1)}$

Suy ra $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = -\dfrac{3}{(x_2-1)(x_1-1)}$

Vì $x_1 > 1,\ x_2 > 1 \Rightarrow \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$ nên hàm số $y = \dfrac{3}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

b) Với mọi $x_1, x_2 \in (1;+\infty),\ x_1 \neq x_2$ ta có

$f(x_2) - f(x_1) = \left(x_2 + \dfrac{1}{x_2}\right) - \left(x_1 + \dfrac{1}{x_1}\right) = (x_2 - x_1)\left(1 - \dfrac{1}{x_1 x_2}\right)$

Suy ra $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=1-\frac{1}{x_1x_2}$

Vì $x_1>1, x_2>1\Rightarrow\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$ nên hàm số $y=x+\frac{1}{x}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y=x^2-4$

a) Xét chiều biến thiên cuả hàm số trên $(-\infty;0)$ và trên $(0;+\infty)$

b) Lập bảng biến thiên của hàm số trên $[-1;3]$ từ đó xác định giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số trên $[-1;3]$.

Lời Giải

TXĐ: $D=R$

a) $\forall x_1,x_2\in\mathbb{R}, x_1<x_2\Rightarrow x_2-x_1>0$

Ta có $T=f(x_2)-f(x_1)=(x_2^2-4)-(x_1^2-4)=x_2^2-x_1^2=(x_2-x_1).(x_1+x_2)$

Nếu $x_1,x_2\in(-\infty;0)\Rightarrow T<0$. Vậy hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;0)$

Nếu $x_1,x_2\in(0;+\infty)\Rightarrow T>0$. Vậy hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

b) Bảng biến thiên của hàm số $y=x^2-4$ trên $[-1;3]$

x	-1		0		3
$y=x^2-4$	-3	↘	-4	↗	5

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$\max\limits_{[-1;3]}y=5$ khi và chỉ khi $x=3$, $\min\limits_{[-1;3]}y=-4$ khi và chỉ khi $x=0$.

Ví dụ 3: Xét sự biến thiên của hàm số $y=\sqrt{4x+5}+\sqrt{x-1}$ trên tập xác định của nó.

Áp dụng giải phương trình

a) $\sqrt{4x+5}+\sqrt{x-1}=3$ b) $\sqrt{4x+5}+\sqrt{x-1}=\sqrt{4x^2+9}+x$

Lời Giải

* ĐKXĐ: $\begin{cases}4x+5\ge0\\x-1\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-\frac{5}{4}\\x\ge1\end{cases}\Leftrightarrow x\ge1$

Suy ra TXĐ: $D=[1;+\infty)$

Với mọi $x_1,x_2\in[1;+\infty), x_1\ne x_2$ ta có

$$f(x_2)-f(x_1)=\sqrt{4x_2+5}+\sqrt{x_2-1}-\sqrt{4x_1+5}-\sqrt{x_1-1}$$
$$=\frac{4(x_2-x_1)}{\sqrt{4x_2+5}+\sqrt{4x_1+5}}+\frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_2-1}+\sqrt{x_1-1}}$$
$$=(x_2-x_1)\left(\frac{4}{\sqrt{4x_2+5}+\sqrt{4x_1+5}}+\frac{1}{\sqrt{x_2-1}+\sqrt{x_1-1}}\right)$$

Suy ra $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{4}{\sqrt{4x_2+5}+\sqrt{4x_1+5}}+\frac{1}{\sqrt{x_2-1}+\sqrt{x_1-1}}>0$

Nên hàm số $y=\sqrt{4x+5}+\sqrt{x-1}$ đồng biến trên khoảng $[1;+\infty)$.

a) Vì hàm số đã cho đồng biến trên $[1;+\infty)$ nên

Nếu $x>1\Rightarrow f(x)>f(1)$ hay $\sqrt{4x+5}+\sqrt{x-1}>3$

Suy ra phương trình $\sqrt{4x+5}+\sqrt{x-1}=3$ vô nghiệm

Nếu $x<1\Rightarrow f(x)<f(1)$ hay $\sqrt{4x+5}+\sqrt{x-1}<3$

Suy ra phương trình $\sqrt{4x+5}+\sqrt{x-1}=3$ vô nghiệm

Với $x=1$ dễ thấy nó là nghiệm của phương trình đã cho

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

b) ĐKXĐ: $x\ge1$.

Đặt $x^2+1=t, t\ge1\Rightarrow x^2=t-1$ phương trình trở thành

$\sqrt{4x+5}+\sqrt{x-1}=\sqrt{4t+5}+\sqrt{t-1}\Leftrightarrow f(x)=f(t)$

Nếu $x>t\Rightarrow f(x)>f(t)$ hay $\sqrt{4x+5}+\sqrt{x-1}>\sqrt{4t+5}+\sqrt{t-1}$

Suy ra phương trình đã cho vô nghiệm

Nếu $x<t\Rightarrow f(x)<f(t)$ hay $\sqrt{4x+5}+\sqrt{x-1}<\sqrt{4t+5}+\sqrt{t-1}$

Suy ra phương trình đã cho vô nghiệm

Vậy $f(x)=f(t)\Leftrightarrow x=t$ hay $x^2+1=x\Leftrightarrow x^2-x+1=0$ (vô nghiệm)

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Nhận xét:

- Hàm số $y=f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) thì phương trình $f(x)=0$ có tối đa một nghiệm.
- Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến (nghịch biến) trên D thì $f(x)>f(y)\Leftrightarrow x>y$ $(x<y)$ và $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y\ \forall x,y\in D$. Tính chất này được sử dụng nhiều trong các bài toán đại số như giải phương trình , bất phương trình , hệ phương trình và các bài toán cực trị.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 2.7: Xét sự biến thiên của các hàm số sau:

a) $y = x^2 + 4x - 5$ trên $(-\infty; -2)$ và trên $(-2; +\infty)$

b) $y = \dfrac{2}{x-2}$ trên $(-\infty; 2)$ và trên $(2; +\infty)$

c) $y = \dfrac{x}{x-1}$ trên $(-\infty; 1)$

Hướng dẫn giải

a) Với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$ ta có

$$K = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\left(x_2^2 + 4x_2 - 5\right) - \left(x_1^2 + 4x_1 - 5\right)}{x_2 - x_1} = x_1 + x_2 + 4$$

$x_1, x_2 \in (-\infty; -2) \Rightarrow K < 0$ suy ra hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -2)$

$x_1, x_2 \in (-2; +\infty) \Rightarrow K > 0$ suy ra hàm số đồng biến trên $(-2; +\infty)$

b) Với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$ ta có

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{2}{x_2 - 2} - \frac{2}{x_1 - 2} = \frac{2(x_1 - x_2)}{(x_2 - 2)(x_1 - 2)} \Rightarrow K = -\frac{2}{(x_2 - 2)(x_1 - 2)}$$

Với $x_1, x_2 \in (-\infty; 2) \Rightarrow K < 0$ do đó hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 2)$

Với $x_1, x_2 \in (2; +\infty) \Rightarrow K < 0$ do đó hàm số nghịch biến trên $(2; +\infty)$

c) Với mọi $x_1, x_2 \in (-\infty; 1)$, $x_1 \neq x_2$ ta có

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2}{x_2 - 1} - \frac{x_1}{x_1 - 1} = \frac{x_1 - x_2}{(x_2 - 1)(x_1 - 1)}$$

Suy ra $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{-1}{(x_2 - 1)(x_1 - 1)} < 0$

Vậy hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$.

Bài 2.8: Chứng minh rằng hàm số $y = x^3 + x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Áp dụng giải phương trình sau $x^3 - x = \sqrt[3]{2x+1} + 1$

Hướng dẫn giải

- Với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$ ta có

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\left(x_2^3 + x_2\right) - \left(x_1^3 + x_1\right)}{x_2 - x_1} = x_2^2 + x_1^2 + x_2 x_1 + 1 > 0$$

Suy ra hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$

- Ta có $x^3 - x = \sqrt[3]{2x+1} + 1 \Leftrightarrow x^3 + x = 2x + 1 + \sqrt[3]{2x+1}$

Đặt $\sqrt[3]{2x+1} = y$, phương trình trở thành $x^3 + x = y^3 + y$

Do hàm số $f(x) = x^3 + x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên

$$x = y \Rightarrow \sqrt[3]{2x+1} = x \Leftrightarrow x^3 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Bài 2.9: Cho hàm số $y = \sqrt{x-1} + x^2 - 2x$

a) Xét sự biến thiên của hàm số đã cho trên $[1; +\infty)$

b) Tìm giá trị lớn nhất nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[2; 5]$

Hướng dẫn giải

a) Với mọi $x_1, x_2 \in [1; +\infty)$, $x_1 \neq x_2$ ta có

$$f(x_2) - f(x_1) = \left(\sqrt{x_2 - 1} + x_2^2 - 2x_2\right) - \left(\sqrt{x_1 - 1} + x_1^2 - 2x_1\right)$$

$$= \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2 - 1} + \sqrt{x_1 - 1}} + (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 2)$$

Suy ra $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{1}{\sqrt{x_2 - 1} + \sqrt{x_1 - 1}} + x_2 + x_1 - 2 > 0$

Do đó hàm số đã cho đồng biến trên $[1; +\infty)$

b) Hàm số đã cho đồng biến trên $[1; +\infty)$ nên nó đồng biến trên $[2; 5]$

Vậy $\max\limits_{[2;5]} y = y(5) = 17 \Leftrightarrow x = 5$, $\min\limits_{[2;5]} y = y(2) = 1 \Leftrightarrow x = 2$.

DẠNG TOÁN 4: ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ VÀ TỊNH TIẾN ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Phương pháp giải.

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D. Đồ thị hàm số f là tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ nằm trong mặt phẳng tọa độ với $x \in D$.

  Chú ý : Điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$_ đồ thị hàm số $y = f(x) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$.
- Sử dụng định lý về tịnh tiến đồ thị một hàm số

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho hai hàm số $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ và $g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 \text{ khi } x > 2 \\ 2x - 1 \text{ khi } -2 \le x \le 2 \\ 6 - 5x \text{ khi } x < -2 \end{cases}$.

a) Tính các giá trị sau $f(-1)$ và $g(-3), g(2), g(3)$.

b) Tìm x khi $f(x) = 1$, $g(x) = 1$.

Lời giải

a) Ta có $f(-1) = 2(-1)^2 + 3(-1) + 1 = 0$, $g(-3) = 6 - 5(-3) = 21$,

$g(2) = 2.2 - 1 = 3$, $g(3) = 3^2 + 1 = 10$

b) * Ta có $f(x)=1 \Leftrightarrow 2x^2+3x+1=1 \Leftrightarrow 2x^2+3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

* Với $x>2$ ta có $g(x)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x^2+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x=0 \end{cases}$ vô nghiệm

Với $-2 \le x \le 2$ ta có $g(x)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ 2x-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le x \le 2 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

Với $x<-2$ ta có $g(x)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x<-2 \\ 6x-5=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-2 \\ x=1 \end{cases}$ vô nghiệm

Vậy $g(x)=1 \Leftrightarrow x=1$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y=mx^3-2(m^2+1)x^2+2m^2-m$

a) Tìm m để điểm $M(-1;2)$ thuộc đồ thị hàm số đã cho

b) Tìm các điểm cố định mà đồ thị hàm số đã cho luôn đi qua với mọi m.

Lời giải

a) Điểm $M(-1;2)$ thuộc đồ thị hàm số đã cho khi và chỉ khi

$2=-m-2(m^2+1)+2m^2-m \Leftrightarrow m=-2$. Vậy $m=-2$ là giá trị cần tìm.

b) Để $N(x;y)$ là điểm cố định mà đồ thị hàm số đã cho luôn đi qua, điều kiện cần và đủ là $y=mx^3-2(m^2+1)x^2+2m^2-m, \forall m$

$\Leftrightarrow 2m^2(1-x^2)+m(x^3-1)-2x^2-y=0, \forall m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x^2=0 \\ x^3-1 \\ 2x^2+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$

Vậy đồ thị hàm số đã cho luôn đi qua điểm $N(1;-2)$.

Chú ý: Nếu đa thức $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=0$ với mọi $x \in K$ khi và chỉ khi $a_n=a_{n-1}=...=a_0$

Ví dụ 3: Chứng minh rằng trên đồ thị (C) của hàm số $y=\dfrac{x^2-x+1}{x+1}$ tồn tại hai điểm $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$ thỏa mãn: $\begin{cases} 2x_A+y_A=3 \\ 2x_B+y_B=3 \end{cases}$.

Lời giải

Ta có $A \in (C) \Leftrightarrow y_A=\dfrac{x_A^2-x_A+1}{x_A+1}$, $B \in (C) \Leftrightarrow y_B=\dfrac{x_B^2-x_B+1}{x_B+1}$

Do đó $\begin{cases} 2x_A+y_A=3 \\ 2x_B+y_B=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_A+\dfrac{x_A^2-x_A+1}{x_A+1}=3 \\ 2x_B+\dfrac{x_B^2-x_B+1}{x_B+1}=3 \end{cases}$ (*)

Với $x_A \ne -1, x_B \ne -1$ ta có

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_A^2-2x_A-2=0 \\ 3x_B^2-2x_B-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A=\dfrac{1 \pm \sqrt{7}}{3} \\ x_B=\dfrac{1 \pm \sqrt{7}}{3} \end{cases}$ (thỏa mãn)

Suy ra tồn tại hai điểm $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$ thuộc đồ thị (C) thỏa mãn: $\begin{cases} 2x_A+y_A=3 \\ 2x_B+y_B=3 \end{cases}$.

Ví dụ 4: Tìm trên đồ thị hàm số $y=-x^3+x^2+3x-4$ hai điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

Lời giải

Gọi M, N đối xứng nhau qua gốc tọa độ O. $M(x_0;y_0) \Rightarrow N(-x_0;-y_0)$

Vì M, N thuộc đồ thị hàm số nên $\begin{cases} y_0=-x_0^3+x_0^2+3x_0-4 \\ -y_0=x_0^3+x_0^2-3x_0-4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0=-x_0^3+x_0^2+3x_0-4 \\ 2x_0^2-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0=-x_0^3+x_0^2+3x_0-4 \\ x_0=\pm 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0=2 \\ y_0=-2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_0=-2 \\ y_0=2 \end{cases}$

Vậy hai điểm cần tìm có tọa độ là $(2;-2)$ và $(-2;2)$.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 2.10: Cho hàm số $y=f(x)=-3x^2+m^2x+m+1$ (với m là tham số)

a) Tìm các giá trị của m để $f(0)=5$.

b) Tìm các giá trị của m để đồ thị của hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $A(1;0)$.

Hướng dẫn giải

a) $f(0)=5 \Leftrightarrow m+1=5 \Leftrightarrow m=4$

b) Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $A(1;0)$ khi và chỉ khi

$0=-3+m^2+m+1 \Leftrightarrow m^2+m-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array}\right.$

Bài 2.11: Tìm các điểm cố định mà đồ thị hàm số sau luôn đi qua với mọi m.

a) $y = x^3 + 2(m-1)x^2 + (m^2 - 4m + 1)x - 2(m^2 + 1)$

b) $y = \dfrac{(m-1)x + m + 2}{x + m + 2}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $y = x^3 + 2(m-1)x^2 + (m^2 - 4m + 1)x - 2(m^2 + 1)$

$\Leftrightarrow m^2(x-2) + m\left(2x^2 - 4x\right) + x^3 - 2x^2 + x - 2 - y = 0$

Tọa độ điểm cố định mà họ đồ thị đồ thị luôn đi qua là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ 2x^2 - 4x = 0 \\ x^3 - 2x^2 + x - 2 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Vậy điểm cần tìm là $A(2;0)$.

b) Điểm cố định là $A(-4;-3)$, $B(0;1)$

Bài 2.12: a) Tịnh tiến đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2$ liên tiếp sang trái 2 đơn vị và xuống dưới $\dfrac{1}{2}$ đơn vị ta được đồ thị của hàm số nào?

b) Nêu cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = x^3$ để được đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 6$.

Hướng dẫn giải

a) Ta tịnh tiến đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2$ sang trái 2 đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = -(x+2)^2 + 2$ rồi tịnh tiến lên trên $\dfrac{1}{2}$ đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = -(x+2)^2 + 2 + \dfrac{1}{2}$.

b) Ta có $x^3 + 3x^2 + 3x + 6 = (x+1)^3 + 5$

Do đó tịnh tiến đồ thị hàm số $y = x^3$ để được đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 6$ ta làm như sau

Tịnh tiến liên tiếp đồ thị hàm số $y = x^3$ đi sang bên trái 1 đơn vị và lên trên đi 5 đơn vị.

§2. HÀM SỐ BẬC NHẤT

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa: Hàm số bậc nhất là hàm số có dạng $y = ax + b$ $(a \neq 0)$.

2. Sự biến thiên

- TXĐ: $D = \mathbb{R}$
- Hàm số số đồng biến khi $a > 0$ và nghịch biến khi $a < 0$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$+\infty$
$y = ax + b$ $(a > 0)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
$y = ax + b$ $(a < 0)$	$+\infty$	↘	$-\infty$

3. Đồ thị.

Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ là một đường thẳng có hệ số góc bằng a, cắt trục hoành tại $A\left(-\dfrac{b}{a};0\right)$ và trục tung tại $B(0;b)$

Chú ý:

- Nếu $a = 0 \Rightarrow y = b$ là hàm số hằng, đồ thị là đường thẳng song song hoặc trùng với trục hoành.
- Phương trình $x = a$ cũng là một đường thẳng(nhưng không phải là một hàm số) vuông góc với trục tọa độ và cắt tại điểm có hoành độ bằng a.
- Cho đường thẳng d có hệ số góc k, d đi qua điểm $M(x_0;y_0)$, khi đó phương trình của đường thẳng d là: $y - y_0 = a(x - x_0)$.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: *XÁC ĐỊNH HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA ĐỒ THỊ CÁC HÀM SỐ.*

Phương pháp giải.

- Để xác định hàm số bậc nhất ta là như sau

Gọi hàm số cần tìm là $y = ax + b$, $a \neq 0$. Căn cứ theo giả thiết bài toán để thiết lập và giải hệ phương trình với ẩn a, b, từ đó suy ra hàm số cần tìm.

- Cho hai đường thẳng $d_1 : y = a_1x + b_1$ và $d_2 : y = a_2x + b_2$. Khi đó:

a) d_1 và d_2 trùng nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$;

b) d_1 và d_2 song song nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$;

c) d_1 và d_2 cắt nhau $\Leftrightarrow a_1 \neq a_2$. Và tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} y = a_1x + b_1 \\ y = a_2x + b_2 \end{cases}$

d) d_1 và d_2 vuông góc nhau $\Leftrightarrow a_1.a_2 = -1$.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Cho hàm số bậc nhất có đồ thị là đường thẳng d. Tìm hàm số đó biết:

a) d đi qua $A(1;3)$, $B(2;-1)$

b) d đi qua $C(3;-2)$ và song song với $\Delta : 3x - 2y + 1 = 0$

c) d đi qua $M(1;2)$ và cắt hai tia Ox, Oy tại P, Q sao cho $S_{\Delta OPQ}$ nhỏ nhất.

d) d đi qua $N(2;-1)$ và $d \perp d'$ với $d' : y = 4x + 3$.

Lời giải

Gọi hàm số cần tìm là $y = ax + b,\ a \neq 0$

a) Vì $A \in d$ và $B \in d$ nên ta có hệ phương trình $\begin{cases} 3 = a + b \\ -1 = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 7 \end{cases}$

Vậy hàm số cần tìm là $y = -4x + 7$

b) Ta có $\Delta : y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$. Vì $d // \Delta$ nên $\begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b \neq \frac{1}{2} \end{cases}$ (1)

Mặt khác $C \in d \Rightarrow -2 = 3a + b$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{13}{2} \end{cases}$

Vậy hàm số cần tìm là $y = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2}$

c) Đường thẳng d cắt trục Ox tại $P\left(-\frac{b}{a};0\right)$ và cắt Oy tại $Q(0;b)$ với $a < 0, b > 0$

Suy ra $S_{\Delta OPQ} = \frac{1}{2}OP.OQ = \frac{1}{2}.\left|-\frac{b}{a}\right|.|b| = -\frac{b^2}{2a}$ (3)

Ta có $M \in d \Rightarrow 2 = a + b \Rightarrow b = 2 - a$ thay vào (3) ta được

$S_{\Delta OPQ} = -\frac{(2-a)^2}{2a} = -\frac{2}{a} - \frac{a}{2} + 2$

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có: $-\frac{2}{a} - \frac{a}{2} \geq 2\sqrt{\left(-\frac{2}{a}\right).\left(-\frac{a}{2}\right)} = 2 \Rightarrow S_{\Delta OPQ} \geq 4$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} -\frac{2}{a} = -\frac{a}{2} \Leftrightarrow a = -2 \Rightarrow b = 4 \\ a < 0 \end{cases}$

Vậy hàm số cần tìm là $y = -2x + 4$.

d) Đường thẳng d đi qua $N(2;-1)$ nên $-1 = 2a + b$ (4)

Và $d \perp d' \Rightarrow 4.a = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$ thay vào (4) ta được $b = -\frac{1}{2}$.

Vậy hàm số cần tìm là $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$.

Ví dụ 2: Cho hai đường thẳng $d : y = x + 2m$, $d' : y = 3x + 2$ (m là tham số)

a) Chứng minh rằng hai đường thẳng d, d' cắt nhau và tìm tọa độ giao điểm của chúng

b) Tìm m để ba đường thẳng d, d' và $d'' : y = -mx + 2$ phân biệt đồng quy.

Lời giải

a) Ta có $a_d = 1 \neq a_{d'} = 3$ suy ra hai đường thẳng d, d' cắt nhau.

Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng d, d' là nghiệm của hệ phương trình

$\begin{cases} y = x + 2m \\ y = 3x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m - 1 \\ y = 3m - 1 \end{cases}$ suy ra d, d' cắt nhau tại $M(m-1;3m-1)$

b) Vì ba đường thẳng d, d', d'' đồng quy nên $M \in d''$ ta có

$3m - 1 = -m(m-1) + 2 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -3 \end{array}\right.$

- Với $m = 1$ ta có ba đường thẳng là $d : y = x + 2$, $d' : y = 3x + 2$, $d'' : y = -x + 2$, phân biệt và đồng quy tại $M(0;2)$.
- Với $m = -3$ ta có $d' \equiv d''$ suy ra $m = -3$ không thỏa mãn

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3: Cho đường thẳng $d : y = (m-1)x + m$ và $d' : y = \left(m^2 - 1\right)x + 6$

a) Tìm m để hai đường thẳng d, d' song song với nhau

b) Tìm m để đường thẳng d cắt trục tung tại A, d' cắt trục hoành tại B sao cho tam giác OAB cân tại O

Lời giải

a) Với $m = 1$ ta có $d : y = 1$, $d' : y = 6$ do đó hai đường thẳng này song song với nhau

Với $m=-1$ ta có $d: y=-2x-1, d': y=6$ suy ra hai đường thẳng này cắt nhau tại $M\left(-\frac{7}{2};6\right)$

Với $m\neq\pm1$ khi đó hai đường thẳng trên là đồ thị của hàm số bậc nhất nên song song với nhau khi và chỉ khi $\begin{cases} m-1=m^2-1 \\ m\neq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=0 \end{array}\right. \\ m\neq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=0 \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện $m\neq\pm1$ suy ra $m=0$.

Vậy $m=0$ và $m=1$ là giá trị cần tìm.

b) Ta có tọa độ điểm A là nghiệm của hệ

$\begin{cases} y=(m-1)x+m \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=m \end{cases} \Rightarrow A(0;m)$

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} y=\left(m^2-1\right)x+6 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(m^2-1\right)x+6=0 \\ y=0 \end{cases}$ (*)

Rõ ràng $m=\pm1$ hệ phương trình (*) vô nghiệm

Với $m\neq\pm1$ ta có $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{6}{1-m^2} \Rightarrow B\left(\dfrac{6}{1-m^2};0\right) \\ y=0 \end{cases}$

Do đó tam giác OAB cân tại $O \Leftrightarrow |m|=\left|\dfrac{6}{1-m^2}\right|$

$\Leftrightarrow \left|m-m^3\right|=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-m^3=6 \\ m-m^3=-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^3-m+6=0 \\ m^3-m-6=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=2 \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy $m=\pm2$ là giá trị cần tìm.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 2.13: Cho hàm số bậc nhất có đồ thị là đường thẳng d. Tìm hàm số đó biết:

a) d đi qua $A(1;1), B(3;-2)$

b) d đi qua $C(2;-2)$ và song song với $\Delta: x-y+1=0$

c) d đi qua $M(1;2)$ và cắt hai tia Ox, Oy tại P, Q sao cho ΔOPQ cân tại O.

d) d đi qua $N(1;-1)$ và $d\perp d'$ với $d': y=-x+3$.

Hướng dẫn giải

Gọi hàm số cần tìm là $y=ax+b, a\neq0$

a) Vì $A\in d$ và $B\in d$ nên ta có hệ phương trình

$\begin{cases} 1=a+b \\ 3=-2a+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{2}{3} \\ b=\dfrac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$

b) Ta có $\Delta: y=x+1$. Vì $d//\Delta$ nên $\begin{cases} a=1 \\ b\neq1 \end{cases}$

Mặt khác $C\in d \Rightarrow -2=2a+b \Rightarrow b=-4$

Vậy hàm số cần tìm là $y=x-4$

c) Đường thẳng d cắt trục Ox tại $P\left(-\frac{b}{a};0\right)$ và cắt Oy tại $Q(0;b)$ với $a<0, b>0$

Ta có $OP=OQ \Leftrightarrow -\dfrac{b}{a}=b \Leftrightarrow b(a+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \text{ (loại)} \\ a=-1 \end{array}\right.$

Ta có $M\in d \Rightarrow 2=a+b \Rightarrow b=3$

Vậy hàm số cần tìm là $y=-x+3$.

d) Đường thẳng d đi qua $N(1;-1)$ nên $-1=a+b$

Và $d\perp d' \Rightarrow a=1$ suy ra $b=-2$.

Vậy hàm số cần tìm là $y=x-2$.

Bài 2.14: Tìm m để ba đường thẳng $d: y=2x, d': y=-x+6, d'': y=m^2x+5m+3$ phân biệt đồng quy.

Hướng dẫn giải

Tọa độ giao điểm(nếu có) của hai đường thẳng d, d' là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} y=2x \\ y=-x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$ suy ra d, d' cắt nhau tại $M(2;4)$

Vì ba đường thẳng d, d', d'' đồng quy nên $M\in d''$ ta có

$4=2m^2+5m+3 \Rightarrow 2m^2+5m-1=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{-5\pm\sqrt{33}}{4}$

Dễ thấy với $m=\dfrac{-5\pm\sqrt{33}}{4}$ ba đường thẳng đó phân biệt và đồng quy

Vậy $m=\dfrac{-5\pm\sqrt{33}}{4}$ là giá trị cần tìm..

DẠNG TOÁN 2: *XÉT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC NHẤT.*

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau

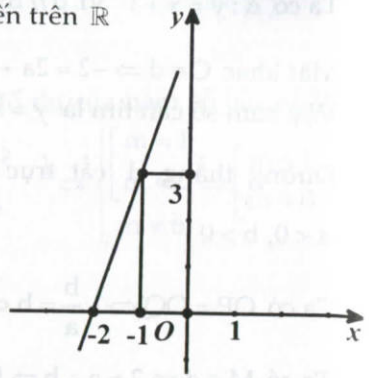
a) $y=3x+6$ b) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

Lời giải

a) TXĐ: $D=\mathbb{R}$, $a=3>0$ suy ra hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$+\infty$
$y=3x+6$	$-\infty$	↗	$+\infty$

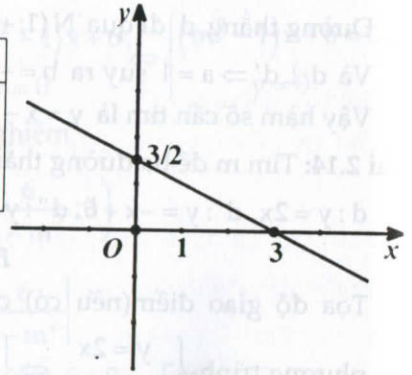


Đồ thị hàm số $y=3x+6$ đi qua $A(-2;0)$, $B(-1;3)$

b) TXĐ: $D=\mathbb{R}$, $a=-\frac{1}{2}<0$ suy ra hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$+\infty$
$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$	$+\infty$	↘	$-\infty$



Đồ thị hàm số $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ đi qua $A(3;0)$, $B\left(0;\frac{3}{2}\right)$

Ví dụ 2. Cho các hàm số: $y=2x-3$, $y=-x-3$, $y=-2$.

a) Vẽ đồ thị các hàm số trên

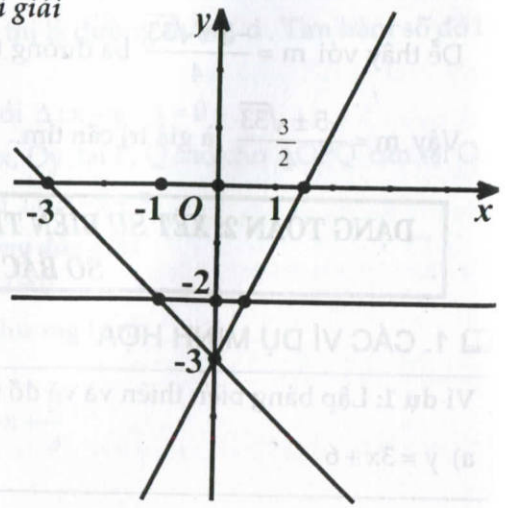
b) Dựa vào đồ thị hãy xác định giao điểm của các đồ thị hàm số đó

Lời giải

a) Đường thẳng $y=2x-3$ đi qua các điểm $A(0;-3)$, $B\left(\frac{3}{2};0\right)$

Đường thẳng $y=-x-3$ đi qua các điểm $A(0;-3)$, $C(-3;0)$

Đường thẳng $y=-2$ song song với trục hoành và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2



b) Đường thẳng $y=2x-3$, $y=-x-3$ cắt nhau tại $A(0;-3)$

Đường thẳng $y=-x-3$, $y=-2$ cắt nhau tại $A'(-1;-2)$

Đường thẳng $y=2x-3$, $y=-2$ cắt nhau tại $A''\left(\frac{1}{2};-2\right)$.

Ví dụ 3: Cho đồ thị hàm số có đồ thị (C) (hình vẽ)

a) Hãy lập bảng biến thiên của hàm số trên $[-3;3]$

b) Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên $[-4;2]$

Lời giải

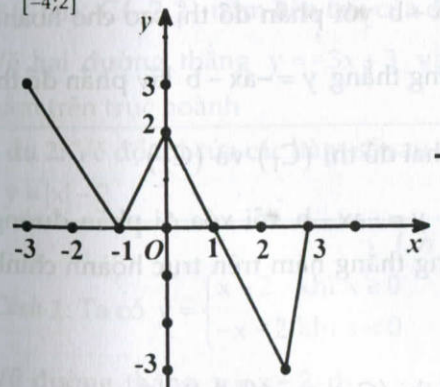
a) Bảng biến thiên của hàm số trên $[-3;3]$

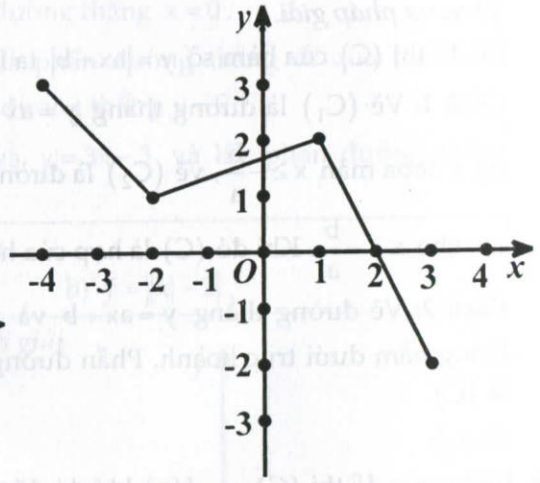
x	-3		-1		0		3
y	3	↘	0	↗	2	↘	-3

b) Dựa vào đồ thị hàm số đã cho ta có

$\max\limits_{[-4;2]} = 3$ khi và chỉ khi $x=-4$

$\min\limits_{[-4;2]} = 0$ khi và chỉ khi $x=2$





2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 2.15: Cho các hàm số: $y=-2x+3$, $y=x+2$, $y=\frac{3}{2}$.

a) Vẽ đồ thị các hàm số trên

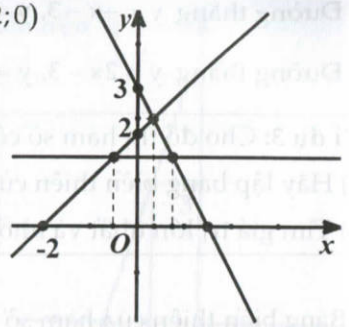
b) Dựa vào đồ thị hãy xác định giao điểm của các đồ thị hàm số đó

Hướng dẫn giải

a) Đồ thị hàm số $y=-2x+3$ đi qua $A(0;3)$, $B\left(\frac{3}{2};0\right)$

Đồ thị hàm số $y = x + 2$ đi qua $A'(0;2)$, $B'(-2;0)$

Đồ thị hàm số $y = \frac{3}{2}$ đi qua $M\left(0;\frac{3}{2}\right)$ và song song với trục hoành



b) Giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = -2x + 3$, $y = x + 2$ là $M_1\left(\frac{1}{3};\frac{7}{3}\right)$

Giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = -2x + 3$, $y = \frac{3}{2}$ là $M_2\left(\frac{3}{4};\frac{3}{2}\right)$

Giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = x + 2$, $y = \frac{3}{2}$ là $M_2\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$

DẠNG TOÁN 3: *ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ CHỨA DẤU TRỊ TUYỆT ĐỐI* $y = |ax + b|$.

Phương pháp giải.

Vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = |ax + b|$ ta làm như sau

Cách 1: Vẽ (C_1) là đường thẳng $y = ax + b$ với phần đồ thị sao cho hoành độ x thỏa mãn $x \ge -\frac{b}{a}$, vẽ (C_2) là đường thẳng $y = -ax - b$ lấy phần đồ thị sao cho $x < -\frac{b}{a}$. Khi đó (C) là hợp của hai đồ thị (C_1) và (C_2).

Cách 2: Vẽ đường thẳng $y = ax + b$ và $y = -ax - b$ rồi xóa đi phần đường thẳng nằm dưới trục hoành. Phần đường thẳng nằm trên trục hoành chính là (C).

Chú ý:

- Biết trước đồ thị $(C): y = f(x)$ khi đó đồ thị $(C_1): y = f(|x|)$ là gồm phần :
  - Giữ nguyên đồ thị (C) ở bên phải trục tung;
  - Lấy đối xứng đồ thị (C) ở bên phải trục tung qua trục tung.
- Biết trước đồ thị $(C): y = f(x)$ khi đó đồ thị $(C_2): y = |f(x)|$ là gồm phần:
  - Giữ nguyên đồ thị (C) ở phía trên trục hoành
  - Lấy đối xứng đồ thị (C) ở trên dưới trục hoành và lấy đối xứng qua trục hoành.

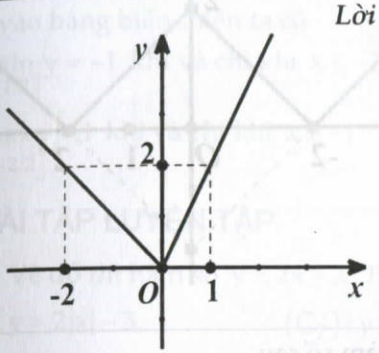
1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

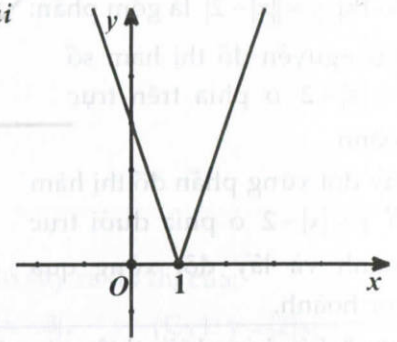
Ví dụ 1. Vẽ đồ thị của các hàm số sau

a) $y = \begin{cases} 2x & \text{khi } x \ge 0 \\ -x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$.

b) $y = |-3x + 3|$.

Lời giải





a) Với $x \ge 0$ đồ thị hàm số $y = 2x$ là phần đường thẳng đi qua hai điểm $O(0;0)$, $A(1;2)$ nằm bên phải của đường thẳng $x = 0$.

Với $x < 0$ đồ thị hàm số $y = -x$ là phần đường thẳng đi qua hai điểm $B(-1;1)$, $C(-2;2)$ nằm bên trái của đường thẳng $x = 0$.

b) Vẽ hai đường thẳng $y = -3x + 3$ và $y = 3x - 3$ và lấy phần đường thẳng nằm trên trục hoành

Ví dụ 2: Vẽ đồ thị của các hàm số sau

a) $y = |x| - 2$

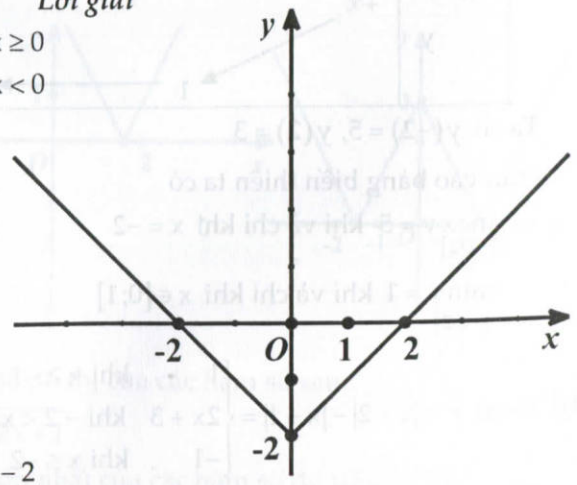
b) $y = ||x| - 2|$

Lời giải

a) *Cách 1*: Ta có $y = \begin{cases} x - 2 & \text{khi } x \ge 0 \\ -x - 2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

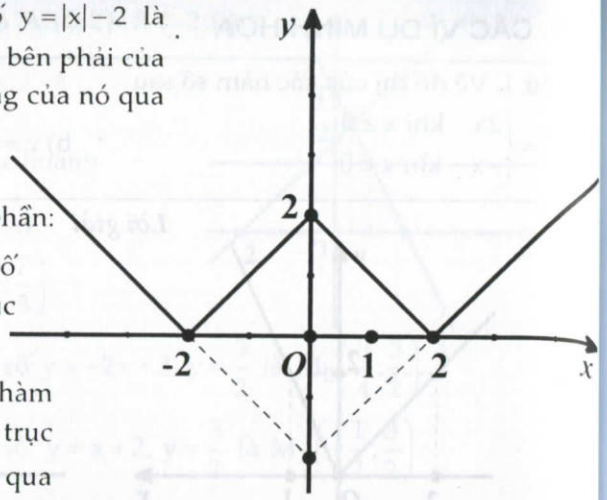
Vẽ đường thẳng $y = x - 2$ đi qua hai điểm $A(0; -2)$, $B(2; 0)$ và lấy phần đường thẳng bên phải của trục tung

Vẽ đường thẳng $y = -x - 2$ đi qua hai điểm $A(0; -2)$, $C(-2; 0)$ và lấy phần đường thẳng bên trái của trục tung.



Cách 2: Đường thẳng $d: y = x - 2$ đi qua $A(0;-2)$, $B(2;0)$.

Khi đó đồ thị của hàm số $y=|x|-2$ là phần đường thẳng d nằm bên phải của trục tung và phần đối xứng của nó qua trục tung



b) Đồ thị $y=||x|-2|$ là gồm phần:

- Giữ nguyên đồ thị hàm số $y=|x|-2$ ở phía trên trục hoành
- Lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $y=|x|-2$ ở phía dưới trục hoành và lấy đối xứng qua trục hoành.

Ví dụ 3: Lập bảng biến thiên của các hàm số sau

a) $y=\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-2x+1}$. b) $y=\sqrt{x^2+4x+4}-|x+1|$.

Từ đó tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của các hàm số đó trên $[-2;2]$

Lời giải

a) Ta có $y=|x|+|x-1|=\begin{cases}2x-1 & \text{khi } x\geq 1\\ 1 & \text{khi } 0<x<1\\ 1-2x & \text{khi } x\leq 0\end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	1	→	1	↗	$+\infty$

Ta có $y(-2)=5$, $y(2)=3$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$\max\limits_{[-2;2]} y=5$ khi và chỉ khi $x=-2$

$\min\limits_{[-2;2]} y=1$ khi và chỉ khi $x\in[0;1]$

b) Ta có $y=|x+2|-|x+1|=\begin{cases}1 & \text{khi } x\geq -1\\ 2x+3 & \text{khi } -2<x<-1\\ -1 & \text{khi } x\leq -2\end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
y			-1	→	1	→	1
					-1		

Ta có $y(-2)=-1$, $y(2)=1$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$\min\limits_{[-2;2]} y=-1$ khi và chỉ khi $x\leq -2$

$\max\limits_{[-2;2]} y=1$ khi và chỉ khi $x\geq -1$

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

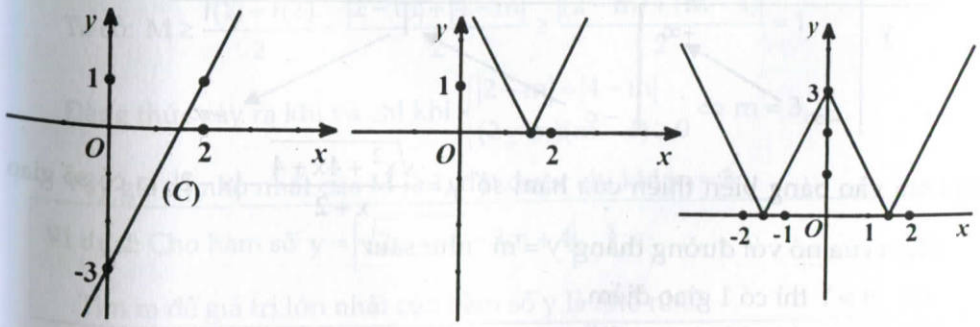
Bài 2.17: Vẽ đồ thị hàm số $y=2x-3$. Từ đó suy ra đồ thị của:

$(C_1): y=2|x|-3$, $(C_2): y=|2x-3|$, $(C_3): y=|2|x|-3|$

Hướng dẫn giải

Đồ thị hàm số $y=2x-3$ đi qua $A(0;-3)$, $B(2;1)$ ta gọi là (C)

- Khi đó đồ thị hàm số $(C_1): y=2|x|-3$ là phần được xác định như sau
  Ta giữ nguyên đồ thị (C) ở bên phải trục tung; lấy đối xứng đồ thị (C) ở phần bên phải trục tung qua trục tung.
- $(C_2): y=|2x-3|$ là phần đồ thị (C) nằm phải trên trục hoành và đồ thị lấy đối xứng qua trục hoành của phần nằm trên trục hoành của (C).
- $(C_3): y=|2|x|-3|$ là phần đồ thị (C_1) nằm phải trên trục hoành và đồ thị lấy đối xứng qua trục hoành của phần nằm trên trục hoành của (C_1).



Bài 2.18: Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau

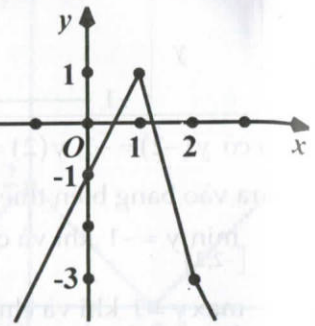
$y=\sqrt{x^2-4x+4}-3\sqrt{x^2-2x+1}$

Từ đó tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của các hàm số đó trên $[0;2]$.

Hướng dẫn giải

Ta có $y = |x-2| - 3|x-1|$

$$= \begin{cases} -2x+1 & \text{Khi } x \geq 2 \\ -4x+5 & \text{Khi } 1 \leq x < 2 \\ 2x-1 & \text{Khi } x < 1 \end{cases}$$



Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

$\max\limits_{[0;2]} y = 1$ khi và chỉ khi $x = 1$

$\min\limits_{[0;2]} y = -3$ khi và chỉ khi $x = 2$.

Bài 2.19: a) Lập bảng biến thiên của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - |x-2|$

b) Biện luận số giao điểm của đồ thị hàm số trên với đường thẳng $y = m$ theo m.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $y = \dfrac{|x+2|}{x+2} - |x-2| = \begin{cases} -x+3 & \text{Khi } x \geq 2 \\ x-1 & \text{Khi } -2 < x < 2 \\ x-3 & \text{Khi } x < -2 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$+\infty$	‖ $-\infty$	↗	1	↘ $-\infty$

b) Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - |x-2|$ ta có số giao điểm của nó với đường thẳng $y = m$ như sau:

Với $m > 1$ thì có 1 giao điểm

Với $m = 1$ thì có hai giao điểm

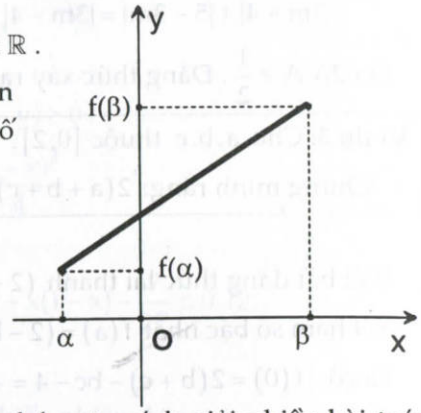
Với $m < 1$ thì có ba giao điểm

DẠNG TOÁN 4: ỨNG DỤNG CỦA HÀM SỐ BẬC NHẤT TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, LỚN NHẤT..

Phương pháp giải.

Cho hàm số $f(x) = ax + b$ và đoạn $[\alpha;\beta] \subset \mathbb{R}$.

Khi đó, đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên $[\alpha;\beta]$ là một đoạn thẳng nên ta có một số tính chất:



- $\max\limits_{[\alpha,\beta]} f(x) = \max\{f(\alpha); f(\beta)\}$,
- $\min\limits_{[\alpha,\beta]} f(x) = \min\{f(\alpha); f(\beta)\}$,
- $\max\limits_{[\alpha,\beta]} |f(x)| = \max\{|f(\alpha)|; |f(\beta)|\}$.

Áp dụng các tính chất đơn giản này cho chúng ta cách giải nhiều bài toán một cách thú vị, ngắn gọn, hiệu quả.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x) = |2x - m|$.

Tìm m để giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên $[1;2]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Dựa vào các nhận xét trên ta thấy $\max\limits_{[1;2]} f(x)$ chỉ có thể đạt được tại $x = 1$ hoặc $x = 2$.

Như vậy nếu đặt $M = \max\limits_{[1;2]} f(x)$ thì $M \geq f(1) = |2-m|$ và $M \geq f(2) = |4-m|$.

Ta có: $M \geq \dfrac{f(1)+f(2)}{2} = \dfrac{|2-m|+|4-m|}{2} \geq \dfrac{|(2-m)+(m-4)|}{2} = 1$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} |2-m| = |4-m| \\ (2-m)(m-4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 1, đạt được chỉ khi $m = 3$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = \left|\sqrt{2x-x^2} - 3m + 4\right|$.

Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số y là nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi $A = \max y$. Ta đặt $t = \sqrt{2x-x^2} \Rightarrow t = \sqrt{1-(x-1)^2}$ do đó $0 \leq t \leq 1$

Khi đó hàm số được viết lại là $y = |t - 3m + 4|$ với $t \in [0;1]$ suy ra

$A = \max\limits_{[0,1]}|t-3m+4| = \max\{|-3m+4|,|5-3m+|\} \geq \dfrac{|-3m+4|+|5-3m|}{2}$

Áp dụng BĐT trị tuyệt đối ta có

$|-3m+4|+|5-3m| = |3m-4|+|5-3m| \geq 1$

Do đó $A \geq \dfrac{1}{2}$. Đẳng thức xảy ra $m = \dfrac{3}{2}$. Vậy giá trị cần tìm là $m = \dfrac{3}{2}$.

Ví dụ 3: Cho a,b,c thuộc $[0;2]$.

Chứng minh rằng: $2(a+b+c)-(ab+bc+ca) \leq 4$

Lời giải

Viết bất đẳng thức lại thành $(2-b-c)a+2(b+c)-bc-4 \leq 0$

Xét hàm số bậc nhất $f(a) = (2-b-c)a+2(b+c)-bc-4$ với ẩn $a \in [0;2]$

Ta có: $f(0) = 2(b+c)-bc-4 = -(2-b)(2-c) \leq 0$

$f(2) = (2-b-c)2+2(b+c)-bc-4 = -bc \leq 0$

Suy ra $f(a) \leq \max\{f(0);f(2)\} \leq 0$ đpcm.

Ví dụ 4: Cho các số thực không âm x, y, z thoả mãn $x+y+z=3$.

Chứng minh rằng $x^2+y^2+z^2+xyz \geq 4$.

Lời giải

Bất đẳng thức tương đương với $(y+z)^2-2yz+x^2+xyz \geq 4$

$\Leftrightarrow (3-x)^2+x^2+yz(x-2)-4 \geq 0 \Leftrightarrow yz(x-2)+2x^2-6x+5 \geq 0$ (*)

Đặt $t = yz$, do $yz \geq 0$ và $yz \leq \left(\dfrac{y+z}{2}\right)^2 = \dfrac{(3-x)^2}{4}$ nên $t \in \left[0; \dfrac{(3-x)^2}{4}\right]$.

Khi đó VT(*) là hàm số bậc nhất của biến t, $f(t) = (x-2)t+2x^2-6x+5$.

Để chứng minh bất đẳng thức (*) ta sẽ chứng minh $f(0) \geq 0$ và $f\left(\dfrac{(3-x)^2}{4}\right) \geq 0$.

Thật vậy, ta có

$f(0) = 2x^2-6x+5 = 2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{1}{5} \geq 0$ và $f\left(\dfrac{(3-x)^2}{4}\right) = \dfrac{1}{4}(x-1)^2(x+2) \geq 0$

nên bất đẳng thức được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 2.20: Cho $\begin{cases} x,y,z \geq 0 \\ x+y+z=1 \end{cases}$. Chứng minh $0 \leq xy+yz+zx-2xyz \leq \dfrac{7}{27}$.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta có $x, y, z \in [0;1]$

$\Rightarrow xy+yz+zx-2xyz = xy+yz(1-x)+zx(1-y) \geq 0$.

Cũng từ giả thiết ta suy ra $yz \leq \dfrac{(y+z)^2}{4} = \dfrac{(1-x)^2}{4}$.

Mặt khác ta lại có

$xy+yz+zx-2xyz \leq \dfrac{7}{27} \Leftrightarrow f(yz) = (1-2x)yz+x(1-x)-\dfrac{7}{27} \leq 0$ (2).

Khi đó ta thấy rằng

Nếu $x = \dfrac{1}{2}$ khi đó BĐT (2) thành $-\dfrac{1}{108} \leq 0$ (hiển nhiên đúng).

Nếu $x \neq \dfrac{1}{2}$ thì $f(yz)$ là hàm số bậc nhất. Do đó để chứng minh $f(yz) \leq 0$ ta chỉ cần chứng minh $\begin{cases} f(0) \leq 0 \\ f\left[\dfrac{(1-x)^2}{4}\right] \leq 0 \end{cases}$.

Dễ thấy $f(0) = x(1-x)-\dfrac{7}{27} = -\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{108} < 0$

và $f\left[\dfrac{(1-x)^2}{4}\right] = (1-2x).\dfrac{(1-x)^2}{4}+x(1-x)-\dfrac{7}{27} = -\dfrac{1}{108}(6x+1)(3x-1)^2 \leq 0$.

Vậy là trong hai trường hợp ta kết luận $f(yz) \leq 0$. Ta đã giải xong bài toán.

Bài 2.21: Cho $\begin{cases} x,y,z \geq 0 \\ x+y+z=3 \end{cases}$. Chứng minh $x^2+y^2+z^2+xyz \geq 4$.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta có $x, y, z \in [0;3]$ và $yz \leq \dfrac{(y+z)^2}{4} = \dfrac{(3-x)^2}{4}$.

Mặt khác ta thấy

$x^2+y^2+z^2+xyz \geq 4$

$\Leftrightarrow x^2+(y+z)^2-2yz+xyz-4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2+(3-x)^2-2yz+xyz-4 \geq 0$

$\Leftrightarrow f(yz) = (x-2)yz+2x^2-6x+5 \geq 0$ (3).

Nếu $x = 2$ thì BĐT (3) sẽ thành $1 \geq 0$ (hiển nhiên đúng).

Nếu $x \neq 2$ thì $f(yz)$ là hàm số bậc nhất. Do đó để chứng minh $f(yz) \geq 0$ ta chỉ cần chứng minh $\begin{cases} f(0) \geq 0 \\ f\left[\dfrac{(3-x)^2}{4}\right] \geq 0 \end{cases}$.

Dễ thấy $f(0) = 2x^2 - 6x + 5 = 2\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2} > 0$ và

$$f\left[\frac{(3-x)^2}{4}\right] = (x-2).\frac{(3-x)^2}{4} + 2x^2 - 6x + 5 = \frac{1}{4}(x+2)(x-1)^2 \geq 0.$$

Vậy là trong hai trường hợp ta kết luận $f(yz) \geq 0$.

Bài 2.22: Cho $\begin{cases} x, y, z \geq 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$. Chứng minh $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz \geq \dfrac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta có $x, y, z \in [0;1]$ và $yz \leq \dfrac{(y+z)^2}{4} = \dfrac{(1-x)^2}{4}$. Mặt khác ta thấ

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^3 + (y+z)^3 - 3yz(y+z) + 6xyz - \frac{1}{4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + (1-x)^3 - 3yz(1-x) + 6xyz - \frac{1}{4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow f(yz) = (3x-1)yz + x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0 \quad (4).$$

Nếu $x = \dfrac{1}{3}$ thì BĐT (4) sẻ thành $\dfrac{1}{36} \geq 0$ (hiển nhiên đúng).

Nếu $x \neq \dfrac{1}{3}$ thì $f(yz)$ là hàm số bậc nhất. Theo TC2 thì để chứn minh $f(yz) \geq 0$ ta chỉ cần chứng minh cho $\begin{cases} f(0) \geq 0 \\ f\left[\dfrac{(1-x)^2}{4}\right] \geq 0 \end{cases}$.

Dễ thấy $f(0) = x^2 - x + \dfrac{1}{4} = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ và

$$f\left[\frac{(1-x)^2}{4}\right] = (3x-1).\frac{(1-x)^2}{4} + x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}x\left(x^2 - x + \frac{1}{3}\right) \geq 0$$

(đúng vì $0 \leq x \leq 1$ và $x^2 - x + \dfrac{1}{3} = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{12} > 0$).

Vậy là trong hai trường hợp ta kết luận $f(yz) \geq 0$.

Bài 2.23: Cho $0 \leq a, b, c \leq 1$. Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 \leq a^2b + b^2c + c^2a + 1$.

Hướng dẫn giải

Ta có $a^2 + b^2 + c^2 \leq a^2b + b^2c + c^2a + 1 \Leftrightarrow (b-1)a^2 + b^2c + c^2a + 1 - b^2 - c^2 \geq 0$.

Vì $0 \leq a \leq 1 \Rightarrow a \geq a^2$

$$\Rightarrow (b-1)a^2 + b^2c + c^2a + 1 - b^2 - c^2 \geq (b-1)a^2 + b^2c + c^2a^2 + 1 - b^2 - c^2 =$$
$$= \left(c^2 + b - 1\right)a^2 + b^2c + 1 - b^2 - c^2 = f(a^2).$$

Ta chỉ cần chứng minh $f(a^2) \geq 0$ là được.

Nếu $c^2 + b - 1 = 0 \Rightarrow c^2 = 1 - b$ khi đó BĐT sẻ trở thành $b^2c + (b - b^2) \geq 0$ (đúng vì $0 \leq b, c \leq 1$).

Nếu $c^2 + b - 1 \neq 0$ thì ta có $f(a^2)$ là hàm số bậc nhất. Do đó để chứng minh $f(a^2) \geq 0$ ta chỉ cần chứng minh cho $\begin{cases} f(0) \geq 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases}$.

Dễ thấy $f(0) = b^2c + 1 - b^2 - c^2 = (1-c)(1+c-b^2) = (1-c)\left[c + \left(1 - b^2\right)\right] \geq 0$

(đúng vì $0 \leq b, c \leq 1$) và $f(1) = b^2c + \left(b - b^2\right) \geq 0$ (đúng vì $0 \leq b, c \leq 1$). Vậy là trong hai trường hợp ta kết luận $f(a^2) \geq 0$. Ta đã giải xong bài toán.

Bài 2.24: Cho $\begin{cases} x, y, z \geq 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$. Chứng minh $x^2y + y^2z + z^2x \leq \dfrac{4}{27}$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $x = \min\{x, y, z\}$ thì từ giả thiết của bài toán ta suy ra $0 \leq x \leq \dfrac{1}{3}$.

Mặt khác ta lại có $x^2y + y^2z + z^2x \leq \dfrac{4}{27} \Leftrightarrow yx^2 + y^2z + z^2x - \dfrac{4}{27} \leq 0$.

Vì $0 \leq x \leq \dfrac{1}{3} \Rightarrow x^2 \leq \dfrac{1}{3}x$

$$\Rightarrow yx^2 + y^2z + z^2x - \frac{4}{27} \leq \frac{1}{3}yx + y^2z + z^2x - \frac{4}{27} = \left(\frac{1}{3}y + z^2\right)x + y^2z - \frac{4}{27} = f(x)$$

Bây giờ ta sẻ chứng minh $f(x) \leq 0$ (6) là được.

Nếu $\dfrac{1}{3}y + z^2 = 0 \Rightarrow y = z = 0$ thì BĐT (6) thành $-\dfrac{4}{27} \leq 0$ (hiển nhiên đúng).

Nếu $\dfrac{1}{3}y + z^2 \neq 0$ thì $f(x)$ là hàm số bậc nhất.

Theo TC2 thì để chứng minh $f(x) \leq 0$ ta chỉ cần chứng minh cho $\begin{cases} f(0) \leq 0 \\ f\left(\dfrac{1}{3}\right) \leq 0 \end{cases}$.

Dễ thấy $f(0)=y^2z-\frac{4}{27}$; vì $x=0$ nên từ giả thiết $\Rightarrow y+z=1$.

Theo BĐT Côsi ta có $y^2z=\frac{1}{2}.y.y.(2z)\le\frac{1}{2}.\left[\frac{2(y+z)}{3}\right]^3=\frac{4}{27}$

$\Rightarrow y^2z-\frac{4}{27}\le 0\Rightarrow f(0)\le 0$ và $f\left(\frac{1}{3}\right)=y^2z+\frac{1}{9}y+\frac{1}{3}z^2-\frac{4}{27}$; vì $x=\frac{1}{3}$ nên từ giả thiết ta suy ra

$y+z=\frac{2}{3}\Rightarrow z=\frac{2}{3}-y$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right)=y^2\left(\frac{2}{3}-y\right)+\frac{1}{9}y+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}-y\right)^2-\frac{4}{27}=-y^3+y^2-\frac{1}{3}y$

$=-y\left(y^2-y+\frac{1}{3}\right)=-y\left[\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}\right]\le 0$ (đúng vì $y\ge 0$).

Vậy là trong hai trường hợp ta kết luận $f(x)\le 0$. Ta đã giải xong bài toán.

§3. HÀM SỐ BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa: Hàm số bậc hai là hàm số có dạng $y=ax^2+bx+c(a\ne 0)$.

2. Sự biến thiên

- TXĐ: $D=\mathbb{R}$
- Khi $a>0$ hàm số đồng biến trên $\left(-\frac{b}{2a};+\infty\right)$, nghịch biến trên $\left(-\infty;-\frac{b}{2a}\right)$ và có giá trị nhỏ nhất là $-\frac{\Delta}{4a}$ khi $x=-\frac{b}{2a}$. Khi $a<0$ hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;-\frac{b}{2a}\right)$, nghịch biến trên $\left(-\frac{b}{2a};+\infty\right)$ và có giá trị lớn nhất là $-\frac{\Delta}{4a}$ khi $x=-\frac{b}{2a}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$

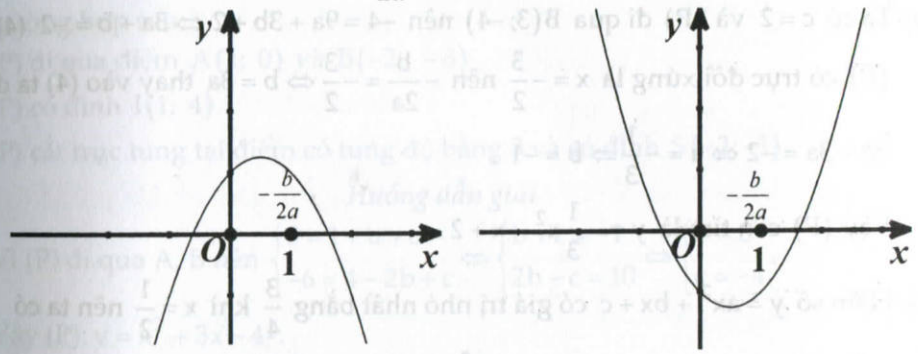
x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$y=ax^2+bx+c$ $(a<0)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$

3. Đồ thị.

Khi $a>0$ đồ thị hàm số bậc hai bề lõm hướng lên trên và có tọa độ đỉnh là $I\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$

Khi $a<0$ đồ thị hàm số bậc hai bề lõm hướng lên trên và có tọa độ đỉnh là $I\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$

Đồ thị nhận đường thẳng $x=-\frac{b}{2a}$ làm trục đối xứng.



$a<0$ $\qquad$ $a>0$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: *XÁC ĐỊNH HÀM SỐ BẬC HAI*

Phương pháp giải.

Để xác định hàm số bậc hai ta làm như sau

Gọi hàm số cần tìm là $y=ax^2+bx+c,\ a\ne 0$. Căn cứ theo giả thiết bài toán để thiết lập và giải hệ phương trình với ẩn a, b, c, từ đó suy ra hàm số cần tìm.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Xác định parabol (P): $y=ax^2+bx+c,\ a\ne 0$ biết:

a) (P) đi qua A(2;3) có đỉnh I(1;2)

b) $c=2$ và (P) đi qua B(3;−4) và có trục đối xứng là $x=-\frac{3}{2}$.

c) Hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ khi $x = \frac{1}{2}$ và nhận giá trị bằng 1 khi $x = 1$.

d) (P) đi qua M(4;3) cắt Ox tại N(3;0) và P sao cho ΔINP có diện tích bằng 1 biết hoành độ điểm P nhỏ hơn 3.

Lời giải

a) Vì $A \in (P)$ nên $3 = 4a + 2b + c$ (1).

Mặt khác (P) có đỉnh I(1;2) nên $-\frac{b}{2a} = 1 \Leftrightarrow 2a + b = 0$ (2) và $I \in (P)$ suy ra $2 = a + b + c$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta có $\begin{cases} 4a + 2b + c = 3 \\ 2a + b = 0 \\ a + b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases}$

Vậy (P) cần tìm là $y = x^2 - 2x + 3$.

b) Ta có $c = 2$ và (P) đi qua $B(3;-4)$ nên $-4 = 9a + 3b + 2 \Leftrightarrow 3a + b = -2$ (4)

(P) có trục đối xứng là $x = -\frac{3}{2}$ nên $-\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow b = 3a$ thay vào (4) ta được

$3a + 3a = -2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3} \Rightarrow b = -1$.

Vậy (P) cần tìm là $y = -\frac{1}{3}x^2 - x + 2$.

c) Hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{3}{4}$ khi $x = \frac{1}{2}$ nên ta có

$-\frac{b}{2a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a + b = 0$ (5), $\frac{3}{4} = a\left(\frac{1}{2}\right)^2 + b\left(\frac{1}{2}\right) + c \Leftrightarrow a + 2b + 4c = 3$ (6) và $a > 0$

Hàm số $y = ax^2 + bx + c$ nhận giá trị bằng 1 khi $x = 1$ nên $a + b + c = 1$ (7)

Từ (5), (6) và (7) ta có $\begin{cases} a + b = 0 \\ a + 2b + 4c = 3 \\ a + b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$

Vậy (P) cần tìm là $y = x^2 - x + 1$.

d) Vì (P) đi qua M(4;3) nên $3 = 16a + 4b + c$ (8)

Mặt khác (P) cắt Ox tại N(3;0) suy ra $0 = 9a + 3b + c$ (9), (P) cắt Ox tại P nên $P(t;0)$, $t < 3$

Theo định lý Viét ta có $\begin{cases} t + 3 = -\frac{b}{a} \\ 3t = \frac{c}{a} \end{cases}$

Ta có $S_{\Delta IBC} = \frac{1}{2}IH.NP$ với H là hình chiếu của $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ lên trục hoành

Do $IH = \left|-\frac{\Delta}{4a}\right|$, $NP = 3 - t$ nên $S_{\Delta INP} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left|-\frac{\Delta}{4a}\right|.(3 - t) = 1$

$\Leftrightarrow (3-t)\left|\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}\right| = \left|\frac{2}{a}\right| \Leftrightarrow (3-t)\left|\frac{(t+3)^2}{4} - 3t\right| = \left|\frac{2}{a}\right| \Leftrightarrow (3-t)^3 = \frac{8}{|a|}$ (10)

Từ (8) và (9) ta có $7a + b = 3 \Leftrightarrow b = 3 - 7a$ suy ra $t + 3 = -\frac{3 - 7a}{a} \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{4 - t}{3}$

Thay vào (10) ta có $(3-t)^3 = \frac{8(4-t)}{3} \Leftrightarrow 3t^3 - 27t^2 + 73t - 49 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Suy ra $a = 1 \Rightarrow b = -4 \Rightarrow c = 3$.

Vậy (P) cần tìm là $y = x^2 - 4x + 3$.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 2.25: Xác định phương trình của Parabol (P): $y = x^2 + bx + c$ trong các trường hợp sau:

a) (P) đi qua điểm A(1; 0) và B(−2; −6)

b) (P) có đỉnh I(1; 4)

c) (P) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3 và có đỉnh S(−2;−1).

Hướng dẫn giải

a) Vì (P) đi qua A, B nên $\begin{cases} 0 = 1 + b + c \\ -6 = 4 - 2b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = -1 \\ 2b - c = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ c = -4 \end{cases}$.

Vậy (P): $y = x^2 + 3x - 4$.

b) Vì (P) có đỉnh I(1; 4) nên $\begin{cases} \frac{-b}{2} = 1 \\ -\frac{b^2 - 4c}{4} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = 5 \end{cases}$. Vậy (P): $y = x^2 - 2x + 5$

c) (P) cắt Oy tại điểm có tung độ bằng 3 suy ra $c = 3$

(P) có đỉnh S(−2;−1) suy ra: $\begin{cases} -\frac{b}{2a} = -2 \\ -1 = 4a - 2b + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = 1 \end{cases}$

DẠNG TOÁN 2: *XÉT SỰ BIẾN THIÊN VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC HAI.*

Phương pháp giải

Để vẽ đường parabol $y = ax^2 + bx + c$ ta thực hiện các bước như sau:

- Xác định toạ độ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$.
- Xác định trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$ và hướng bề lõm của parabol.
- Xác định một số điểm cụ thể của parabol (chẳng hạn, giao điểm của parabol với các trục toạ độ và các điểm đối xứng với chúng qua trục trục đối xứng).
- Căn cứ vào tính đối xứng, bề lõm và hình dáng parabol để vẽ parabol.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau

a) $y = x^2 + 3x + 2$ b) $y = -x^2 + 2\sqrt{2}x$

Lời giải

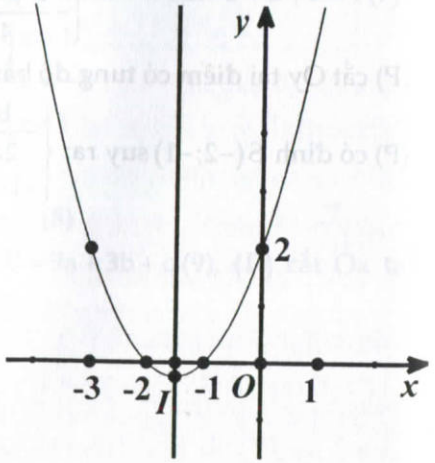
a) Ta có $-\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2}, -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{4}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$y = x^2 + 3x + 2$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra đồ thị hàm số $y = x^2 + 3x + 2$ có đỉnh là $I\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{4}\right)$, đi qua các điểm $A(-2;0), B(-1;0), C(0;2), D(-3;2)$

Nhận đường thẳng $x = -\frac{3}{2}$ làm trục đối xứng và hướng bề lõm lên trên.



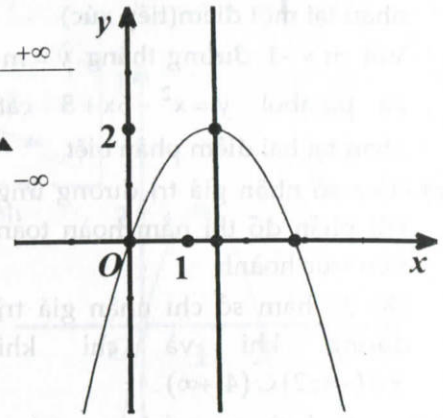
b) Ta có $-\frac{b}{2a} = \sqrt{2}, -\frac{\Delta}{4a} = 2$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$y = -x^2 + 2\sqrt{2}x$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Suy ra đồ thị hàm số $y = -x^2 + 2\sqrt{2}x$ có đỉnh là $I\left(\sqrt{2};2\right)$, đi qua các điểm $O(0;0), B\left(2\sqrt{2};0\right)$

Nhận đường thẳng $x = \sqrt{2}$ làm trục đối xứng và hướng bề lõm xuống dưới.



Ví dụ 2: Cho hàm số $y = x^2 - 6x + 8$

a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số trên

b) Sử dụng đồ thị để biện luận theo tham số m số điểm chung của đường thẳng $y = m$ và đồ thị hàm số trên

c) Sử dụng đồ thị, hãy nêu các khoảng trên đó hàm số chỉ nhận giá trị dương

d) Sử dụng đồ thị, hãy tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[-1;5]$

Lời giải

a) Ta có $-\frac{b}{2a} = 3, -\frac{\Delta}{4a} = -1$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$y = x^2 - 6x + 8$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra đồ thị hàm số $y = x^2 - 6x + 8$ có đỉnh là $I(3;-1)$, đi qua các điểm $A(2;0), B(4;0)$

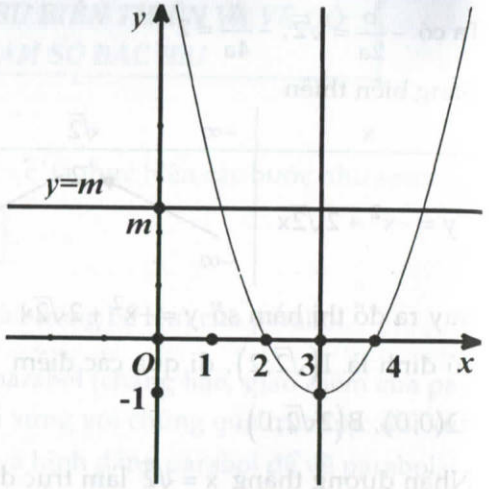
Nhận đường thẳng $x = 3$ làm trục đối xứng và hướng bề lõm lên trên

b) Đường thẳng $y = m$ song song hoặc trùng với trục hoành do đó dựa vào đồ thị ta có

Với $m < -1$ đường thẳng $y = m$ và parabol $y = x^2 - 6x + 8$ không cắt nhau

Với $m=-1$ đường thẳng $y=m$ và parabol $y=x^2-6x+8$ cắt nhau tại một điểm(tiếp xúc)

Với $m>-1$ đường thẳng $y=m$ và parabol $y=x^2-6x+8$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt



c) Hàm số nhận giá trị dương ứng với phần đồ thị nằm hoàn toàn trên trục hoành

Do đó hàm số chỉ nhận giá trị dương khi và chỉ khi $x\in(-\infty;2)\cup(4;+\infty)$.

d) Ta có $y(-1)=15$, $y(5)=3$, $y(3)=-1$, kết hợp với đồ thị hàm số suy ra

$\max\limits_{[-1;5]} y=15$ khi và chỉ khi $x=-1$

$\min\limits_{[-1;5]} y=-1$ khi và chỉ khi $x=3$

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 2.26: Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau

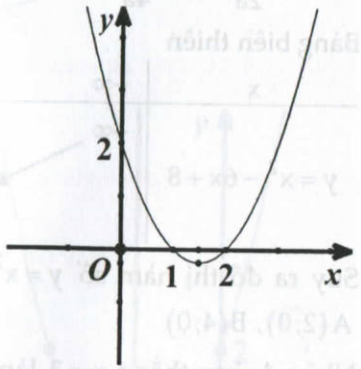
a) $y=x^2-3x+2$ b) $y=-2x^2+4x$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{3}{2}$, $-\dfrac{\Delta}{4a}=-\dfrac{1}{4}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$y=x^2-3x+2$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$



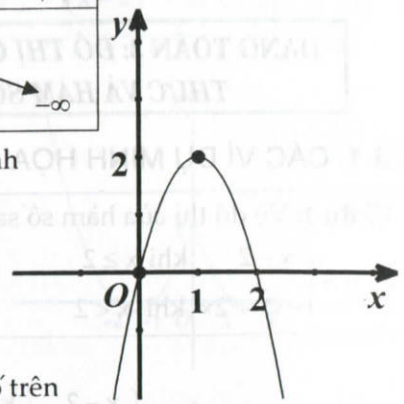
Suy ra đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$ có đỉnh là $I\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{4}\right)$, đi qua các điểm $A(2;0)$, $B(1;0)$, $C(0;2)$, $D(3;2)$

Nhận đường thẳng $x=\dfrac{3}{2}$ làm trục đối xứng và hướng bề lõm lên trên

b) Ta có $-\dfrac{b}{2a}=1$, $-\dfrac{\Delta}{4a}=2$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$y=-x^2+2\sqrt{2}x$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$



Suy ra đồ thị hàm số $y=-2x^2+4x$ có đỉnh là $I(1;2)$, đi qua các điểm $O(0;0)$, $B(2;0)$

Nhận đường thẳng $x=1$ làm trục đối xứng và hướng bề lõm xuống dưới

Bài 2.27: Cho hàm số $y=-x^2-2x+3$

a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số trên

b) Tìm m để đồ thị hàm số trên cắt đường thẳng $y=m$ tại hai điểm phân biệt

c) Sử dụng đồ thị, hãy nêu các khoảng trên đó hàm số chỉ nhận giá trị âm

d) Sử dụng đồ thị, hãy tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[-3;1]$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $-\dfrac{b}{2a}=-1$, $-\dfrac{\Delta}{4a}=4$

Bảng biến thiên

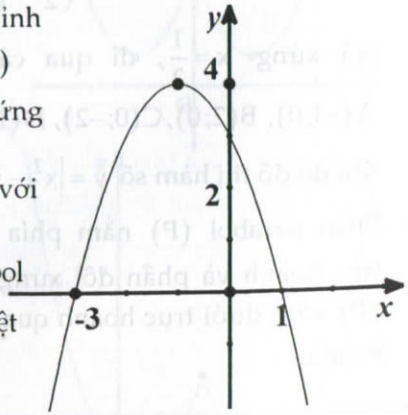
x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$y=-x^2-2x+3$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Suy ra đồ thị hàm số $y=-x^2-2x+3$ có đỉnh là $I(-1;4)$, đi qua các điểm $A(1;0)$, $B(-3;0)$

Nhận đường thẳng $x=-1$ làm trục đối xứng và hướng bề lõm xuống dưới

b) Đường thẳng $y=m$ song song hoặc trùng với trục hoành do đó dựa vào đồ thị ta có

Với $m<4$ đường thẳng $y=m$ và parabol $y=-x^2-2x+3$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt



c) Hàm số nhận giá trị dương ứng với phần đồ thị nằm hoàn toàn trên trục hoành

Do đó hàm số chỉ nhận giá trị âm khi và chỉ khi $x\in(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$.

d) $\max\limits_{[-3;1]} y = 4$ khi và chỉ khi $x = -1$

$\min\limits_{[-3;1]} y = 0$ khi và chỉ khi $x = -3,\ x = 1$.

DẠNG TOÁN 3: ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ CHO BỞI NHIỀU CÔNG THỨC VÀ HÀM SỐ CHỨA DẤU TRỊ TUYỆT ĐỐI.

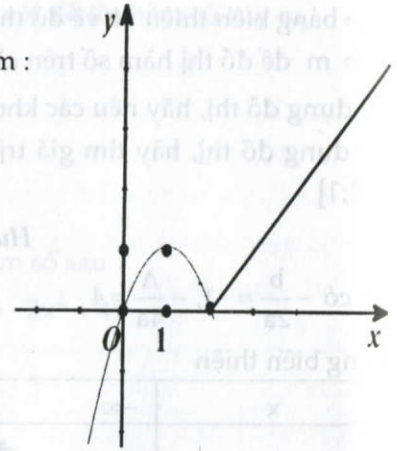
1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Vẽ đồ thị của hàm số sau

a) $y = \begin{cases} x-2 & \text{khi } x \ge 2 \\ -x^2+2x & \text{khi } x < 2 \end{cases}$ b) $y = |x^2 - x - 2|$

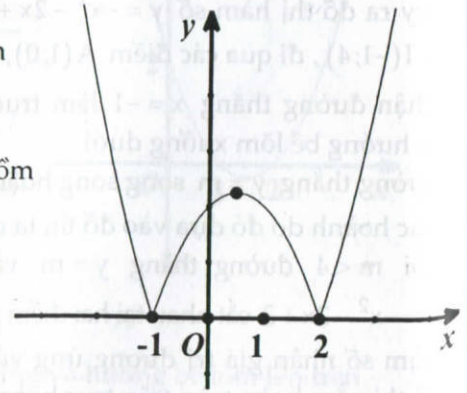
Lời giải

a) Đồ thị hàm số $y = \begin{cases} x-2 & \text{khi } x \ge 2 \\ -x^2+2x & \text{khi } x < 2 \end{cases}$ gồm :



+ Vẽ đường thẳng $y = x-2$ đi qua $A(2;0), B(0;-2)$ và lấy phần nằm bên phải của đường thẳng $x = 2$
+ Parabol $y = -x^2+2x$ có đỉnh $I(1;2)$, trục đối xứng $x = 1$, đi qua các điểm $O(0;0), C(2;0)$ và lấy phần đồ thị nằm bên trái của đường thẳng $x = 2$

b) Vẽ parabol (P) của đồ thị hàm số $y = x^2 - x - 2$ có đỉnh $I\left(\frac{1}{2};-\frac{5}{4}\right)$, trục đối xứng $x = \frac{1}{2}$, đi qua các điểm $A(-1;0), B(2;0), C(0;-2), D(1;-2)$.



Khi đó đồ thị hàm số $y = |x^2 - x - 2|$ gồm

+ Phần parabol (P) nằm phía trên trục hoành và phần đối xứng của (P) nằm dưới trục hoành qua trục hoành.

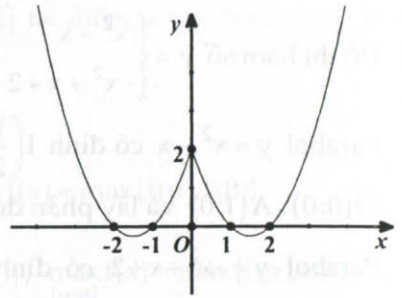
Ví dụ 2: Vẽ đồ thị của hàm số sau

a) $y = x^2 - 3|x| + 2$ b) $y = |x^2 - 3|x| + 2|$

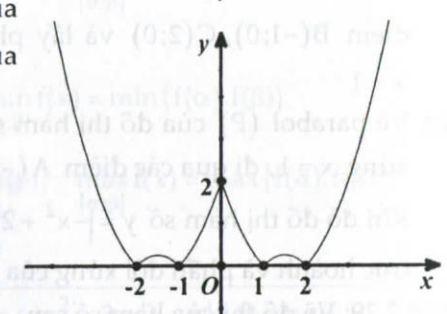
c) $y = x^2 - 3|x| + 3$ d) $y = |(x-2)^2 - 3(x-2) + 2| - 1$

Lời giải

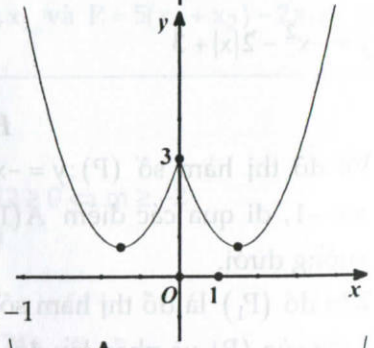
a) Vẽ đồ thị hàm số $(P): y = x^2 - 3x + 2$ có đỉnh $I\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{4}\right)$, trục đối xứng $x = \frac{3}{2}$, đi qua các điểm $A(1;0), B(2;0), C(0;2), D(3;2)$. Bề lõm hướng lên trên.



Khi đó đồ thị hàm số $y = x^2 - 3|x| + 2$ là (P_1) gồm phần bên phải trục tung của (P) và phần lấy đối xứng của nó qua trục tung.



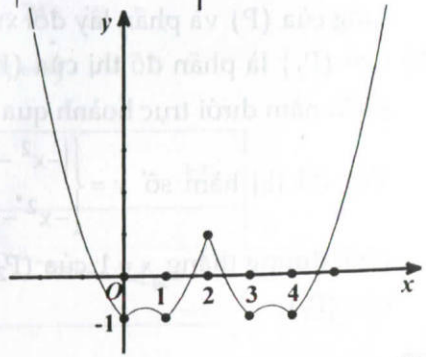
b) Đồ thị hàm số $y = |x^2 - 3|x| + 2|$ là (P_2) gồm phần phía trên trục hoành của (P_1) và phần đối xứng của (P_1) nằm phía dưới trục hoành qua trục hoành.



c) Đồ thị hàm số $y = x^2 - 3|x| + 3$ là (P_3) có được từ việc tịnh tiến (P_1) đi một đơn vị lên phía trên song song với trục tung.

d) Ta có

$y = |x^2 - 4x - 3|x-2| + 6| - 1 = |(x-2)^2 - 3|x-2| + 2| - 1$



Do đó tịnh tiến (P_1) sang phải đi hai đơn vị song song với trục hoành ta được đồ thị hàm số $y = |(x-2)^2 - 3|x-2| + 2|$, tiếp tục tịnh tiến xuống dưới một đơn vị song song với trục tung ta được đồ thị hàm số $y = |(x-2)^2 - 3|x-2| + 2| - 1$

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài tập 2.28: Vẽ đồ thị của hàm số sau

a) $y=\begin{cases}x^2-x & \text{khi } x\ge 1\\ -x^2+x+2 & \text{khi } x<1\end{cases}$ b) $y=\left|-x^2+2x+3\right|$

Hướng dẫn giải

a) Đồ thị hàm số $y=\begin{cases}x^2-x & \text{khi } x\ge 1\\ -x^2+x+2 & \text{khi } x<1\end{cases}$ gồm :

+ Parabol $y=x^2-x$ có đỉnh $I\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$, trục đối xứng $x=\frac{1}{2}$, đi qua các điểm $O(0;0)$, $A(1;0)$ và lấy phần đồ thị nằm bên phải của đường thẳng $x=1$

+ Parabol $y=-x^2+x+2$ có đỉnh $I\left(\frac{1}{2};\frac{9}{4}\right)$, trục đối xứng $x=\frac{1}{2}$, đi qua các điểm $B(-1;0)$, $C(2;0)$ và lấy phần đồ thị nằm bên trái của đường thẳng $x=1$

b) Vẽ parabol (P) của đồ thị hàm số $y=-x^2+2x+3$ có đỉnh $I(1;4)$, trục đối xứng $x=1$, đi qua các điểm $A(-1;0)$, $B(3;0)$, $C(0;3)$, $D(2;3)$.

Khi đó đồ thị hàm số $y=\left|-x^2+2x+3\right|$ gồm phần parabol (P) nằm phía trên trục hoành và phần đối xứng của (P) nằm dưới trục hoành qua trục hoành.

Bài 2.29: Vẽ đồ thị của hàm số sau

a) $y=-x^2-2|x|+3$ b) $y=\begin{cases}\left|-x^2-2x+3\right| & \text{khi } x\ge 1\\ -x^2-2|x|+3 & \text{khi } x<1\end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Vẽ đồ thị hàm số $(P): y=-x^2-2x+3$ có đỉnh $I(-1;-4)$, trục đối xứng $x=-1$, đi qua các điểm $A(1;0)$, $B(-3;0)$, $C(0;3)$, $D(-2;3)$. Bề lõm hướng xuống dưới.

Khi đó (P_1) là đồ thị hàm số $y=-x^2-2|x|+3$ là gồm phần bên phải trục tung của (P) và phần lấy đối xứng của nó qua trục tung.

b) Gọi (P_2) là phần đồ thị của (P) nằm trên trục hoành và lấy đối xứng của phần nằm dưới trục hoành qua trục Ox.

Vậy đồ thị hàm số $y=\begin{cases}\left|-x^2-2x+3\right| & \text{khi } x\ge 1\\ -x^2-2|x|+3 & \text{khi } x<1\end{cases}$ gồm phần bên đồ thị bên phải đường thẳng $x=1$ của (P_2) và phần đồ thị bên trái đường thẳng $x=1$ của (P_1).

DẠNG TOÁN 4: *ỨNG DỤNG CỦA HÀM SỐ BẬC HAI TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, LỚN NHẤT.*

Phương pháp giải.

Dựa vào đồ thị (bảng biến thiên) của hàm số $y=ax^2+bx+c$ $(a\ne 0)$ ta thấy nó đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên $[\alpha;\beta]$ tại điểm $x=\alpha$ hoặc $x=\beta$ hoặc $x=-\frac{b}{2a}$. Cụ thể:

TH 1: $a>0$

* Nếu $-\frac{b}{2a}\in[\alpha;\beta]\Rightarrow \min\limits_{[\alpha;\beta]} f(x)=f(-\frac{b}{2a});\ \max\limits_{[\alpha;\beta]} f(x)=\max\{f(\alpha),f(\beta)\}$

* Nếu $-\frac{b}{2a}\notin[\alpha;\beta]\Rightarrow \min\limits_{[\alpha;\beta]} f(x)=\min\{f(\alpha),f(\beta)\};\ \max\limits_{[\alpha;\beta]} f(x)=\max\{f(\alpha),f(\beta)\}$

TH 2: $a<0$:

* Nếu $-\frac{b}{2a}\in[\alpha;\beta]\Rightarrow \max\limits_{[\alpha;\beta]} f(x)=f(-\frac{b}{2a});\ \min\limits_{[\alpha;\beta]} f(x)=\min\{f(\alpha),f(\beta)\}$

* Nếu $-\frac{b}{2a}\notin[\alpha;\beta]\Rightarrow \min\limits_{[\alpha;\beta]} f(x)=\min\{f(\alpha),f(\beta)\};\ \max\limits_{[\alpha;\beta]} f(x)=\max\{f(\alpha),f(\beta)\}$

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho phương trình $x^2+2(m+3)x+m^2-3=0$, m là tham số.

Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1,x_2 và $P=5(x_1+x_2)-2x_1x_2$ giá trị lớn nhất.

Lời giải

Ta có $\Delta'=(m+3)^2-(m^2-3)=6m+12$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'\ge 0\Leftrightarrow 6m+12\ge 0\Leftrightarrow m\ge -2$

Theo định lý Viét ta có $\begin{cases}x_1+x_2=-2(m+3)\\ x_1x_2=m^2-3\end{cases}$

$P=-10(m+3)-2(m^2-3)=-2m^2-10m-24$

Xét hàm số $y=-2x^2-10x-24$ với $x\in[-2;+\infty)$

Bảng biến thiên

x	$-\frac{5}{2}$	-2	$+\infty$
$y=-2x^2-10x-24$		-12	$-\infty$

Suy ra $\max\limits_{[-2;+\infty)} y = -12$ khi và chỉ khi $x = -2$

Vậy $m = -2$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 1} - 3\sqrt[3]{x^2 + 1} + 1$

Lời giải

Đặt $t = \sqrt[3]{x^2 + 1},\ t \ge 1 \Rightarrow t^2 = \sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 1}$

Khi đó hàm số trở thành $y = t^2 - 3t + 1$ với $t \ge 1$.

Bảng biến thiên

x	1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$y = t^2 - 3t + 1$	-1	$\searrow$	$-\frac{5}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 1} - 3\sqrt[3]{x^2 + 1} + 1$ là $-\frac{5}{4}$ khi và chỉ khi $t = \frac{3}{2}$ hay $\sqrt[3]{x^2 + 1} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{19}{8}}$

Ví dụ 3: Cho các số thực a, b thoả mãn $ab \ne 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{a}{b} - \frac{b}{a} + 1$.

Lời giải

Đặt $t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$. Ta có $|t| = \left|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right| = \left|\frac{a}{b}\right| + \left|\frac{b}{a}\right| \ge 2\sqrt{\left|\frac{a}{b}\right| \cdot \left|\frac{b}{a}\right|} = 2$

$$t^2 = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = t^2 - 2$$

Ta có $P = t^2 - 2 - t + 1 = t^2 - t - 1$

Xét hàm số $f(t) = t^2 - t - 1$ với $t \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f(t) = t^2 - t - 1$	$+\infty$	$\searrow$	5				1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có

$\min P = \min\limits_{(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)} f(t) = 1$ khi $t = 2$ hay $2 = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \Leftrightarrow a = b$.

Ví dụ 4: Cho các số x, y thoả mãn: $x^2 + y^2 = 1 + xy$.

Chứng minh rằng $\frac{1}{9} \le x^4 + y^4 - x^2y^2 \le \frac{3}{2}$.

Lời giải

Đặt $P = x^4 + y^4 - x^2y^2$

Ta có $P = (x^2 + y^2)^2 - 3x^2y^2 = (1 + xy)^2 - 3x^2y^2 = -2x^2y^2 + 2xy + 1$

Đặt $t = xy$, khi đó $P = -2t^2 + 2t + 1$

Vì $\begin{cases} x^2 + y^2 \ge 2xy \\ x^2 + y^2 \ge -2xy \end{cases}$ nên $\begin{cases} 1 + xy \ge 2xy \\ 1 + xy \ge -2xy \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \le xy \le 1$. Do đó $-\frac{1}{3} \le t \le 1$.

Xét hàm số $f(t) = -2t^2 + 2t + 1$ trên $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$

Ta có $-\frac{b}{2a} = \frac{1}{2},\ \frac{-\Delta}{4a} = \frac{3}{2}$, ta có bảng biến thiên

t	$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		1
$f(t) = -2t^2 + 2t + 1$	$\frac{1}{9}$	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1

Từ bảng biến thiên ta có $\min\limits_{\left[-\frac{1}{3};1\right]} f(t) = \frac{1}{9} \le P \le \max\limits_{\left[-\frac{1}{3};1\right]} f(t) = \frac{3}{2}$

Suy ra điều phải chứng minh.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 2.30: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

a) $y = x^4 - 2x^2$ trên $[-2;1]$ b) $y = x^4 + 2x^3 - x$ trên $[-1;1]$.

Hướng dẫn giải

a) Đặt $t = x^2,\ x \in [-2;1] \Rightarrow t \in [0;4]$

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 2t,\ t \in [0;4]$

Suy ra $\max\limits_{[-2;1]} y = 8 \Leftrightarrow x = -2$, $\min\limits_{[-2;1]} y = -1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

b) Ta có $y = x^4 + 2x^3 - x = (x^2 + x)^2 - (x^2 + x)$

Đặt $t = x^2 + x$. Xét hàm số $t = x^2 + x$ với $x \in [-1;1]$

Ta có $-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$, bảng biến thiên là

t	-1		$-\frac{1}{2}$		1
$t=x^2+x$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	2

Suy ra $\min\limits_{[-1;1]} t=-\frac{1}{4}\le t\le \max\limits_{[-1;1]} t=2$

Khi đó, hàm số được viết lại : $f(t)=t^2-t$ với $t\in\left[-\frac{1}{4};2\right]$.

Bảng biến thiên

t	$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		2
$f(t)=t^2-t$	$\frac{5}{16}$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	2

Từ bảng biến thiên ta có

$\max\limits_{[-1;1]} y=\max\limits_{\left[-\frac{1}{4};2\right]} f(t)=2$ khi $t=2$ hay $x^2+x=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right.$

$\min\limits_{[-1;1]} y=\min\limits_{\left[-\frac{1}{4};2\right]} f(t)=-\frac{1}{4}$ khi $t=\frac{1}{2}$

hay $x^2+x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x^2+2x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

Bài 2.31: Cho x,y là các số thực thoả mãn: $2(x^2+y^2)=xy+1$.

Chứng minh rằng : $\frac{18}{25}\le 7(x^4+y^4)+4x^2y^2\le\frac{70}{33}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $7(x^4+y^4)+4x^2y^2=7\left[\left(x^2+y^2\right)^2-2x^2y^2\right]+4x^2y^2$

$=7\left[\left(\frac{xy+1}{2}\right)^2-2x^2y^2\right]+4x^2y^2$

$=\frac{1}{4}\left[-33(xy)^2+14xy+7\right]=\frac{1}{4}\left(-33t^2+14t+7\right), t=xy$

Ta có $xy+1=2(x^2+y^2)\ge 4xy\Rightarrow xy\le\frac{1}{3}$

Mặt khác $2(x^2+y^2)=xy+1\Leftrightarrow 2(x+y)^2=5xy+1\Rightarrow xy\ge-\frac{1}{5}$

Xét hàm số $f(t)=\frac{1}{4}\left(-33t^2+14t+7\right)$, $t\in\left[-\frac{1}{5};\frac{1}{3}\right]$.

Ta có $\max\limits_{\left[-\frac{1}{5};\frac{1}{3}\right]} f(t)=\frac{70}{33}\Leftrightarrow t=\frac{7}{33}$, $\min\limits_{\left[-\frac{1}{5};\frac{1}{3}\right]} f(t)=\frac{18}{25}\Leftrightarrow t=-\frac{1}{5}$

Bài 2.32: Cho các số thực không âm x, y thay đổi và thỏa mãn $x+y=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$S=\left(4x^2+3y\right)\left(4y^2+3x\right)+25xy$.

Hướng dẫn giải

Do $x+y=1$ nên :

$S=16x^2y^2+12\left(x^3+y^3\right)+9xy+25xy$

$=16x^2y^2+12\left[(x+y)^3-3xy(x+y)\right]+34xy$

$=16x^2y^2-2xy+12$.

Đặt $t=xy$, ta được: $S=16t^2-2t+12; 0\le xy\le\frac{(x+y)^2}{4}=\frac{1}{4}\Rightarrow t\in\left[0;\frac{1}{4}\right]$.

Xét hàm số $f(t)=16t^2-2t+12$ trên đoạn $\left[0;\frac{1}{4}\right]$ ta tìm được

Giá trị lớn nhất của S bằng $\frac{25}{2}$; Khi $\left\{\begin{array}{l}x+y=1\\xy=\frac{1}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow(x;y)=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Giá trị nhỏ nhất của S bằng $\frac{191}{16}$; Khi $\left\{\begin{array}{l}x+y=1\\xy=\frac{1}{16}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow(x;y)=\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4};\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)$ hoặc $(x;y)=\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4};\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)$.

ÔN TẬP CHƯƠNG II

Bài 2.33: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+3} & \text{khi } x\ge 1\\ \sqrt{2-x} & \text{khi } x<1\end{cases}$

a) Tính $f(-2);f(2)$ b) Tìm x, sao cho $f(x)=3$

Hướng dẫn giải

a) + $f(-2)=2$; + $f(2)=\dfrac{1}{5}$

b) + Khi $x\ge 1$ có $f(x)=3\Leftrightarrow \dfrac{1}{x+3}=3\Leftrightarrow x=-\dfrac{8}{3}$ (loai)

+ Khi $x<1$ có $f(x)=3\Leftrightarrow \sqrt{2-x}=3\Leftrightarrow x=-7$ (nhận)

Bài 2.34: Tìm tập xác định của hàm số sau

a) $y=\dfrac{x^2+2}{x^2-7x-8}$ b) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}+\dfrac{x-2}{x-5}$

Hướng dẫn giải

a) Hàm số xác định khi và chỉ khi: $x^2-7x-8\ne 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne -1\\ x\ne 8\end{cases}$

TXĐ $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;8\}$

b) Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases}2-x>0\\ x+1\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<2\\ x\ne -1\end{cases}$

Vậy tập xác định là $D=(-\infty;2)\setminus\{-1\}$.

Bài 2.35: Xét tính chẵn lẻ của hàm số

a) $y=\dfrac{x+\sqrt[3]{x}}{x^6-x^4+x^2-1}$ b) $y=\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{|x-1|-|1+x|}$

Hướng dẫn giải

a) TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$

Suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

$$f(-x)=\frac{-x+\sqrt[3]{-x}}{(-x)^6-(-)^4+(-x)^2-1}=-\frac{x+\sqrt[3]{x}}{x^6-x^4+x^2-1}=-f(x),\ \forall x\in D$$

Vậy hàm số đã cho là lẻ

b) TXĐ: $D=[-1;1]\setminus\{0\}$

Suy ra $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$

$$f(-x)=\frac{\sqrt{1-(-x)}-\sqrt{1+(-x)}}{|-x-1|-|1+(-x)|}=\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{|x-1|-|1+x|}=f(x),\ \forall x\in D$$

Vậy hàm số đã cho là chẵn.

Bài 2.36 : Xác định a và b để đồ thị của hàm số $y=ax+b$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 3 và đi qua điểm $A(-2;1)$.

Hướng dẫn giải

Vì đường thẳng $y=ax+b$ cắt trục hoành tại điểm có hoành tại điểm có hoành độ nên: $3a+b=0$ (1)

Vì $A(-2;1)$ thuộc đường thẳng $y=ax+b$ nên: $-2a+b=1$ (2)

Từ (1)và (2) ta có hệ pt: $\begin{cases}3a+b=0\\ -2a+b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{1}{5}\\ b=\dfrac{3}{5}\end{cases}$

Bài 2.37: Cho hàm số $y=-x^2+mx-4$ (m là tham số)

a) Với $m=5$, hãy vẽ đồ thị hàm số trên.

b) Tìm m sao cho đồ thị của hàm số nói trên là parabol nhận đường thẳng $x=2$ làm trục đối xứng.

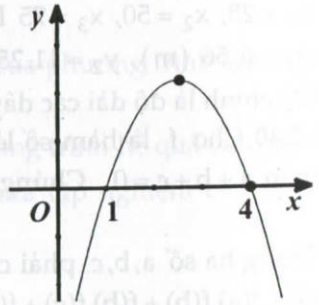
Hướng dẫn giải

a) Với $m=5$ ta có hàm số: $y=-x^2+5x-4$

Vẽ đồ thị: Đỉnh $I\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{9}{4}\right)$. Trục đối xứng: $x=\dfrac{5}{2}$.

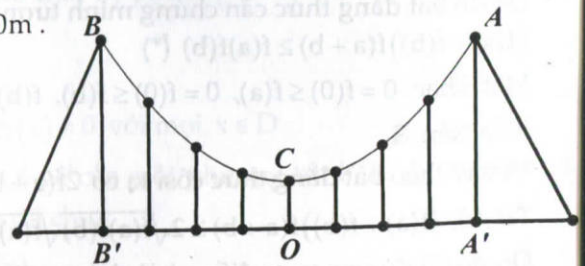
Bảng giá trị

x	1	2	$\frac{5}{2}$	3	4
y	0	2	$\frac{9}{4}$	2	0



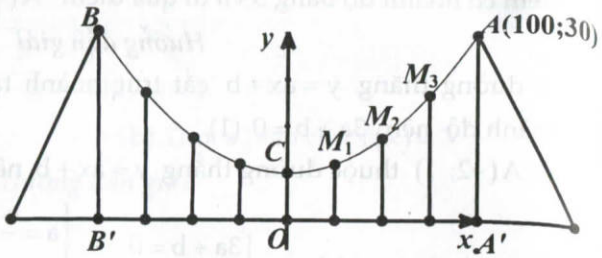
b) Để đường thẳng $x=2$ làm trục đối xứng thì $\dfrac{-m}{-2.(-1)}=2\Leftrightarrow m=4$

Bài 2.39: Dây truyền đỡ nền cầu treo có dạng Parabol ACB như hình vẽ. Đầu cuối của dây được gắn chặt vào điểm A và B trên trục AA' và BB' với độ cao 30m. Chiều dài nhịp $A'B'=200m$. Độ cao ngắn nhất của dây truyền trên nền cầu là $OC=5m$. Xác định chiều dài các dây cáp treo (thanh thẳng đứng nối nền cầu với dây truyền)?



Hướng dẫn giải

Chọn trục Oy trùng với trục đối xứng của Parabol, trục Ox nằm trên nền cầu như Hình vẽ. Khi đó ta có A(100; 30), C(0; 5), ta tìm phương trình của Parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$.



Parabol có đỉnh là C và đi qua A nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 0 \\ a.0 + b.0 + c = 5 \\ a.100^2 + b.100 + c = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{400} \\ b = 0 \\ c = 5 \end{cases}$$

Suy ra Parabol có phương trình $y = \dfrac{1}{400}x^2 + 5$. Bài toán đưa việc xác định chiều dài các dây cáp treo sẽ là tính tung độ những điểm M_1, M_2, M_3 của Parabol. Ta dễ dàng tính được tung độ các điểm có các hoành độ $x_1 = 25$, $x_2 = 50$, $x_3 = 75$ lần lượt là

$y_1 = 6{,}56$ (m), $y_2 = 11{,}25$ (m), $y_3 = 19{,}06$ (m).

Đó chính là độ dài các dây cáp treo cần tính.

Bài 2.40 Cho f là hàm số lẻ và đồng biến trên $\mathbb{R}$. a,b,c là các số thực thỏa mãn $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng $f(a).f(b) + f(b).f(c) + f(c).f(a) \le 0$.

Hướng dẫn giải

Trong ba số a,b,c phải có hai số không trái dấu thêm nữa do f hàm số lẻ nên $f(a).f(b) + f(b).f(c) + f(c).f(a) = f(-a).f(-b) + f(-b).f(-c) + f(-c).f(-a)$

và $(-a) + (-b) + (-c) = 0$. Do đó không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a \ge 0$; $b \ge 0$. Vì f là hàm số lẻ nên $f(c) = f(-a-b) = -f(a+b)$

Do đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$(f(a) + f(b))f(a+b) \ge f(a)f(b)$ (*)

Mặt khác $0 = f(0) \le f(a)$, $0 = f(0) \le f(b)$, $f(b) \le f(a+b)$ do f là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vì vậy theo bất đẳng thức côsi ta có $2f(a+b) \ge f(a) + f(b) \ge 2\sqrt{f(a)f(b)}$

Từ đó: $(f(a) + f(b))f(a+b) \ge 2\sqrt{f(a)f(b)}\sqrt{f(a)f(b)} = 2f(a)f(b) \ge f(a)f(b)$

Do đó (*) đúng suy ra điều phải chứng minh.

Chương 3 PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ PHƯƠNG TRÌNH

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa.

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có tập xác định lần lượt là D_f và D_g. Đặt $D = D_f \cap D_g$. Mệnh đề chứa biến "$f(x) = g(x)$" được gọi là ***phương trình một ẩn***; x được gọi là ***ẩn số*** (hay ***ẩn***) và D gọi là tập xác định của phương trình.

$x_0 \in D$ gọi là một ***nghiệm*** của phương trình $f(x) = g(x)$ nếu "$f(x_0) = g(x_0)$" là mệnh đề đúng.

Chú ý: Các nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ là các hoành độ giao điểm đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$.

2. Phương trình tương đương, phương trình hệ quả.

a) **Phương trình tương đương:** Hai phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ và $f_2(x) = g_2(x)$ được gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm. Kí hiệu là $f_1(x) = g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) = g_2(x)$.

- Phép biến đổi không làm thay đổi tập nghiệm của phương trình gọi là ***phép biến đổi tương đương***.

b) **Phương trình hệ quả:** $f_2(x) = g_2(x)$ gọi là phương trình hệ quả của phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ nếu tập nghiệm của nó chứa tập nghiệm của phương trình $f_1(x) = g_1(x)$.

Kí hiệu là $f_1(x) = g_1(x) \Rightarrow f_2(x) = g_2(x)$

c) **Các định lý:**

Định lý 1: Cho phương trình $f(x) = g(x)$ có tập xác định D; $y = h(x)$ là hàm số ***xác định*** trên D. Khi đó trên D, phương trình đã cho tương đương với phương trình sau

1) $f(x) + h(x) = g(x) + h(x)$

2) $f(x).h(x) = g(x).h(x)$ nếu $h(x) \ne 0$ với mọi $x \in D$

Định lý 2: Khi bình phương hai vế của một phương trình, ta được phương trình hệ quả của phương trình đã cho.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow f^2(x) = g^2(x).$$

Lưu ý: Khi giải phương trình ta cần chú ý

- Đặt điều kiện xác định(đkxđ) của phương trình và khi tìm được nghiệm của phương trình phải đối chiếu với điều kiện xác định.
- Nếu hai vế của phương trình *luôn cùng dấu* thì bình phương hai vế của nó ta thu được phương trình tương đương.
- Khi biến đổi phương trình thu được phương trình hệ quả thì khi tìm được nghiệm của phương trình hệ quả phải thử lại phương trình ban đầu để loại bỏ nghiệm ngoại lai.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: *TÌM ĐIỀU KIỆN XÁC ĐỊNH CỦA PHƯƠNG TRÌNH.*

Phương pháp giải.

- Điều kiện xác định của phương trình bao gồm các điều kiện để giá trị của $f(x), g(x)$ cùng được xác định và các điều kiện khác (nếu có yêu cầu trong đề bài)
- Điều kiện để biểu thức
  - $\sqrt{f(x)}$ xác định là $f(x) \ge 0$
  - $\dfrac{1}{f(x)}$ xác định là $f(x) \ne 0$
  - $\dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$ xác định là $f(x) > 0$

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Tìm điều kiện xác định của phương trình sau:

a) $1+\sqrt{2x-3}=\sqrt{3x-2}$ b) $\sqrt{4-2x}=\dfrac{x+1}{x^3-3x+2}$

Lời giải

a) Điều kiện xác định của phương trình là $\begin{cases}2x-3\ge 0\\3x-2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{3}{2}\\x\ge\dfrac{2}{3}\end{cases}\Leftrightarrow x\ge\dfrac{3}{2}$

b) Điều kiện xác định của phương trình là

$$\begin{cases}4-2x\ge 0\\x^3-3x+2\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2\\(x-1)\left(x^2+x-2\right)\ne 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2\\(x-1)^2(x-2)\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2\\x\ne 1\\x\ne 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<2\\x\ne 1\end{cases}$$

Ví dụ 2: Tìm điều kiện xác định của phương trình sau rồi suy ra tập nghiệm của nó:

a) $4x+\sqrt{4x-3}=2\sqrt{3-4x}+3$ b) $\sqrt{-x^2+6x-9}+x^3=27$

Lời giải

a) Điều kiện xác định của phương trình là $\begin{cases}4x-3\ge 0\\3-4x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{3}{4}\\x\le\dfrac{3}{4}\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{4}$

Thử vào phương trình thấy $x=\dfrac{3}{4}$ thỏa mãn

Vậy tập nghiệp của phương trình là $S=\left\{\dfrac{3}{4}\right\}$

b) Điều kiện xác định của phương trình là

$-x^2+6x-9\ge 0\Leftrightarrow -(x-3)^2\ge 0\Leftrightarrow x=3$

Thay $x=3$ vào thấy thỏa mãn phương trình

Vậy tập nghiệp của phương trình là $S=\{3\}$

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 3.0: Tìm điều kiện xác định của phương trình sau:

a) $\dfrac{5}{x^2-x-1}=\sqrt[3]{x}$ b) $1+\sqrt{x-2}=\sqrt{x-1}$

c) $1+\sqrt{2x-4}=\sqrt{2-4x}$ d) $\sqrt{2x-6}=\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}$

Hướng dẫn giải

a) ĐKXĐ: $x^2-x-1\ne 0\Leftrightarrow x\ne\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ b) ĐKXĐ: $\begin{cases}x-1\ge 0\\x-2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 2$

c) ĐKXĐ: $\begin{cases}2x-4\ge 0\\2-4x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in\varnothing$ d) ĐKXĐ: $\begin{cases}2x-6\ge 0\\x^2-3x+2\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 3\\x\ne 1\\x\ne 2\end{cases}$

Bài 3.1: Tìm điều kiện xác định của phương trình sau rồi suy ra tập nghiệm của nó:

a) $4x+2\sqrt{4x-3}=2\sqrt{4x-3}+3$ b) $\sqrt{-x^2+x-1}+x=1$

c) $\sqrt{2x}+\sqrt{x-2}=\sqrt{2-x}+2$ d) $\sqrt{x^3-4x^2+5x-2}+x=\sqrt{2-x}$

Hướng dẫn giải

a) ĐKXĐ: $x\ge\dfrac{3}{4}$. Dễ thấy $x=\dfrac{3}{4}$ là nghiệm của phương trình.

b) ĐKXĐ: $-x^2+x-1\ge 0\Leftrightarrow -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\ge 0\Leftrightarrow x\in\varnothing$

Vậy tập nghiệp của phương trình là $S=\varnothing$.

c) ĐKXĐ: $\begin{cases}x\ge 0\\ x-2\ge 0\\ 2-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x=2$

Thử lại phương trình thấy $x=2$ thỏa mãn

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{2\}$.

d) ĐKXĐ: $\begin{cases}x^3-4x^2+5x-2\ge 0\\ 2-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2(x-2)\ge 0\\ x\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2\end{array}\right.$

Thay vào phương trình ta có tập nghiệm của phương trình là $S=\{1\}$.

DẠNG TOÁN 2: *GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHÉP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG VÀ HỆ QUẢ*

Phương pháp giải.

Để giải phương trình ta thực hiện các phép biến đổi để đưa về phương trình tương đương với phương trình đã cho đơn giản hơn trong việc giải nó. Một số phép biến đổi thường sử dụng

- Cộng (trừ) cả hai vế của phương trình mà không làm thay đổi điều kiện xác định của phương trình ta thu được phương trình tương đương phương trình đã cho.
- Nhân (chia) vào hai vế với một biểu thức khác không và không làm thay đổi điều kiện xác định của phương trình ta thu được phương trình tương đương với phương trình đã cho.
- Bình phương hai vế của phương trình ta thu được phương trình hệ quả của phương trình đã cho.
- Bình phương hai vế của phương trình (hai vế luôn cùng dấu) ta thu được phương trình tương đương với phương trình đã cho.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau

a) $1+\frac{1}{x-3}=\frac{5}{x^2-x-6}$ b) $\frac{x^2}{\sqrt{x-2}}=\frac{1}{\sqrt{x-2}}-\sqrt{x-2}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $\begin{cases}x\ne 3\\ x^2-x-6\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne 3\\ x\ne -2\end{cases}$

Với điều kiện đó phương trình tương đương với

$1+\frac{1}{x-3}=\frac{5}{(x-3)(x+2)}\Leftrightarrow (x-3)(x+2)+x+2=5\Leftrightarrow x^2=9\Leftrightarrow x=\pm 3$

Đối chiếu với điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x=-3$.

b) ĐKXĐ: $x>2$

Với điều kiện đó phương trình tương đương với

$x^2=1-(x-2)\Leftrightarrow x^2+x-3=0\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

Đối chiếu với điều kiện ta thấy không có giá trị nào thỏa mãn

Vậy phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau

a) $|2x+1|=|x-2|$ b) $|2x+1|=x-1$

Lời giải

a) Phương trình tương đương với $(|2x+1|)^2=(|x-2|)^2$

$\Leftrightarrow 4x^2+4x+1=x^2-4x+4\Leftrightarrow 3x^2+8x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\ x=\frac{1}{3}\end{array}\right.$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=-3$ và $x=\frac{1}{3}$.

b) Ta có $|2x+1|=x-1\Rightarrow(2x+1)^2=(x-1)^2$

$\Rightarrow 4x^2+4x+1=x^2-2x+1\Leftrightarrow 3x^2+6x=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-2\end{array}\right.$

Thử vào phương trình ta thấy không có giá trị nào thỏa mãn

Vậy phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 3: Tìm nghiệm $(x;y)$ với x là số nguyên dương của phương trình sau

$$\sqrt{20-8x}+\sqrt{6x^2-y^2}=y\sqrt{7-4x}$$

Lời giải

Nếu phương trình có nghiệm $(x;y)$ thì x phải thỏa mãn

$\begin{cases}20-8x\ge 0\\ 7-4x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\frac{20}{8}\\ x\le\frac{7}{4}\end{cases}\Leftrightarrow x\le\frac{7}{4}$

Vì x là số nguyên dương nên $x=1$

Thay $x=1$ vào phương trình ta được $\sqrt{12}+\sqrt{6-y^2}=y\sqrt{3}$ (*)

Điều kiện xác định của phương trình (*) là $6-y^2 \ge 0$

$(*) \Rightarrow \sqrt{6-y^2} = \sqrt{3}(y-2) \Rightarrow 6-y^2 = 3(y-2)^2$

$\Rightarrow 4y^2 - 12y + 6 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$

Thử vào phương trình (*) thấy chỉ có $y = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$ là thỏa mãn

Vậy phương trình có nghiệm thỏa mãn đề bài là $\left(1; \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$.

Ví dụ 4: Tìm m để cặp phương trình sau tương đương

a) $mx^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0$ (1) và $(m-2)x^2 - 3x + m^2 - 15 = 0$ (2)

b) $2x^2 + mx - 2 = 0$ (3) và $2x^3 + (m+4)x^2 + 2(m-1)x - 4 = 0$ (4)

Lời giải

a) Giả sử hai phương trình (1) và (2) tương đương

Ta có $(1) \Leftrightarrow (x-1)(mx-m+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ mx - m + 2 = 0 \end{array}\right.$

Do hai phương trình tương đương nên $x = 1$ là nghiệm của phương trình (2)

Thay $x = 1$ vào phương trình (2) ta được

$(m-2) - 3 + m^2 - 15 = 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 20 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = -5 \end{array}\right.$

- Với $m = -5$: Phương trình (1) trở thành $-5x^2 + 12x - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{7}{5} \end{array}\right.$

Phương trình (2) trở thành $-7x^2 - 3x + 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{10}{7} \end{array}\right.$

Suy ra hai phương trình không tương đương

- Với $m = 4$: Phương trình (1) trở thành $4x^2 - 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = 1 \end{array}\right.$

Phương trình (2) trở thành $2x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Suy ra hai phương trình tương đương

Vậy $m = 4$ thì hai phương trình tương đương.

b) Giả sử hai phương trình (3) và (4) tương đương

Ta có $2x^3 + (m+4)x^2 + 2(m-1)x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)\left(2x^2 + mx - 2\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ 2x^2 + mx - 2 = 0 \end{array}\right.$

Do hai phương trình tương đương nên $x = -2$ cũng là nghiệm của phương trình (3)

Thay $x = -2$ vào phương trình (3) ta được $2(-2)^2 + m(-2) - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 3$

- Với $m = 3$ phương trình (3) trở thành $2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Phương trình (4) trở thành

$2x^3 + 7x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2(2x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Suy ra phương trình (3) tương đương với phương trình (4)

Vậy $m = 3$.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 3.2: Giải các phương trình sau

a) $1 + \dfrac{1}{2-x} = \dfrac{6}{4-x^2}$

b) $\sqrt{x+1}(x^2 - 16) = 0$

Hướng dẫn giải

a) ĐKXĐ : $\left\{\begin{array}{l} x \ne 2 \\ x^2 - 4 \ne 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \ne \pm 2$

Với điều kiện đó phương trình tương đương với

$4 - x^2 + x + 2 = 6 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$ (thỏa mãn)

b) ĐKXĐ: $x \ge -1$

Phương trình tương đương với $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x+1} = 0 \\ x^2 - 16 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \pm 4 \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = -1$ và $x = 4$.

Bài 3.3: Tìm m để cặp phương trình sau tương đương

a) $x^2 + mx - 1 = 0$ (1) và $(m-1)x^2 + 2(m-2)x + m - 3 = 0$ (2)

b) $(2m-2)x^2 - (2m+1)x + m^2 + m - 17 = 0$ (3)

và $(2-m)x^2 + 3x + 15 - m^2 = 0$ (4)

Hướng dẫn giải

a) Giả sử hai phương trình (1) và (2) tương đương

Ta có $(m-1)x^2+2(m-2)x+m-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ (m-1)x+m-3=0 \end{array}\right.$

Do hai phương trình tương đương nên $x=-1$ cũng là nghiệm của phương trình (1)

Thay $x=-1$ vào phương trình (1) ta được $m=0$

Với $m=0$ thay vào hai phương trình ta thấy không tương đương.

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn.

b) Cộng vế với vế để khử m^2 ta thu được phương trình mới có thể nhẩm nghiệm

Kết quả $m=4$ thì hai phương trình tương đương.

§2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI MỘT ẨN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa.

- Phương trình bậc nhất một ẩn là phương trình có dạng $ax+b=0$ với a,b là số thực và $a\neq 0$
- Phương trình bậc hai một ẩn phương trình có dạng $ax^2+bx+c=0$ với a,b,c là số thực và $a\neq 0$

2. Giải và biện luận phương trình $ax+b=0$ **(1).**

- Nếu $a\neq 0$: $(1)\Leftrightarrow x=-\dfrac{b}{a}$ do đó phương trình có nghiệm duy nhất $x=-\dfrac{b}{a}$
- Nếu $a=0$: phương trình (1) trở thành $0x+b=0$

  Th1: Với $b=0$ phương trình nghiệm đúng với mọi $x\in R$

  Th2: Với $b\neq 0$ phương trình vô nghiệm

3. Giải và biện luận phương trình $ax^2+bx+c=0$

- Nếu $a=0$: trở về giải và biện luận phương trình dạng (1)
- Nếu $a\neq 0$: $\Delta=b^2-4ac$

  TH1: $\Delta>0$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

  TH2: $\Delta=0$ phương trình có nghiệm kép $x=-\dfrac{b}{2a}$

  TH3: $\Delta<0$ phương trình vô nghiệm.

4. Định lí Vi-ét và ứng dụng.

a) Định lí Vi-ét.

Hai số x_1 và x_2 là các nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ khi và chỉ khi chúng thỏa mãn hệ thức $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ và $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

b) Ứng dụng.

- Nhẩm nghiệm của phương trình bậc hai
- Phân tích thành nhân tử: Nếu đa thức $f(x)=ax^2+bx+c$ có hai nghiệm x_1 và x_2 thì nó có thể phân tích thành nhân tử $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.
- Tìm hai số khi biết tổng và tích của chúng: Nếu hai số có tổng là S và tích là P thì chúng là nghiệm của phương trình $x^2-Sx+P=0$.
- Xét dấu của các nghiệm phương trình bậc hai:

  Cho phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ (*), kí hiệu $S=-\dfrac{b}{a}$, $P=\dfrac{c}{a}$ khi đó

  + Phương trình (*) có hai nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $P<0$
  + Phương trình (*) có hai nghiệm dương khi và chỉ khi $\begin{cases}\Delta\geq 0\\ P>0\\ S>0\end{cases}$
  + Phương trình (*) có hai nghiệm âm khi và chỉ khi $\begin{cases}\Delta\geq 0\\ P>0\\ S<0\end{cases}$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: *GIẢI VÀ BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH DẠNG* $ax+b=0$.

Phương pháp giải.

Để giải và biện luận phương trình dạng $ax+b=0$ ta dựa vào kết quả đã nêu ở trên.

Lưu ý:

- Phương trình $ax+b=0$ có nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\neq 0 \\ a=b=0 \end{array}\right.$
- Phương trình $ax+b=0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b\neq 0 \end{cases}$
- Phương trình $ax+b=0$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow a\neq 0$

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Giải và biện luận phương trình sau với m là tham số.

a) $(m-1)x+2-m=0$ b) $m(mx-1)=9x+3$

c) $(m+1)^2x=(3m+7)x+2+m$

Lời giải

a) Phương trình tương đương với $(m-1)x=m-2$

+ Với $m-1=0\Leftrightarrow m=1$: Phương trình trở thành $0x=-1$

Suy ra phương trình vô nghiệm.

+ Với $m-1\neq 0\Leftrightarrow m\neq 1$: Phương trình tương đương với $x=\dfrac{m-2}{m-1}$

Kết luận

$m=1$: Phương trình vô nghiệm

$m\neq 1$: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{m-2}{m-1}$

b) Ta có $m(mx-1)=9x+3\Leftrightarrow (m^2-9)x=m+3$

+ Với $m^2-9=0\Leftrightarrow m=\pm 3$:

- Khi $m=3$: Phương trình trở thành $0x=6$ suy ra phương trình vô nghiệm
- Khi $m=-3$: Phương trình trở thành $0x=0$ suy ra phương trình nghiệm đúng với mọi $x\in R$

+ Với $m^2-9\neq 0\Leftrightarrow m\neq\pm 3$: Phương trình tương đương với $x=\dfrac{m+3}{m^2-9}=\dfrac{1}{m-3}$

Kết luận:

$m=3$: Phương trình vô nghiệm

$m=-3$: Phương trình nghiệm đúng với mọi $x\in R$

$m\neq\pm 3$: Phương trình có nghiệm $x=\dfrac{1}{m-3}$

c) Phương trình tương đương với $\left[(m+1)^2-3m-7\right]x=2+m$

$\Leftrightarrow (m^2-m-6)x=2+m$

+ Với $m^2-m-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\m=-2\end{array}\right.$:

- Khi $m=3$: Phương trình trở thành $0x=5$ suy ra phương trình vô nghiệm
- Khi $m=-2$: Phương trình trở thành $0x=0$ suy ra phương trình nghiệm đúng với mọi $x\in R$

+ Với $m^2-m-6\neq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\neq 3\\m\neq -2\end{array}\right.$:

Phương trình tương đương với $x=\dfrac{m+2}{m^2-m-6}=\dfrac{1}{m-3}$.

Kết luận:

$m=3$: Phương trình vô nghiệm

$m=-2$: Phương trình nghiệm đúng với mọi $x\in R$

$m\neq 3$ và $m\neq -2$: Phương trình có nghiệm $x=\dfrac{1}{m-3}$.

Ví dụ 2: Giải và biện luận phương trình sau với a,b là tham số.

a) $a^2(x-a)=b^2(x-b)$ b) $b(ax-b+2)=2(ax+1)$

Lời giải

a) Ta có $a^2(x-a)=b^2(x-b)\Leftrightarrow (a^2-b^2)x=a^3-b^3$

+ Với $a^2-b^2=0\Leftrightarrow a=\pm b$

- Khi $a=b$: Phương trình trở thành $0x=0$ suy ra phương trình nghiệm đúng với mọi $x\in R$
- Khi $a=-b$ và $b\neq 0$: Phương trình trở thành $0x=-2b^3$ suy ra phương trình vô nghiệm

(Trường hợp $a=-b,b=0\Rightarrow a=b=0$ thì rơi vào trường hợp $a=b$)

+ Với $a^2-b^2\neq 0\Leftrightarrow a\neq\pm b$:

Phương trình tương đương với $x=\dfrac{a^3-b^3}{a^2-b^2}=\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}$

Kết luận

$a=b$: phương trình nghiệm đúng với mọi $x\in R$

$a=-b$ và $b\neq 0$: phương trình vô nghiệm

$a\neq\pm b$: Phương trình có nghiệm là $x=\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}$

b) Ta có $b(ax-b+2)=2(ax+1)\Leftrightarrow a(b-2)x=b^2-2b+2$

+ Với $a(b-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\b=2\end{array}\right.$

- Khi $a=0$: Phương trình trở thành $0x=b^2-2b+2$,

do $b^2-2b+2=(b-1)^2+1>0$ nên phương trình vô nghiệm.

- Khi $b=2$: Phương trình trở thành $0x=2$ suy ra phương trình vô nghiệm

+ Với $a(b-2)\neq 0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a\neq 0\\b\neq 2\end{array}\right.$: Phương trình tương đương với $x=\dfrac{b^2-2b+2}{a(b-2)}$.

Kết luận

$a=0$ hoặc $b=2$ thì phương trình vô nghiệm

$a\neq 0$ và $b\neq 2$ thì phương trình có nghiệm là $x=\dfrac{b^2-2b+2}{a(b-2)}$

Ví dụ 3: Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất.

a) $(m^2-m)x=2x+m^2-1$

b) $m(4mx-3m+2)=x(m+1)$

Lời giải

a) Ta có $(m^2-m)x=2x+m^2-1\Leftrightarrow(m^2-m-2)x=m^2-1$

Phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow a\neq 0$ hay $m^2-m-2\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq -1\\ m\neq 2\end{cases}$

Vậy với $m\neq -1$ và $m\neq 2$ thì phương trình có nghiệm duy nhất.

b) Ta có $m(4mx-3m+2)=x(m+1)\Leftrightarrow\left(4m^2-m-1\right)x=3m^2-2m$

Phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow a\neq 0$ hay $4m^2-m-1\neq 0\Leftrightarrow m\neq\frac{1\pm\sqrt{17}}{8}$

Vậy với $m\neq\frac{1\pm\sqrt{17}}{8}$ thì phương trình có nghiệm duy nhất

Ví dụ 4: Tìm m để đồ thị hai hàm số sau không cắt nhau

$y=(m+1)x^2+3m^2x+m$ và $y=(m+1)x^2+12x+2$.

Lời giải

Đồ thị hai hàm số không cắt nhau khi và chỉ khi phương trình

$(m+1)x^2+3m^2x+m=(m+1)x^2+12x+2$ vô nghiệm

$\Leftrightarrow 3\left(m^2-4\right)x=2-m$ vô nghiệm $\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-4=0\\ 2-m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\pm 2\\ m\neq 2\end{cases}\Leftrightarrow m=-2$

Vậy với $m=-2$ là giá trị cần tìm.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 3.4: Giải và biện luận phương trình sau với m là tham số.

a) $(2m-4)x+2-m=0$ b) $(m+1)x=(3m^2-1)x+m-1$

Hướng dẫn giải

a) Phương trình tương đương với $(2m-4)x=m-2$

+ Với $2m-4=0\Leftrightarrow m=2$: Phương trình trở thành $0x=0$

Suy ra phương trình nghiệm đúng với mọi x.

+ Với $2m-4\neq 0\Leftrightarrow m\neq 2$: Phương trình tương đương với $x=-1$

Kết luận

$m=2$: Phương trình nghiệm đúng với mọi x

$m\neq 2$: Phương trình có nghiệm duy nhất $x=-1$.

b) Phương trình tương đương với $\left(3m^2-m-2\right)x=1-m$

+ Với $3m^2-m-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-\frac{2}{3}\end{array}\right.$:

- Khi $m=1$: Phương trình trở thành $0x=0$ phương trình nghiệm đúng với mọi x.
- Khi $m=-\frac{2}{3}$: Phương trình trở thành $0x=\frac{5}{3}$ suy ra phương trình vô nghiệm

+ Với $3m^2-m-2\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 1\\ m\neq -\frac{2}{3}\end{cases}$: PT $\Leftrightarrow x=\frac{1-m}{3m^2-m-2}=\frac{-1}{3m+2}$.

Kết luận: $m=-\frac{2}{3}$: Phương trình vô nghiệm

$m=1$: Phương trình nghiệm đúng với mọi x

$m=-\frac{2}{3}$ và $m=1$: Phương trình có nghiệm $x=\frac{-1}{3m+2}$

Bài 3.5: Giải và biện luận các phương trình sau:

a) $\frac{x+a-b}{a}-\frac{x+b-a}{b}=\frac{b^2-a^2}{ab}$ (1) b) $\frac{ax-1}{x-1}+\frac{2}{x+1}=\frac{a\left(x^2+1\right)}{x^2-1}$ (2)

Hướng dẫn giải

a) ĐK: $a\neq 0; b\neq 0$.

(1) $\Leftrightarrow b(x+a-b)-a(x+b-a)=b^2-a^2$

$\Leftrightarrow bx+ab-b^2-ax-ab+a^2=b^2-a^2$

$\Leftrightarrow(b-a)x=2(b-a)(b+a)$

- Nếu $b-a\neq 0\Rightarrow b\neq a$ thì $x=\frac{2(b-a)(b+a)}{b-a}=2(b+a)$
- Nếu $b-a=0\Rightarrow b=a$ thì phương trình có vô số nghiệm.

Vậy:

- Với $b\neq a$, phương trình có nghiệm duy nhất $x=2(b+a)$.
- Với $b=a$, phương trình có vô số nghiệm

b) ĐKXĐ: $x\neq\pm 1$

$\Leftrightarrow(ax-1)(x+1)+2(x-1)=a\left(x^2+1\right)$

$\Leftrightarrow ax^2+ax-x-1+2x-2=ax^2+a\Leftrightarrow(a+1)x=a+3$

- Nếu $a+1\neq 0\Rightarrow a\neq -1$ thì $x=\frac{a+3}{a+1}$
- Nếu $a+1=0\Rightarrow a=-1$ thì phương trình vô nghiệm.

Vậy:

- Với $a\neq -1$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{a+3}{a+1}$
- Với $a=-1$ thì phương trình vô nghiệm.

Bài 3.6: Tìm m để phương trình sau vô nghiệm.

a) $(m^2-m)x=2x+m^2-1$ b) $m^2(x-m)=x-3m+2$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $(m^2-m)x=2x+m^2-1\Leftrightarrow(m^2-m-2)x=m^2-1$

Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b\neq 0\end{cases}$ hay $\begin{cases}m^2-m-2=0\\m^2-1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m=2$

Vậy với $m=2$ thì phương trình vô nghiệm

b) Ta có PT $\Leftrightarrow(m^2-1)x=m^3-3m+2$

Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b\neq 0\end{cases}$ hay $\begin{cases}m^2-1=0\\m^3-3m+2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m=-1$

Vậy với $m=-1$ thì phương trình vô nghiệm.

Bài 3.7: Tìm điều kiện của a,b để phương trình sau có nghiệm .

a) $a(bx-a+2)=(a+b-1)x+1$ b) $\dfrac{2x-a}{a}-b=\dfrac{2x-b}{b}-a\ (a,b\neq 0)$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $a(bx-a+2)=(a+b-1)x+1\Leftrightarrow(ab-a-b+1)x=a^2-2a+1$

$\Leftrightarrow(a-1)(b-1)x=(a-1)^2$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(a-1)(b-1)\neq 0\\(a-1)(b-1)=0\\(a-1)^2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a\neq 1\\b\neq 1\end{cases}\\\begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$ đúng với mọi a, b

Vậy $a,b\in\mathbb{R}$ là điều kiện cần tìm.

b) Phương trình tương đương với

$b(2x-a)-ab^2=a(2x-b)-a^2b\Leftrightarrow 2(a-b)x=ab(a-b)$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a-b\neq 0\\\begin{cases}a-b=0\\ab(a-b)=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a\neq b\\a=b\end{array}\right.$ đúng với mọi a,b

Vậy với mọi a,b thì phương trình có nghiệm.

DẠNG TOÁN 2: *GIẢI VÀ BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH DẠNG* $ax^2+bx+c=0$.

Phương pháp giải.

Để giải và biện luận phương trình dạng $ax^2+bx+c=0$ ta làm theo như các bước đã nêu ở trên.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Giải và biện luận phương trình sau với m là tham số.

a) $x^2-x+m=0$ b) $(m+1)x^2-2mx+m-2=0$

Lời giải

a) Ta có $\Delta=1-4m$

Với $\Delta>0\Leftrightarrow 1-4m>0\Leftrightarrow m<\dfrac{1}{4}$:

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4m}}{2}$

Với $\Delta=0\Leftrightarrow 1-4m=0\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{4}$: Phương trình có nghiệm kép $x=\dfrac{1}{2}$

Với $\Delta<0\Leftrightarrow 1-4m<0\Leftrightarrow m>\dfrac{1}{4}$: Phương trình vô nghiệm

Kết luận

$m<\dfrac{1}{4}$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4m}}{2}$

$m=\dfrac{1}{4}$: Phương trình có nghiệm kép $x=\dfrac{1}{2}$

$m>\dfrac{1}{4}$: Phương trình vô nghiệm

b)+ TH1: Với $m+1=0\Leftrightarrow m=-1$,

khi đó phương trình trở thành $2x-3=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$

+ TH2: Với $m+1\neq 0\Leftrightarrow m\neq -1$ khi đó phương trình trên là phương trình bậc hai

Ta có $\Delta'=m^2-(m-2)(m+1)=m+2$

Khi $\Delta>0\Leftrightarrow m+2>0\Leftrightarrow m>-2$ khi đó phương trình có hai nghiệm ph

biệt $x=\dfrac{m\pm\sqrt{m+2}}{m+1}$

Khi $\Delta=0\Leftrightarrow m+2=0\Leftrightarrow m=-2$ khi đó phương trình có nghiệm là $x=2$

Khi $\Delta < 0 \Leftrightarrow m+2<0 \Leftrightarrow m<-2$ khi đó phương trình vô nghiệm.

Kết luận

$m=-1$: phương trình có nghiệm là $x=\frac{3}{2}$

$m=-2$: phương trình có nghiệm là $x=2$

$m>-2$ và $m\neq -1$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=\frac{m\pm\sqrt{m+2}}{m+1}$

$m<-2$: phương trình vô nghiệm

Ví dụ 2: Giải và biện luận phương trình sau với a, b là tham số.

$$ax^2-2(a+b)x+a+2b=0$$

Lời giải

+ TH1: Với $a=0$ phương trình trở thành $-2bx+2b=0 \Leftrightarrow bx=b$

Khi $b=0$ phương trình là $0x=0$ do đó phương trình nghiệm đúng với mọi x

Khi $b\neq 0$ phương trình có nghiệm là $x=1$

+ TH2: Với $a\neq 0$ phương trình là phương trình bậc hai

Ta có $\Delta'=(a+b)^2-a(a+2b)=b^2$

Khi $b=0$ phương trình có nghiệm kép $x=\frac{a+b}{a}$

Khi $b\neq 0$ phương trình có hai nghiệm phân biệt là $\left[\begin{array}{l} x=\frac{a+b+b}{a}=\frac{a+2b}{a} \\ x=\frac{a+b-b}{a}=1 \end{array}\right.$

Kết luận

$a=b=0$ phương trình nghiệm đúng với mọi x

$a=0$ và $b\neq 0$ phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$

$a\neq 0$ và $b=0$ phương trình có nghiệm kép $x=\frac{a+b}{a}$

$a\neq 0$ và $b\neq 0$ phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x=\frac{a+2b}{a}$ và $x=1$.

Ví dụ 3: Tìm m để phương trình $mx^2+x-m+1=0$

a) Có nghiệm kép. b) Có hai nghiệm phân biệt

Lời giải

a) Với $m=0$ phương trình trở thành phương trình bậc nhất $x+1=0$ suy ra $m=0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m\neq 0$ phương trình trên là phương trình bậc hai nên nó có nghiệm kép khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ 1-4m(m+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ 4m^2-4m+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$$

Vậy $m=\frac{1}{2}$ thì phương trình có nghiệm kép

b) Với $m=0$ phương trình trở thành phương trình bậc nhất $x+1=0$ suy ra $m=0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m\neq 0$ phương trình trên là phương trình bậc hai nên nó có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\Delta>0 \Leftrightarrow 1-4m(m+1)>0 \Leftrightarrow 4m^2-4m+1>0 \Leftrightarrow (2m-1)^2>0 \Leftrightarrow m\neq\frac{1}{2}$$

Vậy $m\neq 0$ và $m\neq\frac{1}{2}$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 3.8: Tìm m để phương trình $x^2-3mx+(2m^2-m-1)=0$ có nghiệm kép tìm nghiệm kép đó.

Hướng dẫn giải

$$\Delta=9m^2-4(2m^2-m-1)=9m^2-8m^2+4m+4=(m+2)^2$$

Phương trình có nghiệm kép khi $\Delta=(m+2)^2=0 \Rightarrow m=-2$

Nghiệm kép đó là $x_1=x_2=\frac{3m}{2}=\frac{-6}{2}=-3$.

Bài 3.9: Cho phương trình: $mx^2-2mx+m+1=0$

a) Giải phương trình đã cho khi $m=-2$.

b) Tìm m để phương trình đã cho có nghiệm

Hướng dẫn giải

a) Với $m=-2$ ta có phương trình: $-2x^2+4x-1=0 \Leftrightarrow 2x^2-4x+1=0$, phương trình này có hai nghiệm phân biệt $x=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$.

b) Với $m=0$ ta thấy phương trình vô nghiệm

Với $m\neq 0$ thì phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$\Delta'=m^2-m(m+1)\geq 0 \Leftrightarrow m<0$.

Bài 3.10: Giải và biện luận phương trình

a) $(m-2)x^2-2(m+1)x+m-5=0$ b) $(m-2)x^2-(2m-1)x+m+2=0$

Hướng dẫn giải

a) * $m-2=0\Leftrightarrow m=2$: Pt $\Leftrightarrow -6x-3=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

* $m-2\neq 0\Leftrightarrow m\neq 2: \Delta'=(m+1)^2-(m-2)(m-5)=9m-9=9(m-1)$

+ $\Delta'<0\Leftrightarrow 9(m-1)<0\Leftrightarrow m<1$: Phương trình vô nghiệm.

+ $\Delta'=0\Leftrightarrow 9(m-1)=0\Leftrightarrow m=1$: Phương trình có nghiệm kép $x=\frac{m+1}{m-2}=-2$.

+ $\Delta'>0\Leftrightarrow 9(m-1)>0\Leftrightarrow m>1$: Phương trình có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\frac{m+1+3\sqrt{m-1}}{m-2} \\ x=\frac{m+1-3\sqrt{m-1}}{m-2} \end{array}\right.$$

Kết luận:

+ $m<1$: Phương trình vô nghiệm

+ $m=1$: phương trình có nghiệm $x=-2$

+ $m=2$: phương trình có nghiệm $x=-\frac{1}{2}$

+ $1<m\neq 2$: phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\left[\begin{array}{l} x=\frac{m+1+3\sqrt{m-1}}{m-2} \\ x=\frac{m+1-3\sqrt{m-1}}{m-2} \end{array}\right.$.

b) * $m-2=0\Leftrightarrow m=2$, khi đó $(1)\Leftrightarrow -3x+4=0\Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$.

* $m\neq 2$, khi đó (1) là phương trình bậc hai có: $\Delta=-4m+17$.

i) $m>\frac{17}{4}\Rightarrow\Delta<0\Rightarrow$ (1) vô nghiệm

ii) $m=\frac{17}{4}\Rightarrow\Delta=0\Rightarrow$ (1) có nghiệm kép: $x_1=x_2=\frac{2m-1}{2(m-2)}=\frac{10}{3}$.

iii) $m<\frac{17}{4}\Rightarrow\Delta>0\Rightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt

$$x_1=\frac{2m-1+\sqrt{-4m+17}}{2(m-2)};\ x_2=\frac{2m-1-\sqrt{-4m+17}}{2(m-2)}.$$

Kết luận:

* $m=2$ phương trình có một nghiệm $x=\frac{4}{3}$

* $m>\frac{17}{4}$ phương trình vô nghiệm.

* $m=\frac{17}{4}$ phương trình có nghiệm kép $x=\frac{10}{3}$.

* $\left\{\begin{array}{l} m<\frac{17}{4} \\ m\neq 2 \end{array}\right.$ phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_{1,2}=\frac{2m-1\pm\sqrt{-4m+17}}{2(m-2)}$.

Bài 3.11: Tùy thuộc vào giá trị của tham số m, hãy tìm hoành độ giao điểm của đường thẳng $d: y=2x+m$ và Parabol (P):

$$y=(m-1)x^2+2mx+3m-1.$$

Hướng dẫn giải

Hoành độ giao điểm của đường thẳng d và Parabol (P) là nghiệm của :

$(m-1)x^2+2mx+3m-1=2x+m\Leftrightarrow(m-1)x^2+2(m-1)x+2m-1=0$ (*)

- Với $m=1$ ta thấy (*) vô nghiệm nên d và (P) không có giao điểm
- Với $m\neq 1$ thì (*) là phương trình bậc hai có
- $\Delta'=(m-1)^2-(m-1)(2m-1)=-m(m-1)$

Do đó ta có các trường hợp sau:

TH1: Nếu $m\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$ thì $\Delta'<0$ nên (*) vô nghiệm nên d và (P) không có giao điểm

TH2: Nếu $m=0$ thì $\Delta'=0$ và (*) có một nghiệm $x=-1$

TH3: Nếu $m\in(0;1)$ thì $\Delta'>0$ và (*) có hai nghiệm phân biệt

$$x_{1,2}=-1\pm\frac{\sqrt{m(1-m)}}{m-1}.$$

DẠNG TOÁN 3: *MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ VI-ÉT.*

Loại 1: Nhẩm nghiệm phương trình bậc hai, phân tích thành nhân tử.

Ví dụ 1: Cho phương trình $2x^2-mx+5=0$. Biết phương trình có một nghiệm là 2. Tìm m và tìm nghiệm còn lại

Lời giải

Cách 1: Vì phương trình có nghiệm nên theo hệ thức Viét ta có $x_1x_2=\frac{5}{2}$

Giả sử $x_1=2$ suy ra $x_2=\frac{5}{4}$.

Mặt khác $x_1+x_2=\frac{m}{2}\Rightarrow 2+\frac{5}{4}=\frac{m}{2}\Rightarrow m=\frac{13}{2}$.

Vậy $m=\frac{13}{2}$ và nghiệm còn lại là $\frac{5}{4}$.

Cách 2: Thay $x=2$ vào phương trình ta được $8-2m+5=0 \Leftrightarrow m=\frac{13}{2}$.

Theo hệ thức Viét ta có $x_1x_2=\frac{5}{2}$ mà $x_1=2$ nên $x_2=\frac{5}{4}$.

Vậy $m=\frac{13}{2}$ và nghiệm còn lại là $\frac{5}{4}$.

Ví dụ 2: Phân tích đa thức sau thành nhân tử

a) $f(x)=3x^2-14x+8$ b) $g(x)=-x^4+5x^2-4$

c) $P(x;y)=6x^2-11xy+3y^2$. d) $Q(x;y)=2x^2-2y^2-3xy+x-2y$

Lời giải

a) Phương trình $3x^2-14x+8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{2}{3} \\ x=4 \end{array}\right.$

Suy ra $f(x)=3\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-4)=(3x-2)(x-4)$

b) Phương trình $-x^4+5x^2-4=0 \Leftrightarrow -\left(x^2\right)^2+5x^2-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ x^2=4 \end{array}\right.$

Suy ra $g(x)=-\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)=-(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$

c) Xét phương trình $6x^2-11xy+3y^2=0$ ẩn x.

$\Delta_x=(11y)^2-4.18y^2=49y^2$

Suy ra phương trình có nghiệm là $x=\frac{11y\pm 7y}{12} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{y}{3} \\ x=\frac{3y}{2} \end{array}\right.$

Do đó $P(x;y)=6\left(x-\frac{y}{3}\right)\left(x-\frac{3y}{2}\right)=(3x-y)(2x-3y)$

d) Xét phương trình $2x^2-2y^2-3xy+x-2y=0$ (ẩn x)

$\Leftrightarrow 2x^2+(1-3y)x-2y^2-2y=0$

$\Delta_x=(1-3y)^2-8\left(-2y^2-2y\right)=25y^2+10y+1=(5y+1)^2$

Suy ra phương trình có nghiệm là $x=\frac{3y-1\pm(5y+1)}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2y \\ x=\frac{-y-1}{2} \end{array}\right.$

Do đó $Q(x;y)=2(x-2y)\left(x-\frac{-y-1}{2}\right)=(x-2y)(2x+y+1)$

Loại 2: **Bài toán liên quan đến biểu thức đối xứng hai nghiệm x_1, x_2 của phương trình bậc hai.**

Ví dụ 3: Cho phương trình $x^2-2(m+1)x+m^2+2=0$ với m là tham số. Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ sao cho

a) $x_1^3+x_2^3=2x_1x_2(x_1+x_2)$

b) $\left|x_1^4-x_2^4\right|=16m^2+64m$

c) $A=x_1x_2-2(x_1+x_2)-6$ đạt giá trị nhỏ nhất

d) $B=\sqrt{2\left(x_1^2+x_2^2\right)+16}-3x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất

Lời giải

Ta có phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2 \Leftrightarrow \Delta' \geq 0$

$\Leftrightarrow (m+1)^2-\left(m^2+2\right)\geq 0 \Leftrightarrow m\geq \frac{1}{2}$ (*)

Theo Viet ta có: $\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2=2m+2 \\ x_1.x_2=m^2+2 \end{array}\right.$

a) Ta có $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)$

Suy ra

$x_1^3+x_2^3=2x_1x_2(x_1+x_2) \Leftrightarrow (x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=2x_1x_2(x_1+x_2)$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2)\left[(x_1+x_2)^2-5x_1x_2\right]=0$

Suy ra $(2m+2)\left[(2m+2)^2-5\left(m^2+2\right)\right]=0 \Leftrightarrow 2(m+1)\left(-m^2+8m-6\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+1=0 \\ -m^2+8m-6=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=4\pm\sqrt{10} \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện (*) ta thấy chỉ có $m=4\pm\sqrt{10}$ thỏa mãn

Vậy $m=4\pm\sqrt{10}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Ta có $\left|x_1^4-x_2^4\right|=\left|\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(x_1^2-x_2^2\right)\right|=\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]|x_1-x_2||x_1+x_2|$

Mà

$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{(2m+2)^2-4\left(m^2+2\right)}=\sqrt{8m-4}$

Suy ra: $\left|x_1^4-x_2^4\right|=\left[(2m+2)^2-2\left(m^2+2\right)\right]\sqrt{8m-4}|2m+2|$

$=\left(2m^2+8m\right)\sqrt{8m-4}|2m+2|$

Suy ra: $\left|x_1^4 - x_2^4\right| = 16m^2 + 64m$

$\Leftrightarrow \left(2m^2 + 8m\right)\sqrt{8m-4}\,|2m+2| = 16m^2 + 64m$

$\Leftrightarrow \left(m^2 + 4m\right)\left(\sqrt{8m-4}\,|2m+2| - 8\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m^2 + 4m = 0 & (1) \\ \sqrt{8m-4}\,|2m+2| = 8 & (2) \end{array}\right.$

Ta có $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = -4 \end{array}\right.$ (loại)

$(2) \Leftrightarrow (8m-4)(2m+2)^2 = 64 \Leftrightarrow 32m^3 + 48m^2 - 80 = 0$

$\Leftrightarrow m = 1$ (thỏa mãn (*))

Vậy $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

c) Ta có $A = x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) - 6 = m^2 + 2 - 2(2m+2) - 6 = m^2 - 4m - 8$

$\Rightarrow A = (m-2)^2 - 12 \geq -12$

Suy ra $\min A = -12 \Leftrightarrow m = 2$, $m = 2$ thỏa mãn (*)

Vậy với $m = 2$ thì biểu thức A đạt giá trị nhỏ nhất.

d) $B = \sqrt{2\left(x_1^2 + x_2^2\right) + 16} - 3x_1x_2 = \sqrt{2(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 + 16} - 3x_1x_2$

$= \sqrt{2(2m+2)^2 - 4\left(m^2+2\right) + 16} - 3\left(m^2+2\right) = \sqrt{4m^2 + 16m + 16} - 3\left(m^2+2\right)$

$= 2m + 4 - 3\left(m^2+2\right) = -3m^2 + 2m - 2$

Xét hàm số $y = -3m^2 + 2m - 2$ với $m \geq \frac{1}{2}$

Bảng biến thiên

x	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
y	$-\frac{7}{4}$	$\searrow$ $-\infty$

Suy ra giá trị $\max\limits_{m \geq \frac{1}{2}} y = -\frac{7}{4}$ khi $m = \frac{1}{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức B là $-\frac{7}{4}$ khi $m = \frac{1}{2}$.

Ví dụ 4: Cho phương trình $x^2 - mx + m - 1 = 0$ với m là tham số.

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi m

b) Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m

c) Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức $A = \dfrac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)}$

Lời giải

a) Ta có $\Delta = m^2 - 4(m-1) = (m-2)^2 \geq 0$ nên phương trình có nghiệm với mọi giá trị của m

b) Theo hệ thức Viét ta có: $x_1 + x_2 = m$ và $x_1x_2 = m - 1$

Suy ra hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m là

$x_1x_2 = x_1 + x_2 - 1$

c) Ta có $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = m^2 - 2m + 2$.

Suy ra $A = \dfrac{2x_1x_2 + 3}{x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1x_2 + 1)} = \dfrac{2m+1}{m^2+2}$

Vì $A - 1 = \dfrac{2m+1}{m^2+2} - 1 = \dfrac{2m+1-m^2-2}{m^2+2} = -\dfrac{(m-1)^2}{m^2+2} \leq 0, \forall m \Rightarrow A \leq 1, \forall m$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m = 1$

Và $A + \dfrac{1}{2} = \dfrac{2m+1}{m^2+2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{2(2m+1) + m^2 + 2}{2\left(m^2+2\right)} = \dfrac{(m+2)^2}{2\left(m^2+2\right)} \geq 0, \forall m \Rightarrow A \geq -\dfrac{1}{2}, \forall m$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m = -2$

Vậy $\max A = 1$ khi và chỉ khi $m = 1$, $\min A = -\dfrac{1}{2}$ khi và chỉ khi $m = -2$

Chú ý: Để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \dfrac{2m+1}{m^2+2}$ ta làm như sau

Xét $A - k = \dfrac{-km^2 + 2m - 2k + 1}{m^2 + 2}$. Khi đó để biểu thức đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất thì tử số là biểu thức $f(m) = -km^2 + 2m - 2k + 1$ phải biểu diễn được dưới dạng bình phương

hay $\Delta_m = 0 \Leftrightarrow 1 + k(1-2k) = 0 \Leftrightarrow -2k^2 + k + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Vì vậy ta mới đi xét như trên.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 3.12: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình: $-x^2+3x+1=0$. Tính giá trị của các biểu thức:

$A=x_1^2+x_2^2;\ B=x_1^3(x_1-1)+x_2^3(x_2-1);\ C=\left|\frac{1}{x_1^2}-\frac{1}{x_2^2}\right|$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\Delta=3^2+4=13>0$ nên phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Theo định lí Viét ta có: $x_1+x_2=3,\ x_1x_2=-1$.

Khi đó: $A=11,\ B=83,\ C=3\sqrt{13}$.

Bài 3.13: Tìm m để phương trình $3x^2+4(m-1)x+m^2-4m+1=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$.

Hướng dẫn giải

Trước hết phương trình phải có hai nghiệm khác 0 nên:

$$\begin{cases}\Delta'=m^2+4m+1>0\\ \frac{c}{a}=\frac{m^2-4m+1}{3}\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+4m+1>0\\ m^2-4m+1\neq 0\end{cases}\quad(*).$$

Khi đó theo định lí Viet ta có: $x_1+x_2=\frac{4(1-m)}{3};\ x_1x_2=\frac{m^2-4m+1}{3}$

Ta có: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{2}(x_1+x_2)\Leftrightarrow(x_1+x_2)(x_1x_2-2)=0$ (Do $x_1x_2\neq 0$)

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x_1+x_2=0\\ x_1x_2-2=0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}m=1\\ m^2-4m-5=0\end{bmatrix}\Leftrightarrow m=1,\ m=-1,\ m=5.$$

Thay vào (*) ta thấy $m=-1$ không thỏa mãn

Vậy $m=1,\ m=5$ là giá trị cần tìm.

Bài 3.14: Cho phương trình $x^2-2(m-1)x+m^2-3=0$ với m là tham số. Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ sao cho

a) $x_1+x_2=2x_1x_2$

b) $A=2\left(x_1^2+x_2^2\right)-5x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất

c) $B=\frac{x_1x_2}{x_1^2+x_2^2-3x_1x_2}$ đạt giá trị nhỏ nhất

Hướng dẫn giải

Ta có phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2\Leftrightarrow\Delta'\geq 0$

$\Leftrightarrow(m-1)^2-\left(m^2-3\right)\geq 0\Leftrightarrow m\leq 2$ (*)

Theo Viet ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=2m-2\\ x_1.x_2=m^2-3\end{cases}$

a) $x_1+x_2=2x_1x_2\Leftrightarrow 2m-2=2\left(m^2-3\right)\Leftrightarrow\begin{bmatrix}m=-1\\ m=2\end{bmatrix}$ (thỏa mãn (*))

b) $A=2(x_1+x_2)^2-5x_1x_2=2(2m-2)-5\left(m^2-3\right)$

$=-5m^2+4m+11=-5\left(m-\frac{2}{5}\right)^2+3\leq 3$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow m=\frac{2}{5}$

c) $B=\frac{x_1x_2}{(x_1+x_2)^2-3x_1x_2}=\frac{m^2-3}{(2m-2)^2-3\left(m^2-3\right)}=\frac{m^2-3}{m^2-8m+13}$

Suy ra $\min B=-\frac{1}{3}$ khi và chỉ khi $m=1$

DẠNG TOÁN 4: *MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN ĐẾN NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI*

Phương pháp giải và các ví dụ minmh họa

- **Bài toán 1:** Tìm điều kiện để hai phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ và $a'x^2+b'x+c'=0$ có nghiệm chung. Chúng ta làm như sau:

Bước 1: Giả sử hai phương trình có nghiệm chung là x_0 thì

$$\begin{cases}ax_0^2+bx_0+c=0\\ a'x_0^2+b'x_0+c'=0\end{cases}$$

Giải hệ tìm được x_0, suy ra giá trị của tham số

Bước 2: Thế giá trị của tham số tìm được vào hai phương trình để kiểm tra và kết luận.

Ví dụ 1: Tìm tất cả các giá trị của a để hai phương trình $x^2+ax+1=0$ và $x^2+x+a=0$ có nghiệm chung

Lời giải:

Điều kiện cần: Giả sử hai phương trình có nghiệm chung là x_0 thì

$$\begin{cases} x_0^2 + ax_0 + 1 = 0 \\ x_0^2 + x_0 + a = 0 \end{cases} \Rightarrow (a-1)x_0 + 1 - a = 0$$

Nếu $a = 1$ thay vào hai phương trình ta thấy chúng vô nghiệm

Nếu $a \neq 1$ thì $x_0 = 1 \Rightarrow a = -2$

Điều kiện đủ: Với $a = -2$ thì hai phương trình trở thành $x^2 - 2x + 1 = 0$ và $x^2 + x - 2 = 0$

Giải hai pt này ta thấy chúng có nghiệm chung là $x = 1$

Vậy $a = -2$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 2: Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $(x^2 - 2mx + m - 1)(x^2 - 3x + 2m) = 0$ có bốn nghiệm phân biệt.

Lời giải:

Phương trình tương đương với $\left[\begin{array}{ll} x^2 - 2mx + m - 1 = 0 & (1) \\ x^2 - 3x + 2m = 0 & (2) \end{array}\right.$

Phương trình đầu có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi hai phương trình (1) và (2) mỗi phương trình phải có hai nghiệm phân biệt và chúng không có nghiệm chung.

* Ta có $\Delta'_1 = m^2 - m + 1 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \forall m$ nên phương trình (1) có nghiệm với mọi m.

Do đó điều kiện để cả hai phương trình (1) và (2) có hai nghiệm phân biệt là $\Delta_2 = 9 - 8m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{9}{8}$.

* Giả sử hai phương trình (1) và (2) có nghiệm chung là x_0 thì

$$\begin{cases} x_0^2 - 2mx_0 + m - 1 = 0 \\ x_0^2 - 3x_0 + 2m = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0^2 - \left(3x_0 - x_0^2\right).x_0 + \frac{3x_0 - x_0^2}{2} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2x_0^3 - 5x_0^2 + 3x_0 - 2 = 0 \Rightarrow x_0 = 2 \Rightarrow m = 1$$

Với $m = 1$ phương trình (1) trở thành $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$, phương trình (2) trở thành $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$ do đó $m = 1$ thì hai phương trình có nghiệm chung.

Suy ra để khi hai phương trình (1) và (2) không có nghiệm chung là $m \neq 1$.

Vậy để phương trình đầu có bốn nghiệm phân biệt thì $m < \frac{9}{8}$ và $m \neq 1$.

- **Bài toán 2: Chứng minh trong các phương trình bậc hai có ít nhất một phương trình có nghiệm**

Để giải quyết bài toán này chúng ta sẽ đi chứng minh tổng các biệt thức Delta là một số không âm.

Ví dụ 3: Cho các số dương a,b,c thỏa mãn điều kiện $a + 2b + 3c = 1$.

Chứng minh rằng có ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm

$$4x^2 - 4(2a+1)x + 4a^2 + 192abc + 1 = 0$$

$$4x^2 - 4(2b+1)x + 4b^2 + 96abc + 1 = 0$$

Lời giải

Hai phương trình trên lần lượt có $\Delta'_1 = 16a(1 - 48bc)$, $\Delta'_2 = 16b(1 - 24ac)$

Vì a,b là các số dương nên Δ'_1, Δ'_2 lần lượt cùng dấu với $1 - 48bc$ và $1 - 24ac$

Mặt khác ta lại có

$$1 - 48bc + 1 - 24ac = 2 - 24c(a + 2b) = 2 - 24c(1 - 3c) = 2(6c - 1)^2 \geq 0$$

Dẫn đến $\Delta'_1 + \Delta'_2 \geq 0$

Vậy có ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm

Ví dụ 4: Cho các số a,b,c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 6$.

Chứng minh rằng có ít nhất một trong ba phương trình sau có nghiệm

$$x^2 + ax + 1 = 0; \quad x^2 + bx + 1 = 0; \quad x^2 + cx + 1 = 0$$

Lời giải

Ba pt trên lần lượt có $\Delta_1 = a^2 - 4$, $\Delta_2 = b^2 - 4$, $\Delta_3 = c^2 - 4$

$$\Rightarrow \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = a^2 + b^2 + c^2 - 12$$

Ta có bất đẳng thức quen thuộc sau $b^2 + c^2 \geq \frac{(b+c)^2}{2}$

Suy ra $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \geq a^2 + \frac{(b+c)^2}{2} - 12 = a^2 + \frac{(6-a)^2}{2} - 12$

Mặt khác $a^2 + \frac{(6-a)^2}{2} - 12 = \frac{3(a-2)^2}{2} \geq 0 \Rightarrow \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 \geq 0$

Do đó có ít nhất một trong ba biệt thức $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ không âm

Vậy với a,b,c thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 6$ thì có ít nhất một trong ba phương trình có nghiệm.

- **Bài toán 3: Chứng minh bất đẳng thức có chứa các hệ số của phương trình bậc hai với nghiệm của nó có điều kiện.**

Để làm xuất hiện điều kiện ràng buộc đối với hệ số phương trình bậc hai ta thường dựa trên

+ Nếu phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm thực thì $\Delta\geq 0\Leftrightarrow b^2\geq 4ac$
+ Sử dụng định lí Viét và điều kiện nghiệm của đề bài đã cho để suy ra ràng buộc của hệ số a,b,c .

Ví dụ 5: Cho phương trình $x^2-bx+c=0$ có hai nghiệm thực dương x_1,x_2 thoả mãn $x_1+x_2\leq 1$. Chứng minh rằng:

a) $c\leq\frac{1}{4}$. b) $b(c+1)\geq 5c$.

Lời giải

Chứng minh.

a) Ta có $c=x_1x_2\leq\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2\leq\frac{1}{4}$.

c) Thay $b=x_1+x_2, c=x_1x_2$ ta có bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$(x_1+x_2)(x_1x_2+1)\geq 5x_1x_2\Leftrightarrow\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+x_1+x_2\geq 5$$

Ta có: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+x_1+x_2=x_1+\frac{1}{4x_1}+x_2+\frac{1}{4x_2}+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)\geq 1+1+\frac{3}{4}\frac{4}{x_1+x_2}\geq 5.$

Ví dụ 6: Cho phương trình $x^2-bx+c=0$ có hai nghiệm thực dương x_1,x_2 thoả mãn $x_1+x_2\geq 1$.

a) Chứng minh rằng: $b^2-2c\geq\frac{1}{2}$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=2bc-b^3-3b+1$.

Lời giải.

a) Thay $b=x_1+x_2$, $c=x_1x_2$ ta có bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow x_1^2+x_2^2\geq\frac{1}{2}$$

Ta có: $x_1^2+x_2^2\geq\frac{1}{2}(x_1+x_2)^2\geq\frac{1}{2}$.

b) Theo giả thiết ta có: $b\geq 1$, $c\leq\frac{b^2}{4}$ nên $P\leq-\frac{b^3}{2}-3b+1\leq-\frac{1}{2}-3+1=-\frac{5}{2}$.

Vậy $P_{MAX}=-\frac{5}{2}$ khi $b=1$, $c=\frac{1}{4}$.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 3.15: Tìm m để hai phương trình sau có nghiệm chung

$x^2-2mx-4m+1=0$ (1) và $x^2+(3m+1)x+2m+1=0$ (2).

Hướng dẫn giải

- Giả sử hai phương trình đã cho có nghiệm chung x_0, thế thì ta phải có:

$$\begin{cases}x_0^2-2mx_0-4m+1=0\\x_0^2+(3m+1)x_0+2m+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\frac{x_0^2+1}{2x_0+4}\\m=\frac{-x_0^2-x_0-1}{3x_0+2}\end{cases}\text{ với }\begin{cases}x_0\neq -2\\x_0\neq-\frac{2}{3}\end{cases}$$

Suy ra

$$\frac{x_0^2+1}{2x_0+4}=\frac{-x_0^2-x_0-1}{3x_0+2}\Leftrightarrow(x_0+1)\left(5x_0^2+3x_0+6\right)=0\Leftrightarrow x_0=-1\Rightarrow m=1$$

- Với $m=1$ ta thấy (1) và (2) có nghiệm chung là $x=-1$.

Vậy $m=1$ là giá trị cần tìm.

Bài 3.16: Chứng minh rằng nếu hai phương trình $x^2+ax+b=0$ và $x^2+mx+n=0$ có nghiệm chung thì $(n-b)^2=(m-a)(an-bm)$.

Hướng dẫn giải

Gọi x_0 là nghiệm chung của hai phương trình.

Ta có: $\begin{cases}x_0^2+ax_0+b=0\\x_0^2+mx_0+n=0\end{cases}\Rightarrow(a-m)x_0=n-b$ (*).

+) Nếu $a-m=0\Leftrightarrow a=m$, từ (*) $\Rightarrow n-b=0\Leftrightarrow b=n\Rightarrow$ đúng.

+) Nếu $m\neq a$, từ (*) $\Rightarrow x_0=\frac{n-b}{a-m}$ thay vào một trong hai phương trình ban đầu ta được:

$$\left(\frac{n-b}{a-m}\right)^2+a\left(\frac{n-b}{a-m}\right)+b=0\Leftrightarrow(n-b)^2=(m-a)(an-bm)$$

Bài 3.17: Cho a,b,c là các số thực không đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng trong ba phương trình sau có ít nhất một phương trình có nghiệm

$ax^2+2bx+c=0$ (1); $bx^2+2cx+a=0$ (2); $cx^2+2bx+b=0$ (3).

Hướng dẫn giải

- Nếu trong ba số a, b, c có một số bằng 0, chẳng hạn $a=0\Rightarrow$ (2) có nghiệm $x=0$.
- $abc\neq 0$, khi đó ba phương trình đã cho là ba phương trình bậc hai lần lượt có biệt thức: $\Delta'_1=b^2-ac$; $\Delta'_2=c^2-ab$; $\Delta'_3=a^2-bc$.

Ta có: $\Delta'_1+\Delta'_2+\Delta'_3=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\left[(a-b))^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\geq 0$.

Suy ra trong ba số $\Delta'_1;\ \Delta'_2;\ \Delta'_3$ có ít nhất một số không âm hay ba phương trình đã cho có ít nhất một phương trình có nghiệm. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 3.18: Cho phương trình $x^2+bx+c=0$ có hai nghiệm thực dương x_1, x_2 thoả mãn $x_1x_2\geq 1$.

a) Chứng minh rằng: $b^2\geq 4$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{3b^2-4c+b+2}{b^2+1}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $b^2=(x_1+x_2)^2\geq 4x_1x_2\geq 4$.

b) Do phương trình đã cho có hai nghiệm dương x_1, x_2 thoả mãn $x_1x_2\geq 1$ nên $b^2\geq 4c$, và $b\leq -2$ suy ra $P\geq\frac{2b^2+b+2}{b^2+1}$. Ta có

$P-\frac{8}{5}=\frac{5\left(2b^2+b+2\right)-8\left(b^2+1\right)}{b^2+1}=\frac{2b^2+5b+2}{b^2+1}=\frac{(b+2)(2b+1)}{b^2+1}\geq 0$ với mọi $b\leq -2$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $b=-2, c=1$.

Vậy $P_{min}=\frac{8}{5}$ khi $b=-2, c=1$.

Bài 3.19: Giả sử phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm thuộc $[0;3]$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $Q=\frac{18a^2-9ab+b^2}{9a^2-3ab+ac}$

Hướng dẫn giải

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình, theo Viet ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{b}{a}\\ x_1x_2=\frac{c}{a}\end{cases}$.

Ta có: $Q=\frac{18-9\frac{b}{a}+\left(\frac{b}{a}\right)^2}{9-3\frac{b}{a}+\frac{c}{a}}=\frac{18+9(x_1+x_2)+(x_1+x_2)^2}{9+3(x_1+x_2)+x_1x_2}$.

- Ta tìm Max của Q.

Ta đánh giá $(x_1+x_2)^2$ qua x_1x_2 với điều kiện $x_1, x_2\in[0;3]$.

Giả sử $0\leq x_1\leq x_2\leq 3\Rightarrow\begin{cases}x_1^2\leq x_1x_2\\ x_2^2\leq 9\end{cases}$

Suy ra $(x_1+x_2)^2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2\leq 9+3x_1x_2$

$\Rightarrow Q\leq\frac{18+9(x_1+x_2)+3x_1x_2+9}{9+3(x_1+x_2)+x_1x_2}=3$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=x_2=3\\ x_1=0;x_2=3\end{array}\right.$.

Hay là: $\begin{cases}b=-6a\\ c=9a\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}b=-3a\\ c=0\end{cases}$.

- Ta tìm Min của Q

Ta có: $Q-2=\frac{3(x_1+x_2)+x_1^2+x_2^2}{9+3(x_1+x_2)+x_1x_2}\geq 0\Rightarrow Q\geq 2$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x_1=x_2=0\Leftrightarrow b=c=0$.

Vậy $\max Q=3$ và $\min Q=2$.

Bài 3.20: Cho phương trình bậc hai $ax^2-x+c=0$ có hai nghiệm thực dương x_1, x_2 thoả mãn $x_1+x_2\leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{a^2-c}{a^2c-a^3}$.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết của bài toán suy ra: $a\geq 1, 0<c\leq\frac{1}{4a}$.

Suy ra

$P\geq\frac{4a^3-1}{a^2-4a^4}\Rightarrow P+1\geq\frac{4a^3-1}{a^2-4a^4}+1=\frac{4a^4-4a^3-a^2+1}{4a^4-a^2}=\frac{(a-1)\left(4a^3-a-1\right)}{a^2\left(4a^2-1\right)}$

Vì $a\geq 1$ nên $4a^3-a-1=a\left(a^2-1\right)+3a^2-1>0$ do đó

$\frac{(a-1)\left(4a^3-a-1\right)}{a^2\left(4a^2-1\right)}\geq 0\Rightarrow P\geq -1$.

Dấu đẳng thức xẩy ra khi: $a=1,\ c=\frac{1}{4}$.

§3. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HOẶC BẬC HAI

DẠNG TOÁN 1: *PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN TRONG DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI*

Phương pháp giải.

- Để giải phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối(GTTĐ) ta tìm cách để khử dấu GTTĐ, bằng cách:
  - Dùng định nghĩa hoặc tính chất của GTTĐ.
  - Bình phương hai vế.
  - Đặt ẩn phụ.
- Phương trình dạng $|f(x)|=|g(x)|$ ta có thể giải bằng cách biến đổi tương đương như sau

$$|f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x) \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right. \text{ hoặc } |f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow f^2(x)=g^2(x)$$

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau

a) $|2x+1|=|x^2-3x-4|$.

b) $|3x-2|=3-2x$

c) $|x^2-4x-5|=4x-17$

d) $|2x-5|+|2x^2-7x+5|=0$

Lời giải

a) Phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1=x^2-3x-4 \\ 2x+1=-(x^2-3x-4) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x-5=0 \\ x^2-x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5\pm\sqrt{45}}{2} \\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=\dfrac{5\pm\sqrt{45}}{2}$ và $\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$.

b) Cách 1: Với $3-2x<0 \Leftrightarrow x>\dfrac{3}{2}$ ta có $VT\ge 0$, $VP<0$ suy ra phương trình vô nghiệm

Với $3-2x\ge 0 \Leftrightarrow x\le\dfrac{3}{2}$ khi đó hai vế của phương trình không âm suy ra

Phương trình $\Leftrightarrow |3x-2|^2=(3-2x)^2 \Leftrightarrow 9x^2-12x+4=4x^2-12x+9$

$\Leftrightarrow 5x^2=5 \Leftrightarrow x=\pm 1$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm là $x=\pm 1$.

Cách 2: Với $3x-2\ge 0 \Leftrightarrow x\ge\dfrac{2}{3}$: Phương trình tương đương với

$3x-2=3-2x \Leftrightarrow 5x=5 \Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn)

Với $3x-2<0 \Leftrightarrow x<\dfrac{2}{3}$: Phương trình tương đương với

$-(3x-2)=3-2x \Leftrightarrow x=-1$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm là $x=\pm 1$.

c) Với $4x-17<0 \Leftrightarrow x<\dfrac{17}{4}$ ta có $VT\ge 0$, $VP<0$ suy ra phương trình vô nghiệm

Với $4x-17\ge 0 \Leftrightarrow x\ge\dfrac{17}{4}$ khi đó hai vế của phương trình không âm suy ra

Phương trình $\Leftrightarrow |x^2-4x-5|^2=(4x-17)^2 \Leftrightarrow (x^2-4x-5)^2=(4x-17)^2$

$\Leftrightarrow (x^2-8x+12)(x^2-22)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-8x+12=0 \\ x^2-22=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=6 \\ x=\pm\sqrt{22} \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện $x\ge\dfrac{17}{4}$ thấy chỉ có $x=6$ và $x=\sqrt{22}$ thỏa mãn

Vậy phương trình có nghiệm là $x=6$ và $x=\sqrt{22}$.

d) Ta có $|2x-5|\ge 0$, $|2x^2-7x+5|\ge 0$ suy ra $|2x-5|+|2x^2-7x+5|\ge 0$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\left\{\begin{array}{l} 2x-5=0 \\ 2x^2-7x+5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{5}{2} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x=\dfrac{5}{2}$.

Nhận xét: Đối với phương trình dạng $|f(x)|=g(x)$ (*) ta có thể biến đổi tương đương như sau

$$|f(x)|=g(x) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} g(x)\ge 0 \\ f^2(x)=g^2(x) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} g(x)\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x) \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Hoặc $|f(x)|=g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} f(x)=g(x) \\ f(x)\ge 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} -f(x)=g(x) \\ f(x)<0 \end{array}\right. \end{array}\right.$

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau

a) $(x+1)^2 - 3|x+1| + 2 = 0$ b) $4x(x-1) = |2x-1| + 1$

Lời giải

a) Đặt $t = |x+1|, t \ge 0$.

Phương trình trở thành $t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right.$

Với $t = 1$ ta có $|x+1| = 1 \Leftrightarrow x+1 = \pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$

Với $t = 2$ ta có $|x+1| = 2 \Leftrightarrow x+1 = \pm 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -3, x = -2, x = 0$ và $x = 1$

b) Phương trình tương đương với $4x^2 - 4x - |2x-1| - 1 = 0$

Đặt $t = |2x-1|, t \ge 0 \Rightarrow t^2 = 4x^2 - 4x + 1 \Rightarrow 4x^2 - 4x = t^2 - 1$.

Phương trình trở thành $t^2 - 1 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 2 \end{array}\right.$

Vì $t \ge 0 \Rightarrow t = 2$ nên $|2x-1| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-1 = 2 \\ 2x-1 = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2} \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{3}{2}$ và $x = -\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 3: Giải và biện luận các phương trình sau

a) $|mx + 2m| = |mx + x + 1|$ (*) b) $|mx + 2x - 1| = |x - 1|$ (**)

Lời giải

a) Ta có $|mx + 2m| = |mx + x + 1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} mx + 2m = mx + x + 1 \\ mx + 2m = -(mx + x + 1) \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2m - 1 \\ (2m+1)x = -2m - 1 \ (1) \end{array}\right.$

Giải (1)

Với $2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}$ phương trình trở thành $0x = 0$ suy ra phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Với $2m + 1 \ne 0 \Leftrightarrow m \ne -\dfrac{1}{2}$ phương trình tương đương với $x = -1$

Kết luận

$m = -\dfrac{1}{2}$ phương trình (*) nghiệm đúng với mọi x.

$m \ne -\dfrac{1}{2}$ phương trình (*) có hai nghiệm là $x = -1$ và $x = 2m - 1$

b) Ta có $|mx + 2x - 1| = |x - 1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} mx + 2x - 1 = x - 1 \\ mx + 2x - 1 = -(x - 1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (m+1)x = 0 \ (2) \\ (m+3)x = 2 \ (3) \end{array}\right.$

Với phương trình (2) ta có

$m = -1$ thì phương trình (2) nghiệm đúng với mọi x

$m \ne -1$ thì phương trình (2) có nghiệm $x = 0$

Với phương trình (3) ta có

$m = -3$ thì phương trình (3) vô nghiệm

$m \ne -3$ thì phương trình (3) có nghiệm $x = \dfrac{2}{m+3}$

Kết luận

$m = -1$ phương trình (*) nghiệm đúng với mọi x

$m = -3$ phương trình (*) có nghiệm $x = 0$

$m \ne -1$ và $m \ne -3$ phương trình (*) có nghiệm $x = 0$ và $x = \dfrac{2}{m+3}$.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 3.21: Giải các phương trình sau: $|3x - 2| = x^2 + 2x + 3$

Hướng dẫn giải

Ta có: $|3x-2| = \left\{\begin{array}{l} 3x - 2 \text{ khi } x \ge \dfrac{2}{3} \\ -3x + 2 \text{ khi } x < \dfrac{2}{3} \end{array}\right.$

* Nếu $x \ge \dfrac{2}{3} \Rightarrow PT \Leftrightarrow 3x - 2 = x^2 + 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - x + 5 = 0$ pt vô nghiệm.

* Nếu $x < \dfrac{2}{3} \Rightarrow PT \Leftrightarrow -3x + 2 = x^2 + 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$ hai nghiệm này đều thỏa mãn $x < \dfrac{2}{3}$.

Vậy nghiệm của pt đã cho là $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$.

Bài 3.22: Giải các phương trình sau

a) $(2x-1)^2 - 3|2x-1| - 4 = 0$ b) $\dfrac{x^4 - 6x^2 + 4}{x^2} = \left|\dfrac{x^2 - 2}{x}\right|$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $t=|2x-1|, t\ge 0$.

Phương trình trở thành $t^2-3t-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1(l)\\t=4\end{array}\right.$

Với $t=4$ ta có $|2x-1|=4\Leftrightarrow 2x-1=\pm 4\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}$ hoặc $x=-\dfrac{3}{2}$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=-\dfrac{3}{2}$ và $x=\dfrac{5}{2}$.

b) ĐKXĐ: $x\ne 0$. Đặt $t=\left|\dfrac{x^2-2}{x}\right|, t\ge 0$

Phương trình trở thành $t^2-t-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1(\text{loại})\\t=2\end{array}\right.$

Với $t=2$ ta có $\left|\dfrac{x^2-2}{x}\right|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\pm\sqrt{3}\\x=1\pm\sqrt{3}\end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=-1\pm\sqrt{3}$ và $x=1\pm\sqrt{3}$.

Bài 3.23: Cho phương trình $x^2-2x-2|x-1|+m+3=0$

a) Giải phương trình khi $m=-2$

b) Tìm m để phương trình sau có nghiệm

Hướng dẫn giải

Phương trình $\Leftrightarrow (x-1)^2-2|x-1|+m+2=0$

Đặt $t=|x-1|, t\ge 0$ ta có phương trình: $t^2-2t+m+2=0$ (1)

a) Khi $m=-2$ ta có $t^2-2t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=2\end{array}\right.$

Suy ra nghiệm phương trình là $x=1, x=3, x=-1$

b) Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm $t\ge 0$

$\Leftrightarrow m=-t^2+2t-2$ có nghiệm $t\ge 0$

Đồ thị hàm số $f(t)=-t^2+2t-2$ với $t\in[0;+\infty)$ cắt trục hoành $\Leftrightarrow m\le -2$.

Bài 3.24: Giải và biện luận các phương trình sau

a) $|mx+2m|=|x+1|$ b) $|mx+2x|=|mx-1|$

Hướng dẫn giải

a) Ta có PT $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}mx+2m=x+1\\mx+2m=-(x+1)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(m-1)x=1-2m\ (1)\\(m+1)x=-2m-1\ (2)\end{array}\right.$

Giải (1): Với $m=1$ phương trình trở thành $0x=-1$ phương trình vô nghiệm

Với $m\ne 1$ phương trình tương đương với $x=\dfrac{1-2m}{m-1}$

Giải (2): Với $m=-1$ phương trình trở thành $0x=1$ phương trình vô nghiệm

Với $m\ne -1$ phương trình tương đương với $x=\dfrac{-2m-1}{m+1}$

Kết luận: $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-1\end{array}\right.$ phương trình có nghiệm là $x=\dfrac{-3}{2}$

Với $\left\{\begin{array}{l}m\ne 1\\m\ne -1\end{array}\right.$ phương trình có nghiệm là $x=\dfrac{1-2m}{m-1}$ và $x=\dfrac{-2m-1}{m+1}$

b) Ta có $|mx+2x|=|mx-1|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}mx+2x=mx-1\\2mx+2x=-(mx-1)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2}\\(2m+2)x=1\ (*)\end{array}\right.$

Với phương trình (*) ta có

$m=-1$ thì phương trình (*) vô nghiệm

$m\ne -1$ thì phương trình (*) có nghiệm $x=\dfrac{1}{2m+2}$

Kết luận: $m=-1$ phương trình có nghiệm $x=-\dfrac{1}{2}$

$m\ne -1$ phương trình có nghiệm $x=-\dfrac{1}{2}$ và $x=\dfrac{1}{2m+2}$.

DẠNG TOÁN 2: *PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU*

Phương pháp giải.

Để giải phương trình chứa ẩn ở mẫu ta thường

- Quy đồng mẫu số (chú ý cần đặt điều kiện mẫu số khác không)
- Đặt ẩn phụ

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau

a) $\dfrac{2x+1}{3x+2}=\dfrac{x+1}{x-2}$ b) $1+\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{10}{x+3}-\dfrac{50}{(2-x)(x+3)}$.

c) $\dfrac{x+3}{(x+1)^2}=\dfrac{4x-2}{(2x-1)^2}$. d) $\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{2x+1}{x+1}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x\ne -\dfrac{2}{3}$ và $x\ne 2$.

Phương trình tương đương với

$(2x+1)(x-2)=(x+1)(3x+2)\Leftrightarrow 2x^2-4x+x-2=3x^2+2x+3x+2$

$\Leftrightarrow x^2+8x+4=0\Leftrightarrow x=-4\pm 2\sqrt{3}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có nghiệm là $x=-4\pm 2\sqrt{3}$.

b) ĐKXĐ: $x\neq -3$ và $x\neq 2$.

Phương trình tương đương với $(2-x)(x+3)-2(x+3)=10(2-x)-50$

$\Leftrightarrow x^2-7x-30=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=10 \\ x=-3 \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x=10$.

c) ĐKXĐ: $x\neq -1$ và $x\neq \dfrac{1}{2}$.

Phương trình tương đương với

$\dfrac{x+3}{(x+1)^2}=\dfrac{2}{2x-1}\Leftrightarrow (x+3)(2x-1)=2(x+1)^2\Leftrightarrow x=5$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có nghiệm là $x=5$.

d) ĐKXĐ: $x\neq \pm 2$ và $x\neq -1$

Phương trình tương đương với

$(x+1)^2(x-2)+(x-1)(x+1)(x+2)=(2x+1)(x-2)(x+2)$

$\Leftrightarrow \left(x^2+2x+1\right)(x-2)+\left(x^2-1\right)(x+2)=(2x+1)\left(x^2-4\right)$

$\Leftrightarrow x^3-2x^2+2x^2-4x+x-2+x^3+2x^2-x-2=2x^3-8x+x^2-4$

$\Leftrightarrow x^2+4x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-4 \end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có nghiệm là $x=-4$ và $x=0$

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau

a) $\dfrac{4}{2x+1}+\dfrac{3}{2x+2}=\dfrac{2}{2x+3}+\dfrac{1}{2x+4}$.

b) $\dfrac{1}{x^2+5x+4}+\dfrac{1}{x^2+11x+28}+\dfrac{1}{x^2+17x+70}=\dfrac{3}{4x-2}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x\notin\left\{-2;-\dfrac{3}{2};-1;-\dfrac{1}{2}\right\}$

Phương trình tương đương với

$\dfrac{4}{2x+1}-\dfrac{2}{2x+3}=\dfrac{1}{2x+4}-\dfrac{3}{2x+2}\Leftrightarrow \dfrac{4x+10}{4x^2+8x+3}=\dfrac{-4x-10}{4x^2+12x+8}$

$\Leftrightarrow (4x+10)\left(\dfrac{1}{4x^2+8x+3}+\dfrac{1}{4x^2+12x+8}\right)=0$

$\Leftrightarrow (4x+10)\left(4x^2+8x+3+4x^2+12x+8\right)=0$

$\Leftrightarrow (4x+10)\left(8x^2+20x+11\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x+10=0 \\ 8x^2+20x+11=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{5}{2} \\ x=\dfrac{-5\pm\sqrt{3}}{4} \end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có nghiệm là $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{3}}{4}$ và $x=-\dfrac{5}{2}$

b) Điều kiện: $x\notin\left\{-10;-7;-4;-1;\dfrac{1}{2}\right\}$

Phương trình tương đương với

$\dfrac{1}{(x+1)(x+4)}+\dfrac{1}{(x+4)(x+7)}+\dfrac{1}{(x+7)(x+10)}=\dfrac{3}{4x-2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+4}\right)+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x+4}-\dfrac{1}{x+7}\right)+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x+7}-\dfrac{1}{x+10}\right)=\dfrac{3}{4x-2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+10}\right)=\dfrac{3}{4x-2}\Leftrightarrow x^2+7x+12=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-4 \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện thì phương trình có nghiệm duy nhất $x=-3$.

Ví dụ 3: Giải và biện luận phương trình sau với m là tham số.

a) $\dfrac{x^2+mx+2}{3-x}=2m+6$ (3) b) $\dfrac{|3x+mx+2|}{|x+1|}=m$ (4)

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x\neq 3$

Phương trình (3) $\Leftrightarrow x^2+mx+2=(3-x)(2m+6)$

$\Leftrightarrow x^2+(3m+6)x-6m-16=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+3m+8)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-3m-8 \end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện ta xét $-3m-8\neq 3\Leftrightarrow m\neq -\dfrac{5}{3}$

Kết luận: $m=-\dfrac{5}{3}$ phương trình (3) có nghiệm là $x=-2$

$m\neq -\dfrac{5}{3}$ phương trình có nghiệm là $x=2$ và $x=-3m-8$

b) ĐKXĐ: $x \neq -1$

TH1: Nếu $m < 0$ ta có $VP(4) \geq 0, VT(4) < 0$ suy ra phương trình vô nghiệm

TH2: Nếu $m \geq 0$ phương trình tương đương với

$$|3x+mx+2| = m|x+1| \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+mx+2 = m(x+1) \\ 3x+mx+2 = -m(x+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{m-2}{3} \\ (2m+3)x = -m-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{m-1}{2} \\ x = \dfrac{-m-2}{2m+3} \end{cases}$$

- Với $x = \dfrac{m-1}{2}$ ta xét $\dfrac{m-1}{2} \neq -1 \Leftrightarrow m \neq -1$ (luôn đúng) do đó với $m \geq 0$ thì phương trình (4) luôn nhận $x = \dfrac{m-1}{2}$ là nghiệm
- Với $x = \dfrac{-m-2}{2m+3}$ ta xét $\dfrac{-m-2}{2m+3} \neq -1 \Leftrightarrow m \neq -1$ (luôn đúng) do đó với $m \geq 0$ thì phương trình (4) luôn nhận $x = \dfrac{-m-2}{2m+3}$ là nghiệm

Kết luận

$m < 0$ phương trình (4) vô nghiệm

$m \geq 0$ phương trình (4) có hai nghiệm $x = \dfrac{m-1}{2}$ và $x = \dfrac{-m-2}{2m+3}$

Ví dụ 4: Tìm điều kiện của tham số a và b để phương trình

$$\frac{a}{x-a} - \frac{b}{x-b} = \frac{a^2-b^2}{x^2-(a+b)x+ab} \quad (*)$$

a) Có nghiệm duy nhất b) Có nghiệm

Lời giải

ĐKXĐ: $x \neq a$ và $x \neq b$

Phương trình tương đương với

$$\frac{a(x-b)-b(x-a)}{(x-a)(x-b)} = \frac{a^2-b^2}{x^2-(a+b)x+ab} \Leftrightarrow (a-b)x = a^2-b^2 \quad (**)$$

a) Phương trình (*) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình (**) có nghiệm duy nhất khác a và b

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b \neq 0 \\ \dfrac{a^2-b^2}{a-b} \neq a \\ \dfrac{a^2-b^2}{a-b} \neq b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq b \\ a+b \neq a \\ a+b \neq b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq b \\ a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$$

Vậy phương trình (*) có nghiệm duy nhất khi $\begin{cases} a \neq b \\ a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$

b) Phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (**) có nghiệm khác a và b

Với $a = b$ thì phương trình (**) trở thành $0x = 0$ suy ra phương trình (**) có nghiệm đúng với mọi x do đó phương trình (*) có nghiệm.

Với $a \neq b$ thì phương trình (**) tương đương với $x = \dfrac{a^2-b^2}{a-b} = a+b$

Suy ra phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} a+b \neq a \\ a+b \neq b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$

Vậy phương trình (*) có nghiệm khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \text{ hoặc } a = b. \\ a \neq b \end{cases}$

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 3.25: Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{13}{2x^2+x-21} + \dfrac{1}{2x+7} = \dfrac{6}{x^2-9}$

b) $\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{x-2}{x+2} + \dfrac{x-3}{x+3} + \dfrac{x+4}{x-4} = 4$

Hướng dẫn giải

a) *ĐKXĐ:* $x \neq \pm 3; x \neq -\dfrac{7}{2}$

$$PT \Leftrightarrow \frac{13}{(x-3)(2x+7)} + \frac{1}{2x+7} = \frac{6}{(x-3)(x+3)}$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-12 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -4 \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -4$.

b) Điều kiện: $x \notin \{-3; -2; 1; 4\}$

$$PT \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{x-1} + 1 - \frac{4}{x+2} + 1 - \frac{6}{x+3} + 1 + \frac{8}{x-4} = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x-8}{(x-1)(x-4)} - \frac{5x+12}{(x+2)(x+3)} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-\frac{16}{5} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{\frac{69}{5}}\right)$$

Đối chiếu với điều kiện phương trình có nghiệm là $x = \dfrac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{\dfrac{69}{5}}\right)$.

Bài 3.26: Giải phương trình

a) $\frac{2x}{3x^2-5x+2}+\frac{13x}{3x^2+x+2}=6$ b) $\frac{x^4+3x^2+1}{x^3+x^2-x}=3$

c) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}=15$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện: $x\notin\left\{1;\frac{2}{3}\right\}$

Với $x=0$ không là nghiệm của phương trình

Với $x\neq 0$ ta có PT $\Leftrightarrow \frac{2}{3x-5+\frac{2}{x}}+\frac{13}{3x+1+\frac{2}{x}}=6$

Đặt $t=3x+\frac{2}{x}$ phương trình trở thành PT $\Leftrightarrow \frac{2}{t-5}+\frac{13}{t+1}=6$

Từ đó ta tìm được nghiệm của phương trình là $x=\frac{1}{2};x=\frac{4}{3}$.

b) Điều kiện: $x\notin\left\{0;\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$

$$PT\Leftrightarrow\frac{\frac{x^4+3x^2+1}{x^2}}{\frac{x^3+x^2-x}{x^2}}=3\Leftrightarrow\frac{x^2+\frac{1}{x^2}+3}{x-\frac{1}{x}+1}=3$$

Đặt $t=x-\frac{1}{x}$ phương trình trở thành $\frac{t^2+5}{t+1}=3$

Từ đó phương trình có nghiệm là $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2};x=1\pm\sqrt{2}$.

c) Điều kiện: $x\neq -1;x\neq 0$

$$PT\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)^2+\frac{2}{x(x+1)}=15\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x(x+1)}\right)^2+\frac{2}{x(x+1)}-15=0$$

Đặt $\frac{1}{x(x+1)}=t$ ta được phương trình $t^2+2t-15=0\Leftrightarrow t=3;t=-5$

+) $t=3\Leftrightarrow\frac{1}{x(x+1)}=3\Leftrightarrow 3x^2+3x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{6}$

+) $t=-5\Leftrightarrow\frac{1}{x(x+1)}=-5\Leftrightarrow 5x^2+5x+1=0\Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{10}$

Đối chiếu với điều kiện (*) thì phương trình có bốn nghiệm

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{6};x=\frac{-5\pm\sqrt{5}}{10}.$$

Bài 3.27: Giải phương trình

a) $\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2+\frac{x-1}{x+3}=12\left(\frac{x-2}{x-3}\right)^2$ b) $\frac{2(x+1)}{3x^2+x}+\frac{13(x+1)}{3x^2+7x+6}=6$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện: $x\neq 2;x\neq -3$

Đặt $u=\frac{x+1}{x-2};v=\frac{x-2}{x+3}$ ta được

$u^2+uv=12v^2\Leftrightarrow(u-3v)(u+4v)=0\Leftrightarrow u=3v;u=-4v$

+) $u=3v\Leftrightarrow\frac{x+1}{x-2}=3\frac{x-2}{x+3}\Leftrightarrow x^2+4x+3=3x^2-12x+12$

$\Leftrightarrow 2x^2-16x+9=0\Leftrightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{46}}{2}$

+) $u=-4v\Leftrightarrow\frac{x+1}{x-2}=-4\frac{x-2}{x+3}\Leftrightarrow x^2+4x+3=-4x^2+16x-16$

$\Leftrightarrow 5x^2-12x+19=0\Leftrightarrow\exists x$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=\frac{8\pm\sqrt{46}}{2}$.

b) ĐKXĐ: $x\neq 0,x\neq\frac{-1}{3}$

Đặt $u=x+1,\ v=3x^2+x,\ u\neq 0,v\neq 0$

Khi đó phương trình trở thành

$$\frac{2u}{v}+\frac{13u}{v+6u}=6\Leftrightarrow 4u^2-7uv-2v^2=0\Leftrightarrow(4u+v)(u-2v)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4u=-v\\u=2v\end{array}\right.$$

Từ đó ta tìm được nghiệm của pt là $x\in\left\{\frac{-1}{2};\frac{1}{3}\right\}$

Bài 3.28: Giải và biện luận phương trình sau $\frac{ax-1}{x-1}+\frac{2}{x+1}=\frac{a\left(x^2+1\right)}{x^2-1}$

Hướng dẫn giải

ĐKXĐ: $x\neq\pm 1$

$PT\Leftrightarrow(ax-1)(x+1)+2(x-1)=a\left(x^2+1\right)$

$\Leftrightarrow ax^2+ax-x-1+2x-2=ax^2+a\Leftrightarrow(a+1)x=a+3$

- Nếu $a\neq -1$ thì $x=\frac{a+3}{a+1}$. Ta có $\frac{a+3}{a+1}\neq 1$, xét $\frac{a+3}{a+1}\neq -1\Leftrightarrow a\neq -2$
- Nếu $a=-1$ thì phương trình vô nghiệm.

Vậy: - Với $a \neq -1$ và $a \neq -2$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{a+3}{a+1}$

- Với $a = -1$ hoặc $a = -2$ thì phương trình vô nghiệm.

Bài 3.29: Tìm điều kiện a, b để phương trình $\frac{a}{x-b} + \frac{b}{x-a} = 2$ có hai nghiệm phân biệt.

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $x \neq a, x \neq b$:

Ta có: PT $\Leftrightarrow 2(x-a)(x-b) = a(x-a) + b(x-b)$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 3(a+b)x + a^2 + b^2 + 2ab = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3(a+b)x + (a+b)^2 = 0$

Phương trình có hai nghiệm là $x_1 = a+b$ và $x_2 = \frac{a+b}{2}$

Ta có $x_1 \neq a \Leftrightarrow b \neq 0$, $x_1 \neq b \Leftrightarrow a \neq 0$, $x_2 \neq a \Leftrightarrow x_2 \neq b \Leftrightarrow a \neq b$

$x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow a+b \neq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow a \neq -b$

Vậy với $a \neq \pm b; a \neq 0, b \neq 0$ thì pt có hai nghiệm phân biệt.

DẠNG TOÁN 3: *PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN TRONG CĂN BẬC HAI.*

Phương pháp giải.

Để giải phương trình chứa ẩn dưới dấu căn ta tìm cách để khử dấu căn, bằng cách:

- Nâng luỹ thừa hai vế.
- Phân tích thành tích.
- Đặt ẩn phụ.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Loại 1: **Bình phương hai vế của phương trình.**

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{x^2+2x+4} = \sqrt{2-x}$ b) $x - \sqrt{2x-5} = 4$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $\begin{cases} x^2+2x+4 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 2$

Với điều kiện đó phương trình tương đương với

$x^2+2x+4 = 2-x \Leftrightarrow x^2+3x+2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x=-1$ và $x=-2$.

b) ĐKXĐ: $2x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}$.

$x - \sqrt{2x-5} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{2x-5} = x-4$ (*)

TH1: Với $x-4<0 \Leftrightarrow x<4$ ta có $VT(*) \geq 0$, $VP(*) < 0$ suy ra phương trình vô nghiệm

TH2: Với $x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$ ta có hai vế không âm nên phương trình (*) tương đương với

$2x-5 = (x-4)^2 \Leftrightarrow x^2-10x+21 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=7 \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện $x \geq 4$ và điều kiện xác định suy ra chỉ có $x=7$ là nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm là $x=7$.

Nhận xét: Từ các lời giải các bài toán trên ta suy ra đối với các dạng phương trình sau ta có thể giải bằng cách thực hiện phép biến đổi tương đương:

- $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \text{ (hay } g(x) \geq 0) \end{cases}$
- $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = [g(x)]^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau

a) $x = \sqrt{\sqrt{3x^2+1} - 1}$ b) $\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1 = 0$

Lời giải

a) Phương trình tương đương với

$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = \sqrt{3x^2+1} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{3x^2+1} = x^2+1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 3x^2+1 = (x^2+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^4 - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2(x^2-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=0$ và $x=1$

b) Ta có $\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = -x^2 + 3x - 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x-1 \geq 0 \\ 2x-1 = (-x^2+3x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x-1 \geq 0 \\ (x-1)^2(x^2-4x+2) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x-1 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x^2-4x+2=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x-1 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2\pm\sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2-\sqrt{2} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=1$ và $x=2-\sqrt{2}$.

Ví dụ 3: Tìm m để phương trình $\sqrt{x^2+mx+2}=2x+1$ có hai nghiệm phân biệt.

Lời giải

Phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{1}{2} \\ 3x^2+(4-m)x-1=0 \quad (*) \end{cases}$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn hoặc bằng $-\frac{1}{2} \Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y=3x^2+(4-m)x-1$ trên $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt.

Xét hàm số $y=3x^2+(4-m)x-1$ trên $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$. Ta có $-\frac{b}{2a}=\frac{m-4}{6}$

+ TH1: Nếu $\frac{m-4}{6} \le -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m \le 1$ thì hàm số đồng biến trên $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$ nên $m \le 1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ TH2: Nếu $\frac{m-4}{6} > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m > 1$:

Ta có bảng biến thiên

x	$-\frac{1}{2}$		$\frac{m-4}{6}$		$+\infty$
y	$y\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\searrow$	$y\left(\frac{m-4}{6}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra đồ thị hàm số $y=3x^2+(4-m)x-1$ trên $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt

$\Leftrightarrow y\left(-\frac{1}{2}\right) \ge 0 > y\left(\frac{m-4}{6}\right) \Leftrightarrow \frac{2m-9}{4} \ge 0 > \frac{1}{12}\left(-m^2+8m-28\right)$ (1)

Vì $-m^2+8m-28=-(m-4)^2-12<0, \forall m$ nên

(1) $\Leftrightarrow 2m-9 \ge 0 \Leftrightarrow m \ge \frac{9}{2}$ (thỏa mãn $m>1$)

Vậy $m \ge \frac{9}{2}$ là giá trị cần tìm.

Loại 2: Phân tích thành tích bằng cách nhân liên hợp.

Để trục căn thức ta nhân với các đại lượng liên hợp:

- $\sqrt{A}-\sqrt{B}=\frac{\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}=\frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}}$
- $\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}=\frac{\left(\sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}\right)\left(\left(\sqrt[3]{A}\right)^2+\sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B}+\left(\sqrt[3]{B}\right)^2\right)}{\left(\sqrt[3]{A}\right)^2+\sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B}+\left(\sqrt[3]{B}\right)^2}=\frac{A-B}{\left(\sqrt[3]{A}\right)^2+\sqrt[3]{A}\sqrt[3]{B}+\left(\sqrt[3]{B}\right)^2}$

Với A, B không đồng thời bằng không.

Ví dụ 4: Giải các phương trình sau

a) $\frac{2(x-1)^2}{\left(3-\sqrt{7+2x}\right)^2}=x+20$ b) $\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{x}=2$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $\begin{cases} 7+2x \ge 0 \\ 3 \ne \sqrt{7+2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\frac{7}{2} \\ x \ne 1 \end{cases}$

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{2(x-1)^2\left(3+\sqrt{7+2x}\right)^2}{\left(3-\sqrt{7+2x}\right)^2\left(3+\sqrt{7+2x}\right)^2}=x+20$

$\Leftrightarrow \frac{2(x-1)^2\left(10+2x+6\sqrt{7+2x}\right)}{(2-2x)^2}=x+20$

$\Leftrightarrow 10+2x+6\sqrt{7+2x}=2(x+20)$

$\Leftrightarrow \sqrt{7+2x}=5 \Leftrightarrow x=9$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có nghiệm $x=9$

b) ĐKXĐ: $x \ge \frac{2}{3}$

Nhẩm ta thấy $x=1$ là nghiệm của phương trình nên ta tách như sau

Phương trình $\Leftrightarrow \left(\sqrt{3x-2}-1\right)+\left(\sqrt[3]{x}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{3x-2}-1\right)\left(\sqrt{3x-2}+1\right)}{\sqrt{3x-2}+1}+\frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=0$

$\Leftrightarrow \frac{3x-3}{\sqrt{3x-2}+1}+\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{3}{\sqrt{3x-2}+1}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}\right)=0$ (*)

Do $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1=\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ nên $\frac{3}{\sqrt{3x-2}+1}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}>0$

Phương trình (*) $\Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Ví dụ 5: Giải các phương trình sau

a) $(x+3)\sqrt{2x^2+1}=x^2+x+3$ b) $(3x+1)\sqrt{x^2+3}=3x^2+2x+3$

Lời giải

a) Ta thấy $x=-3$ không là nghiệm của phương trình

Xét $x\neq -3$, phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1}=\frac{x^2+x+3}{x+3}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1}-1=\frac{x^2}{x+3}\Leftrightarrow \frac{2x^2}{\sqrt{2x^2+1}+1}=\frac{x^2}{x+3}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2(x+3)=\sqrt{2x^2+1}+1 \end{array}\right.$ (*)

Phương trình (*) $\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+1}=2x+5$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\geq -\frac{5}{2} \\ 2x^2+1=4x^2+25+20x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\geq -\frac{5}{2} \\ x^2+10x+12=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\geq -\frac{5}{2} \\ x=-5\pm\sqrt{13} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=5+\sqrt{13}$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=0$ và $x=-5+\sqrt{13}$

b) Ta thấy $x=-\frac{1}{3}$ không là nghiệm của phương trình

Xét $x\neq -\frac{1}{3}$, phương trình đã cho $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3}=\frac{3x^2+2x+3}{3x+1}$

Đến đây, chú ý $3x^2+2x+3=3(x+\frac{1}{3})^2+\frac{8}{3}>0$

Nên phương trình có nghiệm phải thỏa mãn $x>-\frac{1}{3}\Rightarrow \sqrt{x^2+3}+2x>0$

Do đó phương trình đã cho $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3}-2x=\frac{3x^2+2x+3}{3x+1}-2x$

$\Leftrightarrow \frac{x^2+3-4x^2}{\sqrt{x^2+3}+2x}=\frac{3x^2+2x+3-6x^2-2x}{3x+1}$

$\Leftrightarrow \frac{3(1-x^2)}{\sqrt{x^2+3}+2x}=\frac{3(1-x^2)}{3x+1}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ \sqrt{x^2+3}+2x=3x+1 \end{array}\right.$

* TH1: $x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$

Nhưng $x=-1$ không thoả mãn $x>-\frac{1}{3}$ nên phương trình có nghiệm $x=1$

* TH2: $\sqrt{x^2+3}+2x=3x+1\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3}=x+1$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\geq -1 \\ x^2+3=x^2+1+2x \end{array}\right. \Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Loại 3: Đặt ẩn phụ

Ví dụ 6: Giải các phương trình sau

a) $x^2+\sqrt{x^2+11}=31$ b) $(x+5)(2-x)=3\sqrt{x^2+3x}$

Lời giải

a) Đặt $t=\sqrt{x^2+11}$, $t\geq 0$. Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$t^2+t-42=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=6 \\ t=-7 \end{array}\right.$

Vì $t\geq 0\Rightarrow t=6$, thay vào ta có $\sqrt{x^2+11}=6$

$x^2+11=36\Leftrightarrow x=\pm 5$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=\pm 5$

b) Phương trình $\Leftrightarrow x^2+3x+3\sqrt{x^2+3x}-10=0$

Đặt $t=\sqrt{x^2+3x}$, $t\geq 0$. Phương trình đã cho trở thành

$t^2+3t-10=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-5 \end{array}\right.$.

Vì $t\geq 0\Rightarrow t=2$, thay vào ta có $\sqrt{x^2+3x}=2$

$\Leftrightarrow x^2+3x-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-4 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=1$ và $x=-4$.

Ví dụ 7: Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{4x-1}+4x^2-6x+1=0$ b) $\sqrt{3x^2-2x+9}+\sqrt{3x^2-2x+2}=7$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x\geq \frac{1}{4}$

Đặt $t=\sqrt{4x-1}$, $t\geq 0\Rightarrow x=\frac{t^2+1}{4}$

Phương trình trở thành $t+4\left(\frac{t^2+1}{4}\right)^2-6\frac{t^2+1}{4}+1=0$

$\Leftrightarrow 4t+t^4+2t^2+1-6\left(t^2+1\right)+4=0$

$\Leftrightarrow t^4-4t^2+4t-1=0\Leftrightarrow (t-1)\left(t^3+t^2-3t+1\right)=0$

$\Leftrightarrow (t-1)^2\left(t^2+2t-1\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-1\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$ (loại $t=-1-\sqrt{2}$)

Với $t=1$ ta có $1=\sqrt{4x-1}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Với $t=-1+\sqrt{2}$ ta có $-1+\sqrt{2}=\sqrt{4x-1}\Leftrightarrow 4x-1=3-2\sqrt{2}\Leftrightarrow x=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=\frac{1}{2}$ và $x=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

b) Đặt $t=\sqrt{3x^2-2x+2}$, điều kiện $t\ge 0$. Khi đó $\sqrt{3x^2-2x+9}=\sqrt{t^2+7}$.

Phương trình trở thành $\sqrt{t^2+7}+t=7$

$\Leftrightarrow \sqrt{t^2+7}=7-t\Leftrightarrow \begin{cases} t\le 7 \\ t^2+7=t^2-14t+49\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} t\le 7 \\ t=3\end{cases}\Leftrightarrow t=3$

Với $t=3$ ta có $\sqrt{3x^2-2x+2}=3$

$\Leftrightarrow 3x^2-2x+2=9\Leftrightarrow 3x^2-2x-7=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1+\sqrt{22}}{3} \\ x=\frac{1-\sqrt{22}}{3}\end{array}\right.$

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=\frac{1\pm\sqrt{22}}{3}$.

Ví dụ 8: Giải phương trình

a) $(x+1)^2-2\sqrt{2x(x^2+1)}=0$ b) $10\sqrt{x^3+1}=3(x^2+2)$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $2x\left(x^2+1\right)\ge 0\Leftrightarrow x\ge 0$

Đặt $\sqrt{2x}=a,\sqrt{x^2+1}=b;\ a\ge 0,b\ge 0$

Suy ra $a^2+b^2=2x+x^2+1=(x+1)^2$

Phương trình trở thành $a^2+b^2-2ab=0\Leftrightarrow (a-b)^2=0\Leftrightarrow a=b$

Suy ra $\sqrt{2x}=\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow 2x=x^2+1\Leftrightarrow (x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm là $x=1$.

b) ĐKXĐ: $x^3+1\ge 0\Leftrightarrow x\ge -1$.

Phương trình $\Leftrightarrow 10\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)}=3(x^2+2)$

Đặt $\sqrt{x+1}=a,\sqrt{x^2-x+1}=b$, $a\ge 0,b\ge 0$

Suy ra $a^2+b^2=x^2+2$ khi đó

Phương trình trở thành

$10ab=3\left(a^2+b^2\right)\Leftrightarrow 3a^2-10ab+3b^2=0\Leftrightarrow (3a-b)(a-3b)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a=b \\ a=3b\end{array}\right.$

Với $3a=b$ ta có $3\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-x+1}\Leftrightarrow 9(x+1)=x^2-x+1$

$\Leftrightarrow x^2-10x-8=0\Leftrightarrow x=5\pm\sqrt{33}$ (thỏa mãn điều kiện)

Với $a=3b$ ta có $\sqrt{x+1}=3\sqrt{x^2-x+1}\Leftrightarrow x+1=9\left(x^2-x+1\right)$

$\Leftrightarrow 9x^2-10x+8=0$ (phương trình vô nghiệm)

Vậy phương trình có nghiệm là $x=5\pm\sqrt{33}$.

Ví dụ 9: Tìm m để phương trình sau có nghiệm

a) $(2x-1)^2+m=\sqrt{x^2-x+1}$ (1) b) $3\sqrt{x-1}+m\sqrt{x+1}=2\sqrt[4]{x^2-1}$ (2)

Lời giải

a) Đặt $t=\sqrt{x^2-x+1}\Rightarrow t^2=x^2-x+1\Rightarrow (2x-1)^2=4x^2-4x+1=4t^2-3$

Vì $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}$ nên $t\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$

Phương trình (1) trở thành $4t^2-3+m=t\Leftrightarrow -4t^2+t+3=m$ (1')

Xét hàm số $y=-4t^2+t+3$ với $t\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ta có $-\frac{b}{2a}=\frac{1}{8}<\frac{\sqrt{3}}{2}$

Bảng biến thiên

x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
y	$\frac{-12+\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$ $-\infty$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (1') có nghiệm $t\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y=-4t^2+t-3$ trên $\left[\frac{\sqrt{3}}{2};+\infty\right)$ cắt đường thẳng

$y=m\Leftrightarrow m\le\frac{-12+\sqrt{3}}{2}$.

Vậy phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi $m \le \frac{-12+\sqrt{3}}{2}$

b) ĐKXĐ: $x \ge 1$.

Chia cả hai vế cho $\sqrt{x+1}$, ta có

$$(2) \Leftrightarrow 3\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} + m = 2\frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{\sqrt{x+1}} \Leftrightarrow -3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} = m$$

Đặt $t = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} = \sqrt[4]{1-\frac{2}{x+1}} \Rightarrow 0 \le t < 1$

Phương trình (2) trở thành $-3t^2 + 2t = m$ (2')

Xét hàm số $y = -3t^2 + 2t$ trên $[0;1)$, ta có $-\frac{b}{2a} = \frac{1}{3}$, $y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{3}$		1
y	0	↗	$\frac{1}{3}$	↘	−1

Phương trình (2) có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2') có nghiệm $t \in [0;1)$

$\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = -3t^2 + 2t$ trên $[0;1)$ cắt đường thẳng

$y = m \Leftrightarrow -1 < m \le \frac{1}{3}$

Vậy phương trình (2) có nghiệm khi và chỉ khi $-1 < m \le \frac{1}{3}$

Lưu ý: Khi giải bài toán bằng cách đặt ẩn phụ, đối với loại toán không chứa tham số thì có thể không nêu điều kiện(hoặc điều kiện "lỏng") của ẩn phụ vì sau khi tìm được nghiệm ẩn phụ rồi chúng ta phải thay lại để giải. Nhưng với bài toán chứa tham số thì chúng ta ***cần phải*** nêu điều kiện "chặt" đối với ẩn phụ.

Loại 4: Đặt ẩn phụ không hoàn toàn

Ví dụ 10: Giải phương trình $3\sqrt{x+3} = 3x^2 + 4x - 1$

Lời giải

ĐKXĐ: $x \ge -3$

Phương trình $\Leftrightarrow -27(x+3) - 3\sqrt{x+3} + 3x^2 + 31x + 80 = 0$

Đặt $t = \sqrt{x+3}$ $(t \ge 0)$ phương trình trở thành: $-27t^2 - 3t + 3x^2 + 31x + 80 = 0$

Có $\Delta_t = (18x+93)^2$ suy ra $t_1 = \frac{-3x-16}{9}$, $t_2 = \frac{x+5}{3}$

• $\sqrt{x+3} = \frac{-3x-16}{9}$ Vô nghiệm vì với $x \ge -3$ thì $\frac{-3x-16}{9} < 0$

• $\sqrt{x+3} = \frac{x+5}{3} \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = -2$

Vậy phương trình ban đầu có hai nghiệm $x = 1$ và $x = -2$

Nhận xét: Trong lời giải trên ta thấy khó nhất là biến đổi phương trình ban đầu thành $-27(x+3) - 3\sqrt{x+3} + 3x^2 + 31x + 80 = 0$ để sau khi đặt ẩn phụ $t = \sqrt{x+3}$ thì phương trình ẩn t có $\Delta = (18x+93)^2$ (là bình phương của một nhị thức)

Nếu ta tách không hợp lý thì Δ không là bình phương của một nhị thức hoặc là một hằng số, trong trường hợp đó việc giải phương trình theo hướng trên là không thể thực hiện được.

Vậy làm thế nào để tách được phương trình mà thỏa mãn các điều kiện trên và việc tách ra như thế có là duy nhất?. Để trả lời được câu hỏi này ta thực hiện theo các bước như sau:

B1: Viết $(1) \Leftrightarrow m(x+3) - 3\sqrt{x+3} + 3x^2 + (4-m)x - 1 - 3m = 0 \quad (m \ne 0)$

B2: Đặt $t = \sqrt{x+3}$ $(t \ge 0)$ pt trở thành

$mt^2 - 3t + 3x^2 + (4-m)x - 1 - 3m = 0$

Có $\Delta_t = -12mx^2 - 4m(4-m)x + 12m^2 + 4m + 9 = f(x)$

B3: Tìm m sao cho

$$\begin{cases} -12m > 0 \\ \Delta_f' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12m > 0 \\ \Delta' = 4m(m+27)\left(m^2+m+1\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -27$$

Đến đây việc giải pt như đã trình bày ở trên.

Ví dụ 11: Giải phương trình $\sqrt{60-24x-5x^2} = x^2 + 5x - 10$

Lời giải

ĐKXĐ: $60 - 24x - 5x^2 \ge 0$

Đặt $t = \sqrt{60-24x-5x^2}$ $(t \ge 0)$ pt trở thành

$\frac{1}{6}t^2 + t - \frac{1}{6}x^2 - x = 0 \Leftrightarrow t^2 + 6t - x^2 - 6x = 0$

Phương trình ẩn t này có $\Delta' = (x+3)^2$ nên ta tìm được $t_1 = x, t_2 = -x - 6$

• $\sqrt{60-24x-5x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 + 4x - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2 + \sqrt{14}$

• $\sqrt{60-24x-5x^2}=-x-6 \Leftrightarrow \begin{cases}-x-6\ge 0\\ x^2+6x-4=0\end{cases} \Leftrightarrow x=-3-\sqrt{13}$

Vậy pt ban đầu có hai nghiệm $x_1=-2-\sqrt{14},\ x_2=-3-\sqrt{13}$

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 3.30: Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{2x+1}=3x+1$ b) $\sqrt{x^4+3x+1}=\sqrt{x^4-x^2-1}$

c) $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}}=x+1$ d) $x^2+\sqrt{x+7}=7$

Hướng dẫn giải

a) Pt $\Leftrightarrow \begin{cases}3x+1\ge 0\\ 2x+1=(3x+1)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -\frac{1}{3}\\ 9x^2+4x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -\frac{1}{3}\\ x=0,\ x=-\frac{4}{9}\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-\frac{4}{9}\end{array}\right.$.

b) PT $\Leftrightarrow \begin{cases}x^4-x^2-1\ge 0\\ x^4+3x+1=x^4-x^2-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^4-x^2-1\ge 0\\ x^2+3x+2=0\end{cases} \Leftrightarrow x=-2$.

c) Pt $\Leftrightarrow \begin{cases}x+1\ge 0\\ 2x+\sqrt{6x^2+1}=(x+1)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -1\\ \sqrt{6x^2+1}=x^2+1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -1\\ 6x^2+1=(x^2+1)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -1\\ x^4-4x^2=0\end{cases} \Leftrightarrow x=0, x=2$.

d) $x^2-(x+7)+(x+\sqrt{x+7})=0 \Leftrightarrow (x+\sqrt{x+7})(x-\sqrt{x+7}+1)=0$

Từ đó phương trình đã cho có hai nghiệm $x=2;\ x=\frac{1-\sqrt{29}}{2}$.

Bài 3.31: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x^2+12}+5=3x+\sqrt{x^2+5}$ b) $3\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x^2+8}-2=\sqrt{x^2+15}$

c) $\sqrt{5x-1}+\sqrt[3]{9-x}=2x^2+3x-1$ d) $\sqrt[3]{x+6}+x^2=7-\sqrt{x-1}$

Hướng dẫn giải

a) ĐKXĐ: $x\ge\frac{5}{3}$

Phương trình đã cho tương đương với:

$\sqrt{x^2+12}-4=3x-6+\sqrt{x^2+5}-3$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+12}+4}=3(x-2)+\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3}$

$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-3\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ \frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}-3=0(*)\end{array}\right.$

Do $\frac{1}{\sqrt{x^2+12}+4}<\frac{1}{\sqrt{x^2+5}+3} \Rightarrow \frac{x+2}{\sqrt{x^2+12}+4}-\frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3}<0$ nên pt (*) vô nghiệm

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

b) Ta dự đoán được nghiệm $x=\pm 1$, và ta viết lại phương trình như sau:

PT $\Leftrightarrow 3\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)+\left(\sqrt{x^2+8}-3\right)=\left(\sqrt{x^2+15}-4\right)$

$\Leftrightarrow \frac{3\left(x^2-1\right)}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1}+\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+8}+3}=\frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+15}+4}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2=1\\ \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+8}+3}=\frac{1}{\sqrt{x^2+15}+4}\end{array}\right.$

Mặt khác, ta có:

$\sqrt{x^2+15}>\sqrt{x^2+8} \Rightarrow \sqrt{x^2+15}+4>\sqrt{x^2+8}+3 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+15}+4}<\frac{1}{\sqrt{x^2+8}+3}$

Nên phương trình thức hai vô nghiệm.

Vậy pt có 2 nghiệm $x=1, x=-1$.

c) ĐKXĐ: $x\ge\frac{1}{5}$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$\sqrt{5x-1}-2+\sqrt[3]{9-x}-2=2x^2+3x-5$

$\Leftrightarrow \frac{5(x-1)}{\sqrt{5x-1}+2}+\frac{1-x}{\left(\sqrt[3]{9-x}\right)^2+2\sqrt[3]{9-x}+4}=(x-1)(2x+5)$

$\Leftrightarrow (x-1)\left[2x+5-\frac{5}{\sqrt{5x-1}+2}+\frac{1}{\left(\sqrt[3]{9-x}\right)^2+2\sqrt[3]{9-x}+4}\right]=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left[2x+\frac{5\sqrt{5x-1}+5}{\sqrt{5x-1}+2}+\frac{1}{\left(\sqrt[3]{9-x}\right)^2+2\sqrt[3]{9-x}+4}\right]=0$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất $x=1$.

d) ĐKXĐ: $x\ge 1$

PT $\Leftrightarrow \sqrt[3]{x+6}+\sqrt{x-1}+x^2-7=0$

$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x+6}-2)+(\sqrt{x-1}-1)+(x^2-4)=0$ (1)

Ta có $\forall x \geq 1: \sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4=(\sqrt[3]{x+6}+1)^2+3>0$ & $\sqrt{x-1}+1>0$

Do đó PT $\Leftrightarrow \dfrac{x-2}{\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4}+\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}+(x-2)(x+2)=0$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{1}{\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}+x+2\right]=0 \Leftrightarrow x=2$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

Bài 3.32: Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{x^2+x+2}=x^2+x$

b) $(2x-1)^2=\sqrt{x^2-x+1}$

c) $13x+2(3x+2)\sqrt{x+3}+42=0$

d) $x^2-2x-22-\sqrt{-x^2+2x+24}=0$

e) $x^2+2x\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=3x+1$

f) $x^2+\sqrt[3]{x^4-x^2}=2x+1$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $t=\sqrt{x^2+x+2}$, $(t\geq 0) \Rightarrow x^2+x=t^2-2$

Phương trình trở thành: $t=t^2-2 \Leftrightarrow t^2-t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1(l) \\ t=2 \end{array}\right.$

Với $t=2$ ta có: $2=\sqrt{x^2+x+2}$, $(t\geq 0) \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

b) Đặt $t=\sqrt{x^2-x+1}$, $(t\geq 0) \Rightarrow x^2-x=t^2-1$

Phương trình trở thành: $4\left(t^2-1\right)+1=t \Leftrightarrow 4t^2-t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{3}{4} \end{array}\right.$

Từ đó phương trình có nghiệm là $x=0, x=1$

c) Điều kiện $x+3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -3$. Đặt $t=\sqrt{x+3}$, $t\geq 0 \Rightarrow x=t^2-3$

Lúc đó phương trình đã cho trở thành:

$13(t^2-3)+2\left[3(t^2-3)+2\right]t+42=0 \Leftrightarrow 6t^3+13t^2-14t+3=0$

$$\Leftrightarrow (t+3)(6t^2-5t+1)=0 \Leftrightarrow 6t^2-5t+1=0,(t\geq 0) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{2} \\ t=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

Từ đó $x=-\dfrac{11}{4}; x=-\dfrac{26}{9}$.

d) Đặt $t=\sqrt{-x^2+2x+24}$, $(t\geq 0) \Rightarrow -x^2+2x+24=t^2 \Rightarrow x^2-2x-22=2-t^2$

Phương trình trở thành: $2-t^2-t=0 \Leftrightarrow t^2+t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-2(l) \end{array}\right.$

Với $t=1$ ta có: $\sqrt{-x^2+2x+24}=1 \Leftrightarrow x^2-2x-23=0 \Leftrightarrow x=1\pm 2\sqrt{6}$

e) Điều kiện: $-1\leq x<0$

Chia cả hai vế cho x ta nhận được: $x+2\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=3+\dfrac{1}{x}$

Đặt $t=x-\dfrac{1}{x}$, ta được $t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-3 \end{array}\right.$.

f) $x=0$ không phải là nghiệm. Chia cả hai vế cho x ta được: $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+\sqrt[3]{x-\dfrac{1}{x}}=2$

Đặt $t=\sqrt[3]{x-\dfrac{1}{x}}$, Ta có : $t^3+t-2=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Bài 3.33: Giải các phương trình sau

a) $4x^2+22+\sqrt{3x-2}=21x$

b) $x\left(1-5\sqrt{x+3}\right)=3\left(x^2-4\right)$

c) $51\sqrt{x-2}=3x^2-58x+110$

d) $x^2+x\sqrt{3x-1}+2=6x$

Hướng dẫn giải

a) PT $\Leftrightarrow -(3x-2)+\sqrt{3x-2}+4x^2-18x+20=0$

Đặt $t=\sqrt{3x-2}$, $t\geq 0$.

Phương trình trở thành $-t^2+t+4x^2-18x+20=0$, có $\Delta_t=(4x-9)^2$

Từ đó ta có nghiệm phương trình là $x=\dfrac{19+\sqrt{73}}{8}$, $x=\dfrac{23-\sqrt{97}}{8}$

b) PT $\Leftrightarrow 2(x+3)+5x\sqrt{x+3}+3x^2-3x-18=0$

Đặt $t=\sqrt{x+3}$, $t\geq 0$.

Phương trình trở thành $2t^2+5xt+3x^2-3x-18=0$

Có $\Delta_t=(x+12)^2$. Từ đó ta có nghiệm phương trình là $x=1$, $x=-\dfrac{16+2\sqrt{10}}{9}$

c) PT $\Leftrightarrow -27(x-2)-51\sqrt{x-2}+3x^2-31x+56=0$

Đặt $t=\sqrt{x-2}$, $t\geq 0$.

Phương trình trở thành: $-27t^2-51t+3x^2-31x+56=0$

Có $\Delta_t=(18x-93)^2$

Từ đó ta có nghiệm phương trình là $x=\dfrac{25+3\sqrt{33}}{2}$, $x=\dfrac{41-3\sqrt{93}}{6}$

d) PT $\Leftrightarrow -2(3x-1)+x\sqrt{3x-1}+x^2=0\Leftrightarrow (x-\sqrt{3x-1})(2\sqrt{3x-1}+x)=0$

Từ đó ta có nghiệm phương trình là $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Bài 3.34: Giải phương trình $x+\sqrt{x^2-9}=\dfrac{2(x+3)}{(x-3)^2}$.

Hướng dẫn giải

- Với $x>3$: Đặt $a=\sqrt{x+3};\ b=\sqrt{x-3};\ a>0,b>0\Rightarrow\begin{cases}a^2+b^2=2x\\a^2-b^2=6\end{cases}$

Phương trình trở thành:

$a^2+b^2+2ab=\dfrac{4a^2}{b^4}\Leftrightarrow a+b=2\dfrac{a}{b^2}$

$\Leftrightarrow (a+b)(a-b)=\dfrac{2a(a-b)}{b^2}\Leftrightarrow 6b^2=2a(a-b)$

$\Leftrightarrow a^2-ab-3b^2=0\Leftrightarrow a=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}b$

Do $a>0,b>0\Rightarrow a=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}b$

Suy ra $\sqrt{x+3}=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\sqrt{x-3}\Leftrightarrow x=8-\sqrt{13}$ (thỏa mãn).

- Với $x\le -3$ tương tự ta có phương trình vô nghiệm.
- Với $-3<x\le 3$ khi đó phương trình không xác định nên nó vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm là $x=8-\sqrt{13}$.

Bài 3.35: Giải phương trình $\sqrt{x^2-x+1}=\dfrac{x^3+2x^2-3x+1}{x^2+2}$

Hướng dẫn giải

Xét phương trình $\sqrt{x^2-x+1}=-x-2$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le -2\\x^2-x+1=x^2+4x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le -2\\x=-\dfrac{3}{5}\ \text{(vô nghiệm)}\end{cases}$

Suy ra $\sqrt{x^2-x+1}+x+2\ne 0$ do đó

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1}-(x+2)=\dfrac{x^3+2x^2-3x+1}{x^2+2}-(x+2)$

$\Leftrightarrow \dfrac{-5x-3}{\sqrt{x^2-x+1}+x+2}=\dfrac{-5x-3}{x^2+2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5x+3=0\\\sqrt{x^2-x+1}+x+2=x^2+2\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{3}{5}\\\sqrt{x^2-x+1}=x^2-x\ (**)\end{cases}$

Ta có $(**)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-x\ge 0\\x^2-x+1=\left(x^2-x\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{3+2\sqrt{5}}}{2}$

Suy ra phương trình có nghiệm là $x\in\left\{-\dfrac{3}{5};\dfrac{1-\sqrt{3+2\sqrt{5}}}{2};\dfrac{1+\sqrt{3+2\sqrt{5}}}{2}\right\}$.

DẠNG TOÁN 4: *PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO*

Loại 1: Đưa về phương trình tích.

1. Phương pháp giải

Để giải phương trình $f(x)=0$ ta phân tích $f(x)=f_1(x).f_2(x)...f_n(x)$ khi đó

$$f(x)=0\Leftrightarrow\begin{cases}f_1(x)=0\\f_2(x)=0\\....\\f_n(x)=0\end{cases}$$

Để đưa về một phương trình tích ta thường dùng các cách sau:

- Sử dụng các hằng đẳng thức đưa về dạng $a^2-b^2=0,\ a^3-b^3=0,...$
- Nhẩm nghiệm rồi chia đa thức: Nếu $x=a$ là một nghiệm của phương trình $f(x)=0$ thì ta luôn có sự phân thích: $f(x)=(x-a)g(x)$.

* Để dự đoán nghiệm ta chú ý các kết quả sau:

Cho đa thức $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$

+ Nếu phương trình $f(x)=0$ có nghiệm nguyên thì nghiệm đó phải là ước của a_0.
+ Nếu đa thức có tổng các hệ số bằng không thì phương trình $f(x)=0$ có một nghiệm bằng 1.
+ Nếu đa thức có tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng các hệ số bậc lẻ thì phương trình $f(x)=0$ có một nghiệm bằng -1.

* Để phân tích $f(x)$ ta sử dụng lược đồ Hooc-ne như sau:

Nếu $f(x)$ có nghiệm là $x=x_0$ thì $f(x)$ chứa nhân tử $(x-x_0)$ tức là:

$f(x)=(x-x_0).g(x)$, trong đó $g(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+...+b_1x+b_0$

Với hệ số b_i được xác định như sau:

Lược đồ Hoócne

	a_n	a_{n-1}	.....	a_1	a_0
a	$b_{n-1}=a_n$	$b_{n-2}=a.a_n+a_{n-1}$	.....	$b_1=a.a_2+a_1$	0

Ví dụ: Giải phương trình $x^4+x^3-x-1=0$

Nhận thấy : $a_4+a_3+a_2+a_1+a_0=1+1+0+(-1)+(-1)=0$

Và : $a_4+a_2+a_0=1+0+(-1)=a_3+a_1=1+(-1)$

Suy ra phương trình có hai nghiệm $x_1=1, x_2=-1$

Lược đồ Hoócne

	1	1	0	−1	−1
$x=1$	1	2	2	1	0
$x=-1$	1	1	1	0	

Ta có phương tình thương đương với $(x-1)(x+1)\left(x^2+x+1\right)=0\Leftrightarrow x=\pm1$.

- Sử dụng phương pháp hệ số bất định

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau.

a) $x^3-3x^2-6x+8=0$ b) $3x^5-13x^4+16x^3+5x^2-21x+6=0$.

Lời giải

a) Phương trình tương đương với

$$(x+2)(x^2-5x+4)=0\Leftrightarrow(x+2)(x-1)(x-4)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=1\\x=4\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=-2, x=1$ và $x=4$.

b) Phương tình tương đương với $(x+1)\left(3x^4-16x^3+32x^2-27x+6\right)=0$

$$\Leftrightarrow(x+1)(x-2)\left(3x^3-10x^2+12x-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(3x-1)(x-2)(x+1)(x^2-3x+3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\\x=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=-1, x=\dfrac{1}{3}$ và $x=2$.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $x^4-4x^3-10x^2+37x-14=0$

Lời giải

Đối với phương trình này ta không nhẩm được nghiệm nguyên hay hữu tỉ

Bây giờ ta giả sử phương trình trên phân tích được thành dạng

$$\left(x^2+a_1x+b_1\right)\left(x^2+a_2x+b_2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^4+(a_1+a_2)x^3+(a_1a_2+b_1+b_2)x^2+(a_1b_2+a_2b_1)x+b_1b_2=0$$

Đồng nhất các hệ số ta có $\begin{cases}a_1+a_2=-4\\a_1a_2+b_1+b_2=-10\\a_1b_2+a_2b_1=37\\b_1b_2=-14\end{cases}$

Suy ra $b_1=-2;b_2=-7;a_1=-5;a_2=1$

Do đó phương trình tương đương với $\left(x^2-5x+2\right)\left(x^2+x-7\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-5x+2=0\\x^2+x-7=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}\\x=\dfrac{-1\pm\sqrt{29}}{2}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}$ và $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{29}}{2}$

Ví dụ 3: Giải các phương trình sau:

a) $x^4-4x^2+12x-9=0$ b) $x^4-4x=1$

Lời giải

a) Phương trình tương đương với $x^4-(2x-3)^2=0$

$$\Leftrightarrow(x^2+2x-3)(x^2-2x+3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=1$ và $x=-3$.

b) Phương trình tương đương với $x^4+2x^2+1-2(x^2+2x+1)=0$

$$\Leftrightarrow(x^2+1)^2-[\sqrt{2}(x+1)]^2=0\Leftrightarrow(x^2+\sqrt{2}x+\sqrt{2}+1)(x^2-\sqrt{2}x-\sqrt{2}+1)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}x^2+\sqrt{2}x+\sqrt{2}+1=0\\x^2-\sqrt{2}x-\sqrt{2}+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}$

Nhận xét: Đây là phương trình đưa về được dạng $\left(x^2+\alpha\right)^2=a(x+\beta)^2$

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 3.36: Giải các phương trình sau:

a) $x^4-2x^2-2x+1=0$ b) $x^4-x^2-2x-1=0$

Hướng dẫn giải

a) $(x^2-x+1)^2-3x^2=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1-\sqrt[4]{12}+\sqrt{3}}{2}$ hoặc $x=\dfrac{1-\sqrt[4]{12}+\sqrt{3}}{2}$

b) PT $\Leftrightarrow (x^2-x-1)(x^2+x+1)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Loại 2: Đặt ẩn phụ.

Phương pháp giải:

Điểm quan trọng nhất trong đối với phương trình dạng này là phát hiện ẩn phụ $t=f(x)$ có ngay trong từng phương trình hoặc xuất hiện sau một phép biến đổi hằng đẳng thức cơ bản hoặc phép chia cho một biểu thức khác 0.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau

a) $2x^4-5x^3+6x^2-5x+2=0$ b) $2x^4-21x^3+74x^2-105x+50=0$

Lời giải

a) Ta thấy $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình nên chia hai vế phương trình cho x^2 ta được: $2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+6=0$.

Đặt $t=x+\dfrac{1}{x}$, $\Rightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}=(x+\dfrac{1}{x})^2-2=t^2-2$

Ta có phương trình: $2(t^2-2)-5t+6=0\Leftrightarrow 2t^2-5t+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

* $t=\dfrac{1}{2}\Rightarrow x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2x^2-x+2=0$ (vô nghiệm).

* $t=2\Rightarrow x+\dfrac{1}{x}=2\Leftrightarrow x^2-2x+1=0\Leftrightarrow x=1$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

b) Ta thấy $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình nên chia hai vế phương trình cho x^2 ta được:

$2x^2-21x+74-\dfrac{105}{x}+\dfrac{50}{x^2}=0\Leftrightarrow 2\left(x^2+\dfrac{25}{x^2}\right)-21\left(x+\dfrac{5}{x}\right)+74=0$.

Đặt $t=x+\dfrac{5}{x}$, $\Rightarrow x^2+\dfrac{25}{x^2}=\left(x+\dfrac{5}{x}\right)^2-10=t^2-10$

Ta có phương trình: $2(t^2-10)-21t+74=0\Leftrightarrow 2t^2-21t+54=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=6\\t=\dfrac{9}{2}\end{array}\right.$

* $t=\dfrac{9}{2}\Rightarrow x+\dfrac{5}{x}=\dfrac{9}{2}\Leftrightarrow 2x^2-9x+10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$.(thỏa mãn)

* $t=6\Rightarrow x+\dfrac{5}{x}=6\Leftrightarrow x^2-6x+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=5\end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm là $x\in\left\{1;2;\dfrac{5}{2};5\right\}$.

Chú ý: Các phương trình trên có dạng tổng quát là

$ax^4+bx^3+cx^2+dx\pm e=0$ với $\dfrac{e}{a}=\left(\dfrac{d}{b}\right)^2=k^2$.

Tức là có dạng $ax^4+bx^3+cx^2\pm bkx+ak^2=0$.

Cách giải: Xét $x=0$ xem có phải là nghiệm của phương trình không

Với $x\neq 0$ ta chia hai vế phương trình cho x^2 ta có pt:

$$a\left(x^2+\frac{k^2}{x^2}\right)+b\left(x\pm\frac{k}{x}\right)+c=0$$

Đặt $t=x\pm\dfrac{k}{x}$, ta có $x^2+\dfrac{k^2}{x^2}=\left(x\pm\dfrac{k}{x}\right)^2\mp 2k=t^2\mp 2k$ thay vào phương trình ta quy về phương trình bậc hai $a(t^2\mp 2k)+bt+c=0$.

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau

a) $x(x+1)(x+2)(x+3)=24$ b) $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)=3x^2$

Lời giải

a) Phương trình tương đương với $(x^2+3x)(x^2+3x+2)=24$.

Đặt $t=x^2+3x$, phương trình trở thành

$t(t+2)=24\Leftrightarrow t^2+2t-24=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-6\\t=4\end{array}\right.$

* $t=-6\Rightarrow x^2+3x=-6\Leftrightarrow x^2+3x+6=0$ (Phương trình vô nghiệm)

* $t=4\Rightarrow x^2+3x=4\Leftrightarrow x^2+3x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-4\end{array}\right.$.

Vậy phương rình có nghiệm là $x=-4$ và $x=1$.

b) Phương trình tương đương với $4\left(x^2+17x+60\right)\left(x^2+16x+60\right)=3x^2$ (*)

Ta thấy $x=0$ không phải là nghiệm của phương trình.

Xét $x \neq 0$, chia hai vế cho x^2 ta có

$(*) \Leftrightarrow 4\left(x+17+\frac{60}{x}\right)\left(x+16+\frac{60}{x}\right)=3$

Đặt $y = x+16+\frac{60}{x}$ phương trình trở thành

$$4(y+1)y = 3 \Leftrightarrow 4y^2+4y-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{3}{2} \end{array}\right.$$

Với $y=\frac{1}{2}$ ta có $x+16+\frac{60}{x}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2+31x+120=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-8 \\ x=-\frac{15}{2} \end{array}\right.$

Với $y=-\frac{3}{2}$ ta có $x+16+\frac{60}{x}=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2x^2+35x+120=0 \Leftrightarrow x=\frac{-35\pm\sqrt{265}}{4}$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=-8$, $x=-\frac{15}{2}$ và $x=\frac{-35\pm\sqrt{265}}{4}$.

Chú ý:

- Phương trình có dạng $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=e$ trong đó $a+b=c+d$

  Cách giải: Đặt $t=x^2+(a+b)x$ ta quy về phương trình bậc hai

  $$(t+ab)(t+cd)=e$$

- Phương trình có dạng $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=mx^2$ trong đó $ab=cd$

  Cách giải: Kiểm tra xem $x=0$ có là nghiệm của phương trình hay không?

  Xét $x \neq 0$ chia hai vế cho x^2 ta được $\left(x+a+b+\frac{ab}{x}\right)\left(x+c+d+\frac{cd}{x}\right)=m$

  Đặt $t=x+\frac{ab}{x}$ ta quy về phương trình bậc hai $(t+a+b)(t+c+d)=m$

Ví dụ 3: Giải các phương trình sau

a) $(x+1)^4+(x+3)^4=2$ b) $3(x^2-x+1)^2-2(x+1)^2=5(x^3+1)$

Lời giải

a) Đặt $x=t-2$ phương trình trở thành

$$(t-1)^4+(t+1)^4=2 \Leftrightarrow t^4+6t^2=0 \Leftrightarrow t^2\left(t^2+6\right)=0 \Leftrightarrow t=0$$

Suy ra $x=-2$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=-2$.

b) Vì $x=-1$ không là nghiệm của phương trình nên chia hai vế cho x^3+1 ta được:

$$3\frac{x^2-x+1}{x+1}-2\frac{x+1}{x^2-x+1}=5.$$

Đặt $t=\frac{x^2-x+1}{x+1}$, phương trình trở thành

$$3t-\frac{2}{t}=5 \Leftrightarrow 3t^2-5t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

* $t=2 \Rightarrow \frac{x^2-x+1}{x+1}=2 \Leftrightarrow x^2-3x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

* $t=-\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x^2-x+1}{x+1}=-\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x^2-2x+4=0$ phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm là $x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

Chú ý: Phương trình ở câu a) có dạng $(x+a)^4+(x+b)^4=c$.

Cách giải: Đặt $x=t-\frac{a+b}{2}$ ta đưa về phương trình trùng phương

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow c \geq 2\left(\frac{a-b}{2}\right)^4$

Ví dụ 4: Cho phương trình $(m+1)x^4-4x^2+1=0$ (*). Tìm m để

a) Phương trình (*) có nghiệm

b) Phương trình (*) có bốn nghiệm phân biệt

Lời giải

Đặt $t=x^2$, $t \geq 0$, phương trình trở thành: $(m+1)t^2-4t+1=0$ (**)

a) Với $m=-1$ phương trình (*) trở thành $-4x^2+1=0 \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{2}$ suy ra $m=-1$ thì phương trình (*) có nghiệm.

Với $m \neq -1$ phương trình (**) là phương trình bậc hai.

Phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (**) có nghiệm không âm

- TH1: Phương trình (**) có hai nghiệm không âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ S \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-(m+1) \geq 0 \\ \frac{4}{m+1} \geq 0 \\ \frac{1}{m+1} \geq 0 \end{cases} \begin{cases} m \leq 3 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq 3$$

- TH2: Phương trình (**) có hai nghiệm trái dấu

$\Leftrightarrow P<0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{m+1}<0 \Leftrightarrow m<-1$

- TH3: Phương trình (**) có một nghiệm bằng không và một nghiệm âm(không xảy ra vì $x=0$ không là nghiệm của phương trình (**) với mọi m)

Vậy phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi $m \le 3$.

b) Với $m=-1$ phương trình (*) trở thành $-4x^2+1=0 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{2}$ suy ra $m=-1$ không thỏa mãn

Với $m \ne -1$ phương trình (**) là phương trình bậc hai.

Phương trình (*) bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (**) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ S>0 \\ P>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-(m+1)>0 \\ \dfrac{4}{m+1}>0 \\ \dfrac{1}{m+1}>0 \end{cases} \begin{cases} m<3 \\ m>-1 \end{cases} \Leftrightarrow -1<m<3$$

Vậy phương trình (*) có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $-1<m<3$.

Ví dụ 5: Cho phương trình $x^4+4x^3-3x^2-14x+m=0$

a) Giải phương trình khi $m=6$

b) Tìm m để phương trình có nghiệm

Lời giải

Phương trình tương đương

$$\left(x^4+4x^3+4x^2\right)-\left(7x^2+14x\right)+m=0 \Leftrightarrow \left(x^2+2x\right)^2-7\left(x^2+2x\right)+m=0$$

Đặt $t=x^2+2x$, $x^2+2x=(x+1)^2-1 \ge -1$ suy ra $t \ge -1$

Phương trình trở thành $t^2-7t+m=0$ (*)

a) Khi $m=6$ ta có $t^2-7t+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=6 \end{array}\right.$

Với $t=1$ thì $x^2+2x=1 \Leftrightarrow x^2+2x-1=0 \Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{2}$

Với $t=6$ thì $x^2+2x=6 \Leftrightarrow x^2+2x-6=0 \Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{7}$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=-1\pm\sqrt{2}$ và $x=-1\pm\sqrt{7}$.

b) Phương trình ban đầu có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm $t \ge -1$

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $y=t^2-7t+m$ trên $[-1;+\infty)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt

Xét hàm số $y=t^2-7t+m$ trên $[-1;+\infty)$

Ta có bảng biến thiên

x	−1		7		+∞
y	8 + m	↘	m	↗	+∞

Suy ra để phương trình có nghiệm là $m \le 0$.

Chú ý: Phương trình trên là phương trình có thể đưa về dạng $A\left(x^2+ax\right)^2+B\left(x^2+ax\right)+C=0$ và cách giải là đặt $t=x^2+ax$ và đưa về phương trình bậc hai $At^2+Bt+C=0$.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 3.37: Giải các phương trình sau

a) $2x^4+3x^3-16x^2+3x+2=0$

b) $x^6+3x^5-6x^4-21x^3-6x^2+3x+1=0$

b) $(x+3)^4+(x-5)^4=1312$

c) $(2x-1)(4x+5)(8x+3)(16x-15)=99x^2$

Hướng dẫn giải

a) Ta thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình

Với $x \ne 0$ ta có

$$PT \Leftrightarrow 2x^2+3x-16+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}=0 \Leftrightarrow 2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-16=0$$

Đặt $y=x+\dfrac{1}{x}$ thì $y^2-2=x^2+\dfrac{1}{x^2}$

Phương trình trở thành: $2\left(y^2-2\right)+3y-16=0 \Leftrightarrow 2y^2+3y-20=0$

Phương trình này có nghiệm là $y_1=-4, y_2=\dfrac{5}{2}$

Vì vậy $x+\dfrac{1}{x}=-4$ và $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}$ tức là $x^2+4x+1=0$ và $2x^2-5x+2=0$

Từ đó ta tìm được các nghiệm là: $x=-2\pm\sqrt{3}, x=\dfrac{1}{2}, x=2$.

b) Đặt $x=t+1$, ta có: $(t+4)^4+(t-4)^4=1312$

$\Leftrightarrow t^4+96t^2-400=0 \Leftrightarrow t^2=4 \Leftrightarrow t=\pm 2$

Suy ra $x=3, x=-1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

c) Ta thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình nên

Phương trình $\Leftrightarrow \left(32x^2+52x+15\right)\left(32x^2-46x+15\right)-99x^2=0$

$\Leftrightarrow \left(32x+52+\dfrac{15}{x}\right)\left(32x-46+\dfrac{15}{x}\right)-99=0$. Đặt $t=32x+\dfrac{15}{x}$.

Ta có: $(t+52)(t-46)-99=0 \Leftrightarrow t^2+6t-2491=0 \Leftrightarrow t=47, t=-53$

- $t = 47 \Leftrightarrow 32x^2 - 47x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = \frac{15}{32}$
- $t = -53 \Leftrightarrow 32x^2 - 53x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{53 \pm \sqrt{889}}{64}$.

Vậy tập nghiệm phương trình đã cho là: $\left\{1, \frac{15}{32}, \frac{53 \pm \sqrt{889}}{64}\right\}$.

Bài 3.38: Tìm m để phương trình: $(x^2 - 1)(x + 3)(x + 5) = m$ có nghiệm.

Hướng dẫn giải

Phương trình $\Leftrightarrow (x - 1)(x + 5)(x + 1)(x + 3) = m$

$\Leftrightarrow (x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x + 3) = m$

Đặt $t = x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4 \geq -4$, ta có phương trình :

$\Leftrightarrow (t - 5)(t + 3) = m \Leftrightarrow t^2 - 2t - 15 = m$ (2).

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t \geq -4$.

Với $t \geq -4 \Rightarrow t^2 - 2t - 15 = (t - 1)^2 - 16 \geq -16$

$\Rightarrow$ (2) có nghiệm $t \geq -4 \Leftrightarrow m \geq -16$.

Bài 3.39: Tìm m để phương trình: $x^4 - 4x^3 + 8x = m$ có bốn nghiệm phân biệt.

Hướng dẫn giải

Phương trình $\Leftrightarrow (x^2 - 2x)^2 - 4(x^2 - 2x) = m$

Đặt $t = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1 \geq -1$. Phương trình trở thành: $t^2 - 4t = m$ (*).

Phương trình có bốn nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $t > -1$.

Xét hàm số: $f(t) = t^2 - 4t$ với $t \geq -1$, ta có bảng biến thiên:

t	-1		2		$+\infty$
$f(t) = t^2 - 4t$	3	↘	0	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow 0 < m < 5$.

§4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn.

a) **Định nghĩa:** Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn là hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} (a_1^2 + b_1^2 \neq 0, a_2^2 + b_2^2 \neq 0)$$

b) **Giải và biện luận hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn:**

Tính các định thức: $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

Xét định thức		Kết quả
$D \neq 0$		*Hệ có nghiệm duy nhất* $\left(x = \frac{D_x}{D}; y = \frac{D_y}{D}\right)$
$D = 0$	$D_x \neq 0$ *hoặc* $D_y \neq 0$	*Hệ vô nghiệm*
	$D_x = D_y = 0$	*Hệ có vô số nghiệm*

Chú ý: Để giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn ta có thể dùng các cách giải đã biết như: phương pháp thế, phương pháp cộng đại số.

2. Hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn

Nguyên tắc chung để giải các hệ phương trình nhiều ẩn là **khử bớt ẩn** để đưa về các phương trình hay hệ phương trình có số ẩn ít hơn. Để khử bớt ẩn, ta cũng có thể dùng các phương pháp cộng đại số, phương pháp thế như đối với hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: *GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN, BA ẨN*

1. Phương pháp giải.

- Sử dụng phương pháp cộng đại số, phương pháp thế, dùng định thức.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} 5x - 4y = 3 \\ 7x - 9y = 8 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 11 \\ 5x - 4y = 8 \end{cases}$

Lời giải

a) Ta có $D = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 7 & -9 \end{vmatrix} = -17$, $D_x = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 8 & -9 \end{vmatrix} = 5$, $D_y = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 19$

Suy ra hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=\left(\frac{D_x}{D};\frac{D_y}{D}\right)=\left(-\frac{5}{17};-\frac{19}{17}\right)$

b) Ta có $D=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 5 & -4\end{vmatrix}=-13$, $D_x=\begin{vmatrix}11 & 1\\ 8 & -4\end{vmatrix}=-52$, $D_y=\begin{vmatrix}2 & 11\\ 5 & 8\end{vmatrix}=-39$

Suy ra hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=\left(\frac{D_x}{D};\frac{D_y}{D}\right)=(4;3)$

Ví dụ 2: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases}(x+3)y-5)=xy\\(x-2)(y+5)=xy\end{cases}$ b) $\begin{cases}|x-y|=\sqrt{2}\\2x-y=-1\end{cases}$ c) $\begin{cases}\frac{3(x+y)}{x-y}=-7\\\frac{5x-y}{y-x}=\frac{5}{3}\end{cases}$

Lời giải

a) Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases}xy-5x+3y-15=xy\\xy+5x-2y-10=xy\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-5x+3y=15\\5x-2y=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=25\\5x-2y=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=12\\y=25\end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=(12;25)$

b) Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases}x-y=\pm\sqrt{2}\\2x-y=-1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x-y=\sqrt{2}\\2x-y=-1\end{cases}$ (1) hoặc $\begin{cases}x-y=-\sqrt{2}\\2x-y=-1\end{cases}$ (2)

Ta có (1) $\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1-\sqrt{2}\\2x-y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1-\sqrt{2}\\y=-1-2\sqrt{2}\end{cases}$

(2) $\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1+\sqrt{2}\\2x-y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1-\sqrt{2}\\y=-1+2\sqrt{2}\end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là

$\left(-1-\sqrt{2};-1-2\sqrt{2}\right)$ và $\left(-1-\sqrt{2};-1+2\sqrt{2}\right)$

c) ĐKXĐ: $x\neq y$

Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases}3(x+y)=-7(x-y)\\3(5x-y)=5(y-x)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}10x-4y=0\\20x-8y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$ (không thỏa mãn)

Vậy hệ phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 3: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases}\frac{6}{x}+\frac{5}{y}=3\\\frac{9}{x}-\frac{10}{y}=1\end{cases}$ b) $\begin{cases}\frac{6}{x-2y}+\frac{2}{x+2y}=3\\\frac{3}{x-2y}+\frac{4}{x+2y}=-1\end{cases}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $\begin{cases}x\neq 0\\y\neq 0\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}u=\frac{1}{x}\\v=\frac{1}{y}\end{cases}$. Hệ đã cho trở thành $\begin{cases}6u+5v=3\\9u-10v=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\frac{1}{3}\\v=\frac{1}{5}\end{cases}$

Ta được hệ phương trình: $\begin{cases}\frac{1}{x}=\frac{1}{3}\\\frac{1}{y}=\frac{1}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=5\end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=(3;5)$.

b) ĐKXĐ: $\begin{cases}x-2y\neq 0\\x+2y\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\y\neq 0\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}u=\frac{1}{x-2y}\\v=\frac{1}{x+2y}\end{cases}$. Hệ đã cho trở thành $\begin{cases}6u+2v=3\\3u+4v=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\frac{7}{9}\\v=-\frac{5}{6}\end{cases}$

Ta được hệ phương trình:

$\begin{cases}\frac{7}{9}=\frac{1}{x-2y}\\-\frac{5}{6}=\frac{1}{x+2y}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y=\frac{9}{7}\\x+2y=-\frac{6}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{3}{70}\\y=-\frac{87}{140}\end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=\left(\frac{3}{70};-\frac{87}{140}\right)$.

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình $\begin{cases}3x+y-3z=1 & (1)\\x-y+2z=2 & (2)\\-x+2y+2z=3 & (3)\end{cases}$

Lời giải

Cách 1: (Phương pháp cộng đại số): Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases}7y+3z=10\\y+4z=5\\-x+2y+z=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}25z=25\\y+4z=5\\-x+2y+z=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\\z=1\end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y;z)=(1;1;1)$.

Cách 2: (Phương pháp thế): Ta có $(2)\Leftrightarrow x=y-2z+2$ thế vào (1) ta được

$3(y-2z+2)+y-3z=1\Leftrightarrow 4y-9z=-5$ (*)

$(3)\Leftrightarrow x=2y+2z-3$ thế vào (1) ta được

$3(2y+2z-3)+y-3z=1\Leftrightarrow 3z=10-7y$ thế vào (*) ta được

$4y-3(10-7y)=-5\Leftrightarrow y=1\Rightarrow x=z=1$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y;z)=(1;1;1)$.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 3.40: Giải các hệ phương trình sau: $\begin{cases}x+2y-3z=2\\x-3y+z=5\\x-5y=1\end{cases}$

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases}x+2y-3z=2\\x-3y+z=5\\x-5y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+5y\\1+5y+2y-3z=2\\1+5y-3y+z=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+5y\\7y-3z=1\\2y+z=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\y=1\\z=2\end{cases}$$

Bài 3.41: Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases}x+5y=7\\3x-2y=4\end{cases}$

b) $\begin{cases}\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}=\dfrac{5}{8}\\\dfrac{1}{x-y}-\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{3}{8}\end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) $\begin{cases}x+5y=7\\3x-2y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+15y=21\\3x-2y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}17y=17\\3x-2y=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1\\x=2\end{cases}$

b) ĐKXĐ: $x\neq\pm y$, đặt $\dfrac{1}{x+y}=u;\ \dfrac{1}{x-y}=v$

Khi đó, có hệ mới $\begin{cases}u+v=\dfrac{5}{8}\\-u+v=\dfrac{3}{8}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2v=1\\u+v=\dfrac{5}{8}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=\dfrac{1}{2}\\u=\dfrac{1}{8}\end{cases}$

Thay trở lại, ta được: $\begin{cases}x+y=8\\x-y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=3\end{cases}$

DẠNG TOÁN 2: GIẢI VÀ BIỆN LUẬN HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN.

Phương pháp giải.

Sử dụng định thức: Tính D, D_x, D_y

- Nếu $D\neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{D_x}{D};\dfrac{D_y}{D}\right)$
- Nếu $D=0$ thì ta xét D_x, D_y

  Với $\left[\begin{array}{l}D_x\neq 0\\D_y\neq 0\end{array}\right.$ khi đó phương trình vô nghiệm

  Với $D_x=D_y=0$ thì hệ phương trình có vô số nghiệm tập nghiệm của hệ phương trình là tập nghiệm của một trong hai phương trình có trong hệ.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Giải và biện luận hệ phương trình: $\begin{cases}mx-y=2m\\4x-my=m+6\end{cases}$

Lời giải

Ta có $D=\begin{vmatrix}m&-1\\4&-m\end{vmatrix}=4-m^2=(2-m)(2+m)$

$$D_x=\begin{vmatrix}2m&-1\\m+6&-m\end{vmatrix}=-2m^2+m+6=(2-m)(2m+3)$$

$$D_y=\begin{vmatrix}m&2m\\4&m+6\end{vmatrix}=m^2-2m=m(m-2)$$

- Với $D\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 2\\m\neq -2\end{cases}$: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$(x;y)=\left(\frac{D_x}{D};\frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{2m+3}{2+m};-\frac{m}{2m+1}\right)$$

- Với $D=0\Leftrightarrow m=\pm 2$:
  - Khi $m=2$ ta có $D=D_x=D_y=0$ nên hệ phương trình có nghiệm là nghiệm của phương trình $2x-y=4\Leftrightarrow y=2x-4$. Do đó hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=(t;2t-4),\ t\in R$.
  - Khi $m=-2$ ta có $D=0, D_x\neq 0$ nên hệ phương trình vô nghiệm

Kết luận

$m\neq 2$ và $m\neq -2$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$(x;y)=\left(\dfrac{2m+3}{2+m};-\dfrac{m}{2m+1}\right)$

$m=2$ hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=(t;2t-4),\ t\in R$.

$m=-2$ hệ phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 2: Giải và biện luận hệ phương trình sau: $\begin{cases}a(x-1)+by=1\\b(x-1)+ay=1\end{cases}$

Lời giải

Hệ tương đương: $\begin{cases}ax-a+by=1\\bx-b+ay=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ax+by=a+1\\bx+ay=b+1\end{cases}$

Ta có: $D=\begin{vmatrix}a&b\\b&a\end{vmatrix}=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$D_x=\begin{vmatrix}a+1&b\\b+1&a\end{vmatrix}=(a-b)(a+b+1),\ D_y=\begin{vmatrix}a&a+1\\b&b+1\end{vmatrix}=a-b$

- TH1: Với $D\neq0\Leftrightarrow a^2-b^2\neq0\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq b\\a\neq-b\end{cases}$

Hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ là $x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{(a-b)(a+b+1)}{(a-b)(a+b)};\ y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{1}{a+b}$

- TH2: Với $D=0\Leftrightarrow a^2-b^2=0\Leftrightarrow a=\pm b$:

+ Khi $a=b$ ta có $D=0;D_x=0;D_y=0$ hệ phương trình có nghiệm là nghiệm của phương trình $a(x-1)+ay=1$ hay $ax+ay=a+1$ (*)

Nếu $a=0$ thì phương trình (*) vô nghiệm, do đó nếu $a\neq0$ thì (*)

$\Leftrightarrow y=\dfrac{-ax+a+1}{a}$

Vì vậy hệ phương trình có nghiệm dạng $(x;y)=\left(t;\dfrac{-at+a+1}{a}\right)$

+ Khi $a=-b$ ta có $D=0;D_y=-2b$

Nếu $b\neq0\Rightarrow D=0;D_y\neq0$ suy ra hệ phương trình vô nghiệm

Nếu $a=b=0$: Hệ phương trình trở thành $\begin{cases}0.x+0.y=1\\0.x+0.y=1\end{cases}\Rightarrow$ hệ vô nghiệm.

Kết luận

$a\neq b$ và $a\neq-b$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\dfrac{a+b+1}{a+b};\dfrac{1}{a+b}\right)$

$a=b\neq0$ hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=\left(t;\dfrac{-at+a+1}{a}\right)$

$a=-b$ hệ phương trình vô nghiệm

Ví dụ 3: Tìm m để hệ vô nghiệm $\begin{cases}2m^2x+3(m-1)y=3\\m(x+y)-y=2\end{cases}$

Lời giải

Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases}2m^2x+3(m-1)y=3\\mx+(m-2)y=2\end{cases}$

Ta có $D=\begin{vmatrix}2m^2&3(m-1)\\m&m-2\end{vmatrix}=2m^3-7m^2+3m$

$D_x=\begin{vmatrix}3&3(m-1)\\2&m-2\end{vmatrix}=-3m$; $D_y=\begin{vmatrix}2m^2&3\\m&2\end{vmatrix}=4m^2-3m$

Hệ đã cho vô nghiệm xảy ra trong hai trường hợp sau

TH1: $\begin{cases}D=0\\D_x\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2m^3-7m^2+3m=0\\-3m\neq0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m(2m^2-7m+3)=0\\m\neq0\end{cases}\Leftrightarrow2m^2-7m+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\m=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

TH2: $\begin{cases}D=0\\D_y\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2m^3-7m^2+3m=0\\4m^2-3m\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=3\\m=0\\m=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\m\neq0\\m\neq\dfrac{3}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\m=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Vậy hệ vô nghiệm khi $m=3$ và $m=\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 4: Tìm các giá trị của b sao cho với mọi a thì hệ phương trình $\begin{cases}x+2ay=b\\ax+(1-a)y=b^2\end{cases}$ có nghiệm.

Lời giải

Ta có: $D=\begin{vmatrix}1&2a\\a&1-a\end{vmatrix}=1-a-2a^2\Rightarrow D\neq0\Leftrightarrow2a^2+a-1\neq0\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq-1\\a\neq\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Suy ra $\begin{cases}a\neq-1\\a\neq\dfrac{1}{2}\end{cases}$ thì hệ phương trình có nghiệm

Khi $a=-1$, hệ trở thành: $\begin{cases}x-2y=b\\x-2y=-b^2\end{cases}$,

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow b=-b^2 \Leftrightarrow b+b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=-1 \end{array}\right.$

Khi $a=\frac{1}{2}$, hệ trở thành $\begin{cases} x+y=b \\ x+y=2b^2 \end{cases}$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow b=2b^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Vậy hệ có nghiệm với mọi $a \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=-1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow b=0$

📖 2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 3.42: Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} mx+2y=2m \\ x+y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (m+1)x-2y=m-1 \\ m^2x-y=m^2+2m \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Từ hệ phương trình ta có:

$$D=\begin{vmatrix} m & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=m.1-1.2=m-2$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 2m & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=2m.1-3.2=2m-6$$

$$D_y=\begin{vmatrix} m & 2m \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=m.3-1.2m=3m-2m=m$$

- Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow m-2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$

  Suy ra hệ phương trình có một nghiệm duy nhất:

  $x=\frac{D_x}{D}=\frac{2m-6}{m-2}; y=\frac{D_y}{D}=\frac{m}{m-2}$

- Nếu $D=0 \Leftrightarrow m=2 \Rightarrow D_x=-4 \neq 0 \Rightarrow$ hệ phương trình vô nghiệm

b) Ta có $D=\begin{vmatrix} m+1 & -2 \\ m^2 & -1 \end{vmatrix}=2m^2-m-1=(m-1)(2m+1)$

$$D_x=\begin{vmatrix} m-1 & -2 \\ m^2+2m & -1 \end{vmatrix}=2m^2+3m+1=(m+1)(2m+1)$$

$$D_y=\begin{vmatrix} m+1 & m-1 \\ m^2 & m^2+2m \end{vmatrix}=(m+1)(m^2+2m)-m^2(m-1)=2m(2m+1)$$

- Với $D \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$(x;y)=\left(\frac{D_x}{D};\frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{m+1}{m-1};\frac{2m}{m-1}\right)$$

- Với $D=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$:

+ Khi $m=-\frac{1}{2}$ ta có $D=D_x=D_y=0$ nên hệ phương trình có nghiệm là nghiệm của phương trình $\frac{1}{2}x-2y=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=4y-1$. Do đó hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=(4t-1;t), t \in R$.

+ Khi $m=1$ ta có $D=0, D_x \neq 0$ nên hệ phương trình vô nghiệm

Kết luận: $m \neq 1$ và $m \neq -\frac{1}{2}$ hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$(x;y)=\left(\frac{m+1}{m-1};\frac{2m}{m-1}\right)$$

$m=-\frac{1}{2}$ hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=(4t-1;t), t \in R$.

$m=1$ hệ phương trình vô nghiệm.

Bài 3.3 Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases} -4x+my=m+1 \\ (m+6)x+2y=m+3 \end{cases}$ có vô số nghiệm:

Hướng dẫn giải

Ta có: $D=-8-m(m+6)=-m^2-6m-8$

$D_x=2(m+1)-m(m+3)=-m^2-m+2$

$D_y=-4(m+3)-(m+1)(m+6)=-m^2-11m-18$

Hệ có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} D=0 \\ D_x=0 \\ D_y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2-6m-8=0 \\ -m^2-m+2=0 \\ -m^2-11m-18=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=-2$

Vậy hệ có vô số nghiệm khi $m=-2$.

Bài 3.44: Tùy theo giá trị của m, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P(x;y)=(mx+2y-2m)^2+(x+y-3)^2$$

Hướng dẫn giải

Ta có $P(x;y) \geq 0$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} mx + 2y - 2m = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$ (*)

$$D = \begin{vmatrix} m & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m - 2$$

Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$ thì hệ phương trình (*) có nghiệm do đó $\min P(x;y) = 0$

Nếu $D = 0 \Leftrightarrow m = 2$ ta có

$$P(x;y) = (2x + 2y - 4)^2 + (x + y - 3)^2 = 5(x + y)^2 - 22(x + y) + 25$$

$$\Rightarrow P(x;y) = 5\left(x + y - \frac{11}{5}\right)^2 + \frac{4}{5} \geq \frac{4}{5}$$

Suy ra $\min P(x;y) = \frac{4}{5} \Leftrightarrow x + y - \frac{11}{5} = 0$

Vậy $m \neq 2$ thì $\min P(x;y) = 0$, $m = 2$ thì $\min P(x;y) = \frac{4}{5}$.

Bài 3.45: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} (2m+1)x - 3y = 3m - 2 \\ (m+3)x - (m+1)y = 2m \end{cases}$

a) Tìm m để hệ có nghiệm.

b) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất (x;y) thỏa mãn $x \geq 2y$.

c) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất (x;y) sao cho $P = x^2 + 3y^2$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Ta có: $D = -2(m-2)(m+2)$; $D_x = (m-2)(1-3m)$; $D_y = (m-2)(m+3)$

a) Ta có hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} D = 0 \\ D_x^2 + D_y^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$.

Vậy hệ có nghiệm $\Leftrightarrow m \neq -2$.

b) Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m \neq \pm 2$ và $\begin{cases} x = \dfrac{3m-1}{2(m+2)} \\ y = -\dfrac{m+3}{2(m+2)} \end{cases}$.

$$\Rightarrow x \geq 2y \Leftrightarrow \frac{3m-1}{2(m+2)} \geq -\frac{2(m+3)}{2(m+2)} \Leftrightarrow \frac{5m+5}{m+2} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m \neq 2 \\ m < -2 \end{cases}.$$

c) Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m \neq \pm 2$

$$P = x^2 + 3y^2 = \frac{3m^2 + 3m + 7}{m^2 + 4m + 4} \Leftrightarrow (3-P)m^2 + (3-4P)m + 7 - 4P = 0 \quad (1)$$

* $P = 3$ thì (1) có nghiệm $m = -\frac{5}{9}$.

* $P \neq 3 \Rightarrow$ (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = 52P - 75 \geq 0 \Leftrightarrow P \geq \frac{75}{52}$.

Đẳng thức xảy ra khi $m = \frac{8}{9}$.

Vậy P nhỏ nhất $\Leftrightarrow m = \frac{8}{9}$ và $\text{Min}P = \frac{75}{52}$.

Bài 3.46: Giải và biện luận hệ: $\begin{cases} m\sqrt{x+1} + \sqrt{y} = m + 1 \\ \sqrt{x+1} + m\sqrt{y} = 2 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Đặt: $\begin{cases} \sqrt{x+1} = u \\ \sqrt{y} = v \end{cases}$ $(u, v > 0)$

Khi đó hệ có dạng: $\begin{cases} mu + v = m + 1 \\ ux + mv = 2 \end{cases}$

Ta có: $D = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix} = m^2 - 1$

$$D_u = \begin{pmatrix} m+1 & 1 \\ 2 & m \end{pmatrix} = m^2 + m - 2;\ D_v = \begin{pmatrix} m & am+1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = m - 1$$

- Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$

Hệ có nghiệm duy nhất $u = \frac{m+2}{m+1}$ và $v = \frac{1}{m+1}$

Vì điều kiện $u, v > 0$ nên ta có : $\begin{cases} \dfrac{m+2}{m+1} \geq 0 \\ \dfrac{1}{m+1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1$

Khi đó ta được: $\begin{cases} \sqrt{x+1} = \dfrac{m+2}{m+1} \\ \sqrt{y} = \dfrac{1}{m+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2m+3}{(m+1)^2} \\ y = \dfrac{1}{(m+1)^2} \end{cases}$

- Nếu $D = 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$

Với $m = 1 \Rightarrow D_u = D_v = 0$, hệ có vô số nghiệm thoả $\sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 2$

Với $m = -1 \Rightarrow D_u = 2 \neq 0$, hệ vô nghiệm.

§5. MỘT SỐ VÍ DỤ VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI HAI ẨN

DẠNG TOÁN 1: ***HỆ GỒM MỘT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VÀ MỘT BẬC HAI .***

Phương pháp giải.

Sử dụng phương pháp thế

- Từ phương trình bậc nhất rút một ẩn theo ẩn kia.
- Thế vào phương trình bậc hai để đưa về phương trình bậc hai một ẩn.
- Số nghiệm của hệ tuỳ theo số nghiệm của phương trình bậc hai này.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} y+x^2=4x \\ 2x+y-5=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-4y+1=0 \\ xy=3(x+y)-9 \end{cases}$

Lời giải

a) Hệ phương trình tương đương $\begin{cases} 5-2x+x^2=4x \\ y=5-2x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x+5=0 \\ y=5-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right. \\ y=5-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=5 \\ y=-5 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là $(1;3)$ và $(5;-5)$.

b) Hệ phương trình tương đương $\begin{cases} x=\dfrac{4y-1}{3} \\ \dfrac{4y-1}{3}y=3\left(\dfrac{4y-1}{3}+y\right)-9 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4y-1}{3} \\ 4y^2-22y+30=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4y-1}{3} \\ \left[\begin{array}{l} y=3 \\ y=\dfrac{5}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{11}{3} \\ y=3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=3 \\ y=\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là $\left(\dfrac{11}{3};3\right)$ và $\left(3;\dfrac{5}{2}\right)$.

Nhận xét: Từ cách giải của hệ phương trình trên ta thấy rằng nếu một hệ phương trình hai ẩn mà có một phương trình bậc nhất hai ẩn(hoặc có thể biểu diễn ẩn này qua ẩn kia) thì ta dùng phương pháp thế.

Ta xét ví dụ sau:

Ví dụ 2: Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} x^3=xy+2 \\ 2x-y=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x(x+y+1)-3=0 \\ (x+y)^2-\dfrac{5}{x^2}+1=0 \end{cases}$

Lời giải

a) Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} x^3=x(2x-3)+2 \\ y=2x-3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)\left(x^2-x+2\right)=0 \\ y=2x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là $(1;-1)$.

b) ĐKXĐ: $x\neq 0$

Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} x+y=\dfrac{3}{x}-1 \\ \left(\dfrac{3}{x}-1\right)^2-\dfrac{5}{x^2}+1=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\dfrac{3}{x}-1 \\ \dfrac{9}{x^2}-\dfrac{6}{x}+1-\dfrac{5}{x^2}+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{3}{x}-x-1 \\ x^2-3x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{3}{x}-x-1 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x=2 \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là $(1;1)$ và $\left(2;-\dfrac{3}{2}\right)$.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 3.48: Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 4x^2+y^2=17 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^3y=16 \\ 3x+y=8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^3-8x=y^3+2y \\ x^2-3=3(y^2+1) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $y=5-2x$ thế vào phương trình hai ta được:

$$4x^2+(5-2x)^2=17 \Leftrightarrow 2x^2-5x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\Rightarrow y=1 \\ x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow y=4 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y)=(2;1),(\frac{1}{2};4)$.

b) Ta có $y=8-3x$ thay vào phương trình đầu ta được:

$x^3(8-3x)=16 \Leftrightarrow 3x^4-8x^3+16=0 \Leftrightarrow (x-2)^2(3x^2+4x+4)=0$

$\Leftrightarrow x=2$. Vậy hệ có nghiệm là $x=y=2$.

c) Từ phương trình (2) $\Rightarrow x^2=3(y^2+2)$ (3) thay vào phương trình (1) ta được:

$$x^3-8x=y(y^2+2)=y\frac{x^2}{3} \Leftrightarrow x(3x^2-xy-24)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0 \\ y=\dfrac{3x^2-24}{x} \end{bmatrix}$$

* Với $x=0$ thay vào (3) ta có: $y^2+2=0$ vô nghiệm.

* Với $y=\dfrac{3x^2-24}{x}$ thay vào (3) ta được: $x^2=3\left(\dfrac{3x^2-24}{x}\right)^2+6$

$$\Leftrightarrow 13x^4-213x^2+864=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x^2=9 \\ x^2=\dfrac{96}{13} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=\pm 3 \Rightarrow y=\pm 1 \\ x=\pm\sqrt{\dfrac{96}{13}} \Rightarrow y=\mp\dfrac{\sqrt{78}}{13} \end{bmatrix}.$$

Vậy hệ có bốn nghiệm: $(x;y)=(\pm 3;\pm 1),\ \left(\pm\sqrt{\dfrac{96}{14}};\mp\dfrac{\sqrt{78}}{13}\right)$.

Bài 3.49: Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=m \\ 2x^2-3y^2=1 \end{cases}$ có nghiệm.

Hướng dẫn giải

Ta có $x=m-y$ thay vào phương trình hai ta được: $2(m-y)^2-3y^2=1$

$\Leftrightarrow y^2+4my+1-2m^2=0$ (*). Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta'=4m^2-(1-2m^2)\geq 0 \Leftrightarrow |m|\geq\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Vậy $|m|\geq\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ là những giái trị cần tìm.

DẠNG TOÁN 2: *HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG.*

Phương pháp giải.

a) Hệ đối xứng loại 1

Hệ phương trình đối xứng loại 1 là hệ phương trình có dạng:

(I) $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$ với $f(x;y)=f(y;x)$ và $g(x;y)=g(y;x)$.

(Có nghĩa là khi ta hoán vị giữa x và y thì $f(x, y)$ và $g(x, y)$ không thay đổi).

Cách giải

- Đặt $S=x+y$, $P=xy$.
- Đưa hệ phương trình (I) về hệ (I') với các ẩn là S và P.
- Giải hệ (I') ta tìm được S và P.
- Tìm nghiệm $(x;y)$ bằng cách giải phương trình: $X^2-SX+P=0$.

b) Hệ đối xứng loại 2

Hệ phương trình đối xứng loại 2 là hệ phương trình có dạng:

(II) $\begin{cases} f(x,y)=0 & (1) \\ f(y,x)=0 & (2) \end{cases}$

(Có nghĩa là khi hoán vị giữa x và y thì (1) biến thành (2) và ngược lại).

- Trừ (1) và (2) vế theo vế ta được: (II) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x,y)-f(y,x)=0 & (3) \\ f(x,y)=0 \end{cases}$
- Biến đổi (3) về phương trình tích: (3) $\Leftrightarrow (x-y).g(x,y)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=y \\ g(x,y)=0 \end{bmatrix}$.
- Như vậy (II) $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{cases} f(x,y)=0 \\ x=y \end{cases} \\ \begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases} \end{bmatrix}$.
- Giải các hệ phương trình trên ta tìm được nghiệm của hệ (II).

c) Chú ý: Hệ phương trình đối xứng loại 1, 2 nếu có nghiệm là $(x_0;y_0)$ thì $(y_0;x_0)$ cũng là một nghiệm của nó.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} x+xy+y=2+3\sqrt{2} \\ x^2+y^2=6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2y+xy^2=30 \\ x^3+y^3=35 \end{cases}$.

Lời giải

a) Đặt $S=x+y$; $P=xy$, ta có hệ:

$$\begin{cases} S+P=2+3\sqrt{2} \\ S^2-2P=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2+2S=10+6\sqrt{2} \\ S+P=2+3\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (S+1)^2=(3+\sqrt{2})^2 \\ P=2+3\sqrt{2}-S \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} S=2+\sqrt{2} \\ S=-4-\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ P=2+3\sqrt{2}-S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=2+\sqrt{2} \\ P=2\sqrt{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} S=-4-\sqrt{2} \\ P=6+4\sqrt{2} \end{cases}$$

Với $S=2+\sqrt{2}$; $P=2\sqrt{2}$ ta có x, y là nghiệm phương trình:

$X^2-(2+\sqrt{2})X+2\sqrt{2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}X=2\\X=\sqrt{2}\end{array}\right.$

- Với $S=-4-\sqrt{2}\,;P=6+4\sqrt{2}$ ta có x, y là nghiệm phương trình:
  $X^2+(4+\sqrt{2})X+6+4\sqrt{2}=0$ (vô nghiệm).
  Vậy hệ có nghiệm $(x;y)$ là $(2;\sqrt{2})$ và $(\sqrt{2};2)$.

b) Đặt $S=x+y$, $P=xy$, điều kiện $S^2\geq 4P$. Hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases}SP=30\\S(S^2-3P)=35\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P=\dfrac{30}{S}\\S\left(S^2-\dfrac{90}{S}\right)=35\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}S=5\\P=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=5\\xy=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}\vee\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}.$$

Ví dụ 2: Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases}x^3+2x=y\\y^3+2y=x\end{cases}$ b) $\begin{cases}y^2=x^3-3x^2+2x\\x^2=y^3-3y^2+2y\end{cases}$ c) $\begin{cases}3x=\dfrac{x^2+2}{y^2}\\3y=\dfrac{y^2+2}{x^2}\end{cases}$

Lời giải

a) Trừ vế với vế của phương trình đầu và phương trình thứ hai ta được:

$x^3-y^3+3x-3y=0\Leftrightarrow(x-y)(x^2+y^2+xy+3)=0\Leftrightarrow x=y$

(Vì $x^2+y^2+xy+3=\left[\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3y^2}{4}+3\right]>0$)

Thay $x=y$ vào phương trình đầu ta được: $x^3+x=0\Leftrightarrow x=0$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(0;0)$.

b) Trừ vế với vế của phương trình đầu và phương trình thứ hai ta được:

$y^2-x^2=x^3-y^3-3(x^2-y^2)+2(x-y)$

$\Leftrightarrow(x-y)(x^2+xy+y^2-2x-2y+2)=0$

$\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}(x-y)\left[x^2+y^2+(x+y-2)^2\right]=0\Leftrightarrow x=y$

(vì $x^2+y^2+(x+y-2)^2>0$)

Thay $x=y$ vào phương trình đầu ta được:

$x^3-4x^2+2x=0\Leftrightarrow x(x^2-4x+2)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2-4x+2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có ba nghiệm: $(0;0);(2+\sqrt{2};2+\sqrt{2})$ và $(2-\sqrt{2};2-\sqrt{2})$.

c) ĐKXĐ: $x\neq 0$ và $y\neq 0$

Nhận xét từ hệ phương trình ta có phương trình có nghiệm $(x;y)$ thì $\begin{cases}x>0\\y>0\end{cases}$

Ta có $\begin{cases}3x=\dfrac{x^2+2}{y^2}\\3y=\dfrac{y^2+2}{x^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3xy^2=x^2+2\ (1)\\3yx^2=y^2+2\ (2)\end{cases}$

Trừ (1) và (2) ta được: $(x-y)(3xy+x+y)=0\Leftrightarrow x=y$ (vì $3xy+x+y>0$)

Với $x=y$: $(1)\Leftrightarrow 3x^3-x^2-2=0\Leftrightarrow(x-1)(3x^2+2x+2)=0\Leftrightarrow x=1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=(1;1)$.

Ví dụ 3: Tìm m để hệ phương trình $\begin{cases}x^2+xy+y^2=m+6\\2x+xy+2y=m\end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Lời giải

Giả sử hệ phương trình có nghiệm $(x_0;y_0)$ thì $(y_0;x_0)$ cũng là một nghiệm của hệ. Vậy hệ có nghiệm suy nhất thì $x_0=y_0$ suy ra

$$\begin{cases}3x_0^2=m+6\\x_0^2+4x_0=m\end{cases}\Rightarrow 3x_0^2=x_0^2+4x_0+6\Leftrightarrow 2x_0^2-4x_0-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1\Rightarrow m=-3\\x_0=3\Rightarrow m=21\end{array}\right.$$

+ Với $m=-3$ hệ trở thành $\begin{cases}x^2+xy+y^2=3\\2(x+y)+xy=-3\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}S=x+y\\P=xy\end{cases}$, $S^2\geq 4P$ hệ phương trình trở thành $\begin{cases}S^2-P=3\\2S+P=-3\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}S^2+2S=0\\P=-2S-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}S=0\\S=-2\end{array}\right.\\P=-2S-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=0\\P=-3\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}S=-2\\P=1\end{cases}$$

Khi $\begin{cases}S=0\\P=-3\end{cases}$ ta có $\begin{cases}x+y=0\\xy=-3\end{cases}$ suy ra x, y là nghiệm của phương trình

$X^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}X=\sqrt{3}\\X=-\sqrt{3}\end{array}\right.$

Do đó hệ có nghiệm là $\left(\sqrt{3};-\sqrt{3}\right)$ và $\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$

Suy ra $m=-3$ thì hệ phương trình không có nghiệm duy nhất..

+ Với $m=21$ hệ trở thành $\begin{cases}x^2+xy+y^2=27\\2x+xy+2y=21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)^2-xy=27\\2(x+y)+xy=21\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}S=x+y\\P=xy\end{cases}$, $S^2\geq 4P$ hệ phương trình trở thành $\begin{cases}S^2-P=27\\2S+P=21\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}S^2+2S-48=0\\P=-2S+21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}S=6\\S=-8\end{array}\right.\\P=-2S+21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=6\\P=9\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}S=-8\\P=37\end{cases}$ (loại)

Khi $\begin{cases}S=6\\P=9\end{cases}$ ta có $\begin{cases}x+y=6\\xy=9\end{cases}$ suy ra x,y là nghiệm của phương trình

$X^2-6X+9=0\Leftrightarrow X=3$

Suy ra hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(3;3)$

Vậy với $m=21$ thì hệ có nghiệm duy nhất.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 3.50: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases}x+y+2xy=2\\x^3+y^3=8\end{cases}$ b) $\begin{cases}x^3+y^3=19\\(x+y)(8+xy)=2\end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Đặt $S=x+y$, $P=xy$. Khi đó hệ trở thành:

$\begin{cases}S+2P=2\\S(S^2-3P)=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P=\dfrac{2-S}{2}\\S(S^2-\dfrac{6-3S}{2})=8\end{cases}$

$\Rightarrow 2S^3+3S^2-6S-16=0\Leftrightarrow(S-2)(2S^2+7S+8)=0$

$\Leftrightarrow S=2\Rightarrow P=0\Rightarrow x,y$ là nghiệm PT: $X^2-2X=0\Leftrightarrow X=0, X=2$.

Vậy nghiệm của hệ là: $\begin{cases}x=0\\y=2\end{cases}\cup\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}$.

b) Đặt $S=x+y$; $P=xy$. Khi đó hệ trở thành:

$\begin{cases}S(S^2-3P)=19\\S(8+P)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}SP=2-8S\\S^3-3(2-8S)=19\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}SP=2-8S\\S^3+24S-25=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}S=1\\P=-6\end{cases}\Rightarrow x,y$ là nghiệm của phương trình:

$X^2-X-6=0\Leftrightarrow X_1=3;\ X_2=-2$.

Vậy hệ đã cho có hai cặp nghiệm: $(x;y)=(-2;3),\ (3;-2)$.

Bài 3.51: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases}x^2=3x+2y\\y^2=3y+2x\end{cases}$ b) $\begin{cases}\dfrac{3}{x^2}=2x+y\\\dfrac{3}{y^2}=2y+x\end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Trừ vế với vế của hai phương trình trên ta được:

$x^2-y^2=x-y\Leftrightarrow(x-y)(x+y-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\\x=1-y\end{array}\right.$.

* Với $x=y\Rightarrow x^2=3x\Leftrightarrow x=0, x=3$

* Với $x=1-y\Rightarrow y^2=3y+2(1-y)\Leftrightarrow y^2-y-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-1\Rightarrow x=2\\y=2\Rightarrow x=-1\end{array}\right.$.

Vậy nghiệm của hệ: $(x;y)=(0;0),\ (3;3),\ (-1;2),\ (2;-1)$.

b) Điều kiện: $x,y\neq 0$

Hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}2x^3+x^2y=3\\2y^3+y^2x=3\end{cases}\Rightarrow 2(x^2-y^3)+xy(x-y)=0$

$\Leftrightarrow(x-y)(2x^2+3xy+2y^2)=0\Leftrightarrow x=y$

(Do $2x^2+3xy+2y^2=2(x+\dfrac{3}{4}y)^2+\dfrac{7}{8}y^2>0$)

Thay vào hệ ta được: $3x^3=3\Leftrightarrow x=1=y$.

Vậy hệ có nghiệm: $x=y=1$.

Bài 3.52: Tìm m để các hệ phương trình $\begin{cases}x=y^2-y+m\\y=x^2-x+m\end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Hướng dẫn giải

• Giả sử hệ có nghiệm $(x_0;y_0)$ thì $(y_0;x_0)$ cũng là nghiệm của hệ nên để hệ có nghiệm duy nhất thì trước hết $x_0=y_0$.

Thay vào hệ ta được: $x_0^2-2x_0+m=0$ phương trình này có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow\Delta'=1-m=0\Leftrightarrow m=1$.

• Với $m=1$ hệ trở thành: $\begin{cases}x=y^2-y+1\\y=x^2-x+1\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2-2x-2y+2=0$

$\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-1)^2=0\Leftrightarrow x=y=1$. Thử lại ta thấy thỏa mãn hệ

Vậy $m=1$ là giá trị cần tìm.

DẠNG TOÁN 3: *HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP BẬC HAI .*

Phương pháp giải.

Hệ phương trình đẳng cấp bậc hai là hệ phương trình có dạng:

$$(I)\ \begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2=d_1 \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2=d_2 \end{cases}.$$

- Giải hệ khi $x=0$ (hoặc $y=0$).
- Khi $x\neq 0$, đặt $y=tx$. Thế vào hệ (I) ta được hệ theo k và x. Khử x ta tìm được phương trình bậc hai theo k. Giải phương trình này ta tìm được k, từ đó tìm được $(x;y)$.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2+6y^2-5xy=0\ (1) \\ 4x^2+2xy+6x=27\ (2) \end{cases}$

Lời giải

Nếu $x=0$ thay vào $(1)\Rightarrow y=0$, thay vào (2) thấy $(x;y)=(0;0)$ không là nghiệm của phương trình (2) nên không phải là nghiệm của hệ phương trình.

Nếu $x\neq 0$, đặt $y=tx$, thay vào hệ ta được

$$\begin{cases} x^2+6t^2y^2-5tx^2=0 \\ 4x^2+2tx^2+6x=27 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2(1+6t^2-5t)=0 \\ 4x^2+2tx^2+6x=27 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 6t^2-5t+1=0\ (*) \\ 4x^2+2tx^2+6x=27\ (**) \end{cases}$$

$(*)\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$ hoặc $t=\dfrac{1}{3}$

Với $t=\dfrac{1}{2}$ thay vào (**) ta được

$$4x^2+x^2+6x=27\Leftrightarrow 5x^2+6x-27=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-3\Rightarrow y=-\dfrac{3}{2} \\ x=\dfrac{9}{5}\Rightarrow y=\dfrac{9}{10} \end{array}\right.$$

Với $t=\dfrac{1}{3}$ thay vào (**) ta được $4x^2+\dfrac{2}{3}x^2+6x=27\Leftrightarrow 14x^2+18x-81=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{9\left(1+\sqrt{15}\right)}{14}\Rightarrow y=-\dfrac{3\left(1+\sqrt{15}\right)}{14} \\ x=\dfrac{9\left(\sqrt{15}-1\right)}{14}\Rightarrow y=\dfrac{3\left(\sqrt{15}-1\right)}{14} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là

$$\left(-3;-\frac{3}{2}\right),\left(\frac{9}{5};\frac{9}{10}\right),\left(-\frac{9\left(1+\sqrt{15}\right)}{14};-\frac{3\left(1+\sqrt{15}\right)}{14}\right),\left(\frac{9\left(\sqrt{15}-1\right)}{14};\frac{3\left(\sqrt{15}-1\right)}{14}\right).$$

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-xy+y^2=1 \\ 2x^2-3xy+4y^2=3 \end{cases}$

Lời giải

Dễ thấy $x=0$ không thỏa mãn hệ phương trình.

Với $x\neq 0$, đặt $y=tx$, thay vào hệ ta được $\begin{cases} x^2(t^2-t+1)=1\ (*) \\ x^2(2t^2-3t+4)=3 \end{cases}$

Suy ra $3(t^2-t+1)=2t^2-3t+4\Rightarrow t=\pm 1$

Thay vào (*) thì

Với $t=1$, ta có $x^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow y=1 \\ x=-1\Rightarrow y=-1 \end{array}\right.$

Với $t=-1$, ta có $x^2=\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow y=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{-1}{\sqrt{3}}\right),\left(\frac{-1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right),(-1;-1)\text{ và }(1;1)$$

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 3.53: Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 3x^2+5xy-4y^2=38 \\ 5x^2-9xy-3y^2=15 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

Ta thấy $x=0$ không thoả hệ phương trình

Xét $x\neq 0$. Đặt $x=ky$ và thay vào hệ ta được: $\begin{cases} 3x^2+5tx^2-4t^2x^2=38 \\ 5x^2-9tx^2-3t^2x^2=15 \end{cases}(*)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x^2(3+5t-4t^2)=38 \\ x^2(5-9t-3t^2)=15 \end{cases}\Rightarrow 15\left(3+5t-4t^2\right)=38\left(5-9t-3t^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 54t^2+417t-145=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{3} \\ t=-\dfrac{145}{18} \end{array}\right.$$

Với $t=\frac{1}{3}$ thì $(*)\Leftrightarrow x^2=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\Rightarrow y=1\\x=-3\Rightarrow y=-1\end{array}\right.$

Với $t=-\frac{145}{18}$ thì $(*)\Leftrightarrow x^2=-\frac{15.108}{12655}$: Phương trình vô nghiệm

Vậy $\left\{\begin{array}{l}x=3\\y=1\end{array}\right.$ hay $\left\{\begin{array}{l}x=-3\\y=-1\end{array}\right.$.

Bài 3.54: Giải hệ phương trình : $\left\{\begin{array}{l}3x^2+2xy+y^2=11\\x^2+2xy+3y^2=17\end{array}\right.$

Hướng dẫn giải

Dễ thấy $x=0$ không thoả mãn hệ phương trình.

Với $x\neq 0$, đặt $y=tx$, thay vào hệ ta được $\left\{\begin{array}{l}x^2(3+2k+k^2)=11(*)\\x^2(1+2k+3k^2)=17\end{array}\right.$

Suy ra $17\left(3+2k+k^2\right)=11\left(1+2k+3k^2\right)\Leftrightarrow 16k^2-12k-40=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=-\frac{5}{4}\\k=2\end{array}\right.$

Thay vào (*) ta được:

- $k=-\frac{5}{4}\Rightarrow\frac{33}{16}x^2=11\Leftrightarrow x^2=\frac{16}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{4}{\sqrt{3}}\Rightarrow y=-\frac{5}{4}.\frac{4}{\sqrt{3}}=-\frac{5}{\sqrt{3}}\\x=-\frac{4}{\sqrt{3}}\Rightarrow y=-\frac{5}{4}.(-\frac{4}{\sqrt{3}})=\frac{5}{\sqrt{3}}\end{array}\right.$
- $k=2\Rightarrow 11x^2=11\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=2\\x=-1\Rightarrow y=-2\end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm (x; y) là $\left(-\frac{4}{\sqrt{3}};\frac{5}{\sqrt{3}}\right);\left(\frac{4}{\sqrt{3}};-\frac{5}{\sqrt{3}}\right);(1;2);(-1;-2)$

Bài 3.55: Cho hệ phương trình : $\left\{\begin{array}{l}x^2-4xy+y^2=m\\y^2-3xy=4\end{array}\right.$

a) Giải hệ phương trình với $m=1$

b) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm

Hướng dẫn giải

Dễ thấy $y=0$ không phải là nghiệm của hpt.

Đặt $x=ty$, ta có :

Hệ $\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}t^2y^2-4ty^2+y^2=m\\y^2-3ty^2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}y^2(t^2-4t+1)=m\\y^2(1-3t)=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{t^2-4t+1}{1-3t}=\frac{m}{4}\ (1)\\y^2(1-3t)=4\end{array}\right.$

Do $y\neq 0$ nên từ $y^2(1-3t)=4\Rightarrow 1-3t>0\Leftrightarrow t<\frac{1}{3}$

a) Với $m=1$ ta có hệ phương trình $\left\{\begin{array}{l}\frac{t^2-4t+1}{1-3t}=\frac{1}{4}\\y^2(1-3t)=4\end{array}\right.$

Ta có nghiệm là $(1;4)$, $(-1;-4)$.

b) Ta có : $(I)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}4(t^2-4t+1)=m(1-3t)\\y^2(1-3t)=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}4t^2-(16-3m)t+4-m=0\ (*)\\y^2(1-3t)=4\end{array}\right.$

Đặt $f(t)=4t^2-(16-3m)t+4-m$ thì

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm thoả mãn $t<\frac{1}{3}\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $f(t)=4t^2-(16-3m)t+4-m$ với $t\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$ cắt trục hoành $\Leftrightarrow\forall m$.

DẠNG TOÁN 4: *HỆ PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI HAI ẨN*

Phương pháp giải.

- Đưa về phương trình tích: Việc phân tích thành tích có thể có ngay từ một phương trình trong hệ hoặc qua phép biến đổi đại số(phép thế, cộng đại số) ta thu về được phương trình tích.
- Đặt ẩn phụ: Điều quan trọng là ta cần phát hiện ra ẩn phụ. Thường chúng ta cần biến đổi đại số(cộng trừ nhân, chia với mộ số, biểu thức) thì mới xuất hiện ẩn phụ.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Loại 1: **Hệ phương trình có thể đưa về phương trình tích**

Ví dụ 1: Giải các hệ phương trình sau

a) $\left\{\begin{array}{l}2xy+3x+4y=-6\\x^2+4y^2+4x+12y=3\end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{l}4x^2+1=y^2-4x\\x^2+xy+y^2=1\end{array}\right.$

Lời giải

a) Hệ phương trình tương đương với $\left\{\begin{array}{l}(x+2)(2y+3)=0\\x^2+4y^2+4x+12y=3\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x+2=0\\x^2+4y^2+4x+12y=3\end{array}\right.$ (1) hoặc $\left\{\begin{array}{l}2y+3=0\\x^2+4y^2+4x+12y=3\end{array}\right.$ (2)

Ta có $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x^2-y^2+2x-4y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y^2+4y+5=0 \end{cases}$ (Vô nghiệm)

$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{3}{2} \\ x^2-y^2+2x-4y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{3}{2} \\ 4x^2+8x-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{5}{2} \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $\left(-\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$.

b) Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} (2x+1)^2=y^2 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\pm(2x+1) \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases}$

Xét hệ $\begin{cases} y=2x+1 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1 \\ x^2+x(2x+1)+(2x+1)^2=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1 \\ 7x^2+5x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x+1 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\frac{5}{7} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\frac{5}{7} \\ y=-\frac{3}{7} \end{cases} \end{array}\right.$

Xét hệ $\begin{cases} y=-2x-1 \\ x^2+xy+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-1 \\ x^2-x(2x+1)+(2x+1)^2=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-1 \\ 3x^2+3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x-1 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là $(0;1),\left(-\frac{5}{7};-\frac{3}{7}\right),(0;-1)$ và $(-1;1)$.

Ví dụ 2: Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} x^2+3=xy \\ y^2+5x^2=4xy+3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^3+2y^3+2y^2=2xy(x+1) \\ 3xy=2\left(x^2-y\right) \end{cases}$

Lời giải

a) Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} xy-x^2=3 \\ y^2+5x^2=4xy+\left(xy-x^2\right) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} xy-x^2=3 \\ 6x^2-5xy+y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy-x^2=3 \\ (2x-y)(3x-y)=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} xy-x^2=3 \\ 2x-y=0 \end{cases}$ (1) hoặc $\begin{cases} xy-x^2=3 \\ 3x-y=0 \end{cases}$ (2)

Giải hệ (1): $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=3 \\ y=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{3} \\ y=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=2\sqrt{3} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=-2\sqrt{3} \end{cases}$

Giải hệ (2): $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=3 \\ y=3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ y=3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ y=\dfrac{3\sqrt{6}}{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-\dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ y=-\dfrac{3\sqrt{6}}{2} \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là

$\left(\sqrt{3};2\sqrt{3}\right), \left(-\sqrt{3};-2\sqrt{3}\right), \left(\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)$ và $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2};-\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)$.

b) Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} x^3-2y^3-2x^2y+2y(y-x)=0 \\ 2y=2x^2-3xy \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-2y^3-2x^2y+\left(2x^2-3xy\right)(y-x)=0 \\ 2y=2x^2-3xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-3x^2y+3xy^2-2y^3=0 \\ 2y=2x^2-3xy \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2y)\left(x^2-xy+y^2\right)=0 \\ 2y=2x^2-3xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=0 \\ 2y=2x^2-3xy \end{cases}$ (3) hoặc $\begin{cases} x^2-xy+y^2=0 \\ 2y=2x^2-3xy \end{cases}$ (4)

Giải hệ (3):

$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ 2y=8y^2-6y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ 2y^2-2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Giải hệ (4): Ta có $x^2-xy+y^2=\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4} \geq 0$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=0$ và $x=y=0$ thỏa mãn phương trình thứ hai của (4) do đó hệ phương trình (4) có nghiệm là $x=y=0$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là $(0;0)$ và $(2;1)$.

Ví dụ 3: Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} x^2-2y^2+xy+3x+2=0 \\ x^2+y^2=x+y \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+y^2+xy=3 \\ x^2+2xy+9=7x+5y \end{cases}$

Lời giải

a) Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} (x-y+1)(x+2y+2)=0 \\ x^2+y^2=x+y \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-y+1=0 \\ x+2y+2=0 \end{array}\right. \\ x^2+y^2=x+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+1=0 \\ x^2+y^2=x+y \end{cases} (1) \text{ hoặc } \begin{cases} x+2y+2=0 \\ x^2+y^2=x+y \end{cases} (2)$$

Giải hệ (1): $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+1 \\ x^2+(x+1)^2=x+x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+1 \\ 2x^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$

Giải hệ (2): $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y-2 \\ (-2y-2)^2+y^2=-2y-2+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y-2 \\ 5y^2+9y+6=0 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=(0;1)$

b) Cộng hai phương trình của hệ ta có

$$2x^2+y^2+3xy-7x-5y+6=0 \Leftrightarrow (y+2x-3)(y+x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y+2x-3=0 \\ y+x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=3-2x \\ y=2-x \end{array}\right.$$

Suy ra hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ y=3-2x \end{cases} (3) \text{ hoặc } \begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ y=2-x \end{cases} (4)$$

Giải hệ (3): $(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x(3-2x)+(3-2x)^2=3 \\ y=3-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-9x+6=0 \\ y=3-2x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right. \\ y=3-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$$

Giải hệ (4): $(4) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x(2-x)+(2-x)^2=3 \\ y=2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+1=0 \\ y=2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là $(1;1)$ và $(2;-1)$.

Nhận xét:

+ Để phân tích một phương trình bậc hai hai ẩn thành tích, ta xem một ẩn, ẩn còn lại là tham số từ đó dựa vào ứng dụng của định lí Viét để phân tích.(xem lại phần ứng dụng định lí Viét)
+ Đối với hệ hai phương trình bậc hai hai ẩn mà trong mỗi phương trình không thể phân tích được thành tích(như ở câu b) ta là như sau: ta tìm số thực α sao cho $x^2+2xy-7x-5y+9+\alpha\left(x^2+xy+y^2\right)=3\alpha$

$\Leftrightarrow (1+\alpha)x^2+(2y+\alpha y-7)x+\alpha y^2-5y+9-3\alpha=0$ có thể phân tích thành nhân tử. Điều này có được khi

$$\Delta_x=(2y+\alpha y-7)^2-4(1+\alpha)\left(\alpha y^2-5y+9-3\alpha\right)$$
$$=\left(4-3\alpha^2\right)y^2+(6\alpha-8)y+12\alpha^2-24\alpha+13$$

là số chính phương hay

$$\Delta'_y=(3\alpha-4)^2-\left(4-3\alpha^2\right)\left(12\alpha^2-24\alpha+13\right)=36\alpha^4-72\alpha^3+72\alpha-36=0$$

$\Leftrightarrow \alpha=1$ hoặc $\alpha=-1$. Từ đó ta có lời giải như trên(ngoài ra ta cũng có thể trừ vế với vế).

Ví dụ 4: Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{2\sqrt{x}}{y}+2 \\ 2y^2-2y+1=3xy \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2+6y+\sqrt{x-2y}=\dfrac{x}{y} \\ x(1-8y)=x^2+2y \end{cases}$

Lời giải

a) Điều kiện xác định: $x>0, y\neq 0$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{y}{x}=\frac{2\sqrt{x}}{y}+2 \Leftrightarrow y\sqrt{x}+y^2=2x\sqrt{x}+2xy \Leftrightarrow y^2+y(\sqrt{x}-2x)-2x\sqrt{x}=0$$

Xem đây là phương trình bậc hai theo biến y, ta có

$$\Delta_x=(\sqrt{x}-2x)^2+8x\sqrt{x}=x+4x\sqrt{x}+4x^2=(\sqrt{x}+2x)^2>0.$$

Do đó, phương trình này có hai nghiệm là

$$y=\frac{(2x-\sqrt{x})-(\sqrt{x}+2x)}{2}=-\sqrt{x} \text{ và } y=\frac{(2x-\sqrt{x})+(\sqrt{x}+2x)}{2}=2x$$

Suy ra hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} y=-\sqrt{x} \\ 2y^2-2y+1=3xy \end{cases} (3) \text{ hoặc } \begin{cases} y=2x \\ 2y^2-2y+1=3xy \end{cases} (4)$$

Ta có $(3) \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\sqrt{x} \\ y^2+(y-1)^2=-3x\sqrt{x} \end{cases}$

(vô nghiệm vì $y^2+(y-1)^2>0, -3x\sqrt{x}<0$)

$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x \\ 2(2x)^2-2(2x)+1=3x(2x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x \\ 2x^2-4x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x \\ x=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \\ y=2+\sqrt{2} \end{cases} \text{ hoặc } \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \\ y=2-\sqrt{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là $\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2};2+\sqrt{2}\right)$ và $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2};2-\sqrt{2}\right)$

b) ĐKXĐ: $\begin{cases}x\geq 2y\\ y\neq 0\end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với

$6y^2+y\sqrt{x-2y}-(x-2y)=0\Leftrightarrow\left(3y-\sqrt{x-2y}\right)\left(2y+\sqrt{x-2y}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3y-\sqrt{x-2y}=0\ (1)\\ 2y+\sqrt{x-2y}=0\ (2)\end{array}\right.$

- TH1: Với $3y-\sqrt{x-2y}=0\Leftrightarrow 3y=\sqrt{x-2y}$: Dễ thấy khi $y<0$ thì phương trình vô nghiệm.

Ta xét $y\geq 0$ ta có $(1)\Leftrightarrow 9y^2=x-2y$ kết hợp với phương trình thứ hai của hệ thì

$\begin{cases}9y^2=x-2y\\ x(1-8y)=x^2+2y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9y^2=x-2y\\ x^2+8xy=9y^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9y^2=x-2y\\ (x-y)(x+9y)=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}9y^2=x-2y\\ x-y=0\end{cases}(1')$ hoặc $\begin{cases}9y^2=x-2y\\ x+9y=0\end{cases}(1'')$

Hệ phương trình (1') tương đương $\begin{cases}9y^2=-y\\ x-y=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=0\\ y=-\frac{1}{9}\\ x=y\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}x=y=0\\ x=y=-\frac{1}{9}\end{cases}$

Hệ phương trình (1'') tương đương

$\begin{cases}9y^2=-9y-2y\\ x=-9y\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=0\\ y=-11\\ x=-9y\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=99\\ y=-11\end{cases}$

Kết hợp điều kiện suy ra trong trường hợp này hệ phương trình vô nghiệm

- TH2: Với $2y+\sqrt{x-2y}=0\Leftrightarrow -2y=\sqrt{x-2y}$: Dễ thấy khi $y>0$ thì phương trình vô nghiệm.

Ta xét $y\leq 0$ ta có $(2)\Leftrightarrow 4y^2=x-2y$ kết hợp với phương trình thứ hai của hệ thì

$\begin{cases}4y^2=x-2y\\ x(1-8y)=x^2+2y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4y^2=x-2y\\ x^2+8xy=4y^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4y^2=x-2y\\ x=-4y\pm 2\sqrt{5}y\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}4y^2=x-2y\\ x=\left(-4+2\sqrt{5}\right)y\end{cases}(2')$ hoặc $\Leftrightarrow\begin{cases}4y^2=x-2y\\ x=\left(-4-2\sqrt{5}\right)y\end{cases}(2'')$

Hệ phương trình (2') tương đương với

$\begin{cases}4y^2=\left(-6+2\sqrt{5}\right)y\\ x=\left(-4+2\sqrt{5}\right)y\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=0\\ y=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\\ x=\left(-4+2\sqrt{5}\right)y\end{array}\right.\Leftrightarrow x=y=0$ hoặc $\begin{cases}x=11-5\sqrt{5}\\ y=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\end{cases}$

Hệ phương trình (2'') tương đương với

$\begin{cases}4y^2=\left(-6-2\sqrt{5}\right)y\\ x=\left(-4-2\sqrt{5}\right)y\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=0\\ y=-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\\ x=\left(-4-2\sqrt{5}\right)y\end{array}\right.\Leftrightarrow x=y=0$ hoặc $\begin{cases}x=11+5\sqrt{5}\\ y=-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\end{cases}$

Kết hợp điều kiện suy ra trong trường hợp này hệ phương trình

$\left(11-5\sqrt{5};\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$ và $\left(11+5\sqrt{5};-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là

$\left(11-5\sqrt{5};\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$ và $\left(11+5\sqrt{5};-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Nhận xét: Các biến x, y trong mỗi phương trình độc lập với nhau do đó ta sẽ chọn α bằng cách lấy phương trình thứ nhất (hoặc phương trình thứ hai) nhân với α rồi cộng với phương trình thứ hai sao cho đưa về dạng phương trình $(ax+b)^n=\pm(a'y+b')^n$.

Loại 2: Hệ phương trình giải bằng cách đặt ẩn phụ.

Ví dụ 5: Giải hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases}2x^2-y^2-4(x-y)=1\\ x^2(x-2)^2+2=(xy-2y)(xy-4x)\end{cases}$ b) $\begin{cases}3x^2+y=y^2\\ x^2\left(x^2+45\right)=y\left(y^3-15\right)\end{cases}$

Lời giải

a) Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases}2\left(x^2-2x\right)-\left(y^2-4y\right)=1\\ \left(x^2-2x\right)^2-\left(x^2-2x\right)\left(y^2-4y\right)+2=0\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}a=x^2-2x\\ b=y^2-4y\end{cases}$ khi đó hệ trở thành $\begin{cases}2a-b=1\\ a^2-ab+2=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}b=2a-1\\ a^2-a(2a-1)+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2a-1\\ a^2-a-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=2a-1\\ a=-1\\ a=2\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$

Với $\begin{cases} a=-1 \\ b=-3 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} -1=x^2-2x \\ -3=y^2-4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+1=0 \\ y^2-4y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=3 \end{array}\right. \end{cases}$

Với $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} 2=x^2-2x \\ 3=y^2-4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-2=0 \\ y^2-4y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1\pm\sqrt{3} \\ y=2\pm\sqrt{7} \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)$ là $(1;1)$, $(1;3)$, $\left(1+\sqrt{3};2+\sqrt{7}\right)$, $\left(1+\sqrt{3};2-\sqrt{7}\right)$, $\left(1-\sqrt{3};2+\sqrt{7}\right)$ và $\left(1-\sqrt{3};2-\sqrt{7}\right)$.

b) Hệ phương trình tương đương với

$$\begin{cases} 3x^2+y=y^2 \\ y^4-x^4=15\left(3x^2+y\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-3x^2=y \\ y^4-x^4=15y^2 \end{cases} \quad (*)$$

- Với $y=0$ từ hệ suy ra $x=0$.

- Với $y\neq 0$ ta có hệ phương trình (*) tương đương với $\begin{cases} y-\dfrac{3x^2}{y}=1 \\ y^2-\dfrac{x^4}{y^2}=15 \end{cases}$

Đặt $\dfrac{x^2}{y}=z$, hệ trở thành $\begin{cases} y-3z=1 \\ y^2-z^2=15 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=3z+1 \\ (3z+1)^2-z^2=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3z+1 \\ 8z^2+6z-14=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3z+1 \\ \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z=-\dfrac{7}{4} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=4 \\ z=1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} y=-\dfrac{17}{4} \\ z=-\dfrac{7}{4} \end{cases}$$

Với $\begin{cases} y=4 \\ z=1 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} y=4 \\ \dfrac{x^2}{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4 \\ x^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4 \\ x=\pm 2 \end{cases}$

Với $\begin{cases} y=-\dfrac{17}{4} \\ z=-\dfrac{7}{4} \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} y=-\dfrac{17}{4} \\ \dfrac{x^2}{y}=-\dfrac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{17}{4} \\ x^2=\dfrac{119}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{17}{4} \\ x=\pm\dfrac{\sqrt{119}}{4} \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ là

$(2;4)$, $(-2;4)$, $\left(\dfrac{\sqrt{119}}{4};-\dfrac{17}{4}\right)$ và $\left(-\dfrac{\sqrt{119}}{4};-\dfrac{17}{4}\right)$.

Ví dụ 6: Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=5 \\ (xy-1)^2=x^2-y^2+2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-y=3\sqrt{x+y} \\ 3x+y=3\sqrt{x-y} \end{cases}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $\begin{cases} x\neq 0 \\ y\neq 0 \end{cases}$

Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=5 \\ x^2y^2-1-x^2+y^2=2xy \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=5 \\ xy-\dfrac{1}{xy}-\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{y}\right)^2=5 \\ \left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(y-\dfrac{1}{y}\right)=2 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} a=x+\dfrac{1}{x} \\ b=y-\dfrac{1}{y} \end{cases}$, khi đó hệ phương trình trở thành $\begin{cases} a^2+b^2=5 \\ ab=2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2-2ab=5 \\ ab=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2=9 \\ ab=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=\pm 3 \\ ab=2 \end{cases}$$

Với hệ phương trình $\begin{cases} a+b=3 \\ ab=2 \end{cases}$ thì a,b là nghiệm của phương trình

$$X^2-3X+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=1 \\ X=2 \end{array}\right.$$

Do đó hệ có nghiệm $(a;b)$ là $(2;1)$ và $(1;2)$

Với hệ phương trình $\begin{cases} a+b=-3 \\ ab=2 \end{cases}$ thì a,b là nghiệm của phương trình

$$X^2+3X+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X=-1 \\ X=-2 \end{array}\right.$$

Do đó hệ có nghiệm $(a;b)$ là $(-2;-1)$ và $(-1;-2)$

Vì $|a| = \left|x + \frac{1}{x}\right| = |x| + \left|\frac{1}{x}\right| \geq 2$ nên chỉ còn hai trường hợp sau

TH1: $(a;b) = (2;1)$ khi đó ta có $\begin{cases} 2 = x + \frac{1}{x} \\ 1 = y - \frac{1}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0 \\ y^2 - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Do đó hệ phương trình ban đầu có nghiệm $(x;y)$ là $\left(1;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ và $\left(1;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

TH2: $(a;b) = (-2;-1)$ khi đó ta có $\begin{cases} -2 = x + \frac{1}{x} \\ -1 = y - \frac{1}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 1 = 0 \\ y^2 + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Do đó hệ phương trình ban đầu có nghiệm $(x;y)$ là

$\left(-1;\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ và $\left(-1;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$

Vậy hệ phương trình ban đầu có nghiệm $(x;y)$ là

$\left(1;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \left(1;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right), \left(-1;\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ và $\left(-1;\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

b) Đặt $\begin{cases} \sqrt{x+y} = a \\ \sqrt{x-y} = b \end{cases}$, $a \geq 0, b \geq 0$ khi đó $2a^2 + b^2 = 3x + y$, $a^2 + 2b^2 = 3x - y$

Hệ phương trình trở thành $\begin{cases} a^2 + 2b^2 = 3a\ (1) \\ 2a^2 + b^2 = 3b\ (2) \end{cases}$

Trừ vế với vế của hai phương trình (1) và (2) ta được

$b^2 - a^2 = 3(a-b) \Leftrightarrow (a-b)(3+a+b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a = -b - 3 \end{array}\right.$

Với $a = b$ thay vào phương trình (1) suy ra $3a^2 = 3a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \Rightarrow b = 0 \\ a = 1 \Rightarrow b = 1 \end{array}\right.$

Với $a = -b - 3$ thay vào phương trình (1) suy ra

$(-b-3)^2 + b^2 = 3b \Leftrightarrow 2b^2 - 3b + 9 = 0$ (vô nghiệm)

TH1: $a = b = 0$ ta có $\begin{cases} \sqrt{x+y} = 0 \\ \sqrt{x-y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

TH2: $a = b = 1$ ta có $\begin{cases} \sqrt{x+y} = 1 \\ \sqrt{x-y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình ban đầu có nghiệm $(x;y)$ là $(0;0)$ và $(1;0)$

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 3.56: Giải các hệ phương trình sau.

a) $\begin{cases} \sqrt{x+y} = \sqrt[3]{x+y} \\ \sqrt{x-y} = \sqrt[3]{x-y-12} \end{cases}$

b) $\begin{cases} 8(x^2+y^2) + 4xy + \frac{5}{(x+y)^2} = 13 \\ 2x + \frac{1}{x+y} = 1 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) ĐKXĐ : $\begin{cases} x \geq y \\ x \geq -y \end{cases}$

$\sqrt{x+y} = \sqrt[3]{x+y} \Leftrightarrow (\sqrt{x+y})^6 = (\sqrt[3]{x+y})^6$

$\Leftrightarrow (x+y)^3 = (x+y)^2 \Leftrightarrow (x+y)^2(x+y-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -y \\ x + y = 1 \end{array}\right.$.

Thay $x = -y$ vào $\sqrt{x-y} = \sqrt[3]{x-y-12}$ ta được $y = -2 \Rightarrow x = 2$.

Thay $x = 1 - y$ vào $\sqrt{x-y} = \sqrt[3]{x-y-12}$ ta được $1 - 2y = 4 \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{-3}{2} \\ x = \frac{5}{2} \end{cases}$

b) Đặt $a = x + y + \frac{1}{x+y}, b = x - y$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 5\left[(x+y)^2 + \frac{1}{(x+y)^2}\right] + 3(x-y)^2 = 13 \\ (x + y + \frac{1}{x+y}) + x - y = 1 \end{cases}$

Nên ta có: $\begin{cases} 5(a^2-2) + 3b^2 = 13 \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a^2 + 3b^2 = 23 \\ a + b = 1 \end{cases}$

Giải hệ này ta tìm được $\begin{cases} a = 4 \\ b = -3 \end{cases}$ và $\begin{cases} a = -\frac{5}{2} \\ b = \frac{7}{2} \end{cases}$

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ: $(x;y) = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}; \frac{5 \pm \sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{3}{4}; -\frac{11}{4}\right), \left(\frac{3}{2}; -2\right)$.

Bài 3.57: Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{7}{\sqrt{xy}} + 1 \\ x\sqrt{xy} + y\sqrt{xy} = 78 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{2xy} = 8\sqrt{2} \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2}\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4\end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Điều kiện: $x, y > 0$

$$\text{HPT} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)+(-\sqrt{xy})=7\\ (x+y)(-\sqrt{xy})=-78\end{cases}$$

Suy ra $x+y$ và $-\sqrt{xy}$ là nghiệm của phương trình:

$$t^2-7t-78=0 \Rightarrow \begin{bmatrix}t=13\\ t=-6\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}x+y=13\\ -\sqrt{xy}=-6\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}x+y=13\\ xy=36\end{bmatrix}$$

Suy ra x, y là nghiệm của phương trình: $u^2-13u+36=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}u=4\\ u=9\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\begin{cases}x=4\\ y=9\end{cases}\\ \begin{cases}x=9\\ y=4\end{cases}\end{bmatrix}$

Vậy, hệ phương trình có nghiệm là $(4,9), (9,4)$.

b) Điều kiện: $x \ge 0, y \ge 0$

$$\text{HPT} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{2x^2+2y^2}+\sqrt{4xy}=16\\ x+y+\sqrt{4xy}=16\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{2x^2+2y^2}=x+y\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2x^2+2y^2=x^2+y^2+2xy\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-y)^2=0\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4\end{cases} \Leftrightarrow x=y=4$$

Vậy hệ có nghiệm là $(4;4)$.

c) Điều kiện: $\begin{cases}x \ge 0\\ y \ge 0\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}S=\sqrt{x}+\sqrt{y}\\ P=\sqrt{xy}\end{cases}$, điều kiện $S, P \ge 0$ và $S^2-4P \ge 0$

Khi đó hệ phương trình có dạng:

$$\begin{cases}\sqrt{\left[\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2-2\sqrt{xy}\right]^2-2xy}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2}\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{\left(S^2-2P\right)^2-2P^2}+\sqrt{2}.P=8\sqrt{2}\\ S=4\end{cases} \Rightarrow \sqrt{P^2-32P+128}=8-P$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}8-P \ge 0\\ P^2-32P+128=(8-P)^2\end{cases} \Leftrightarrow P=4$$

Vậy ta được: $\begin{cases}S=4\\ P=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=4\\ \sqrt{xy}=4\end{cases} \Leftrightarrow x=y=4$

Bài 3.58: Giải các hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4\\ x^2+y^2=128\end{cases}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $\begin{cases}x+y \ge 0\\ x-y \ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y \ge -x\\ y \le x\end{cases} \Leftrightarrow -x \le y \le x \Rightarrow x \ge 0$

Viết lại hệ phương trình dưới dạng:

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4\\ \frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{2}(x-y)^2=128\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4\\ (x+y)^2+(x-y)^2=256\end{cases}$$

Đặt: $\begin{cases}u=\sqrt{x+y}\\ v=\sqrt{x-y}\end{cases}, u, v \ge 0$

Ta được: $\begin{cases}u+v=4\\ u^4+v^4=256\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u+v=4\\ uv(uv-32)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}uv=0\\ uv=32\\ u+v=4\end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}u+v=4\\ uv=32\end{cases} \text{ Hoặc } \begin{cases}u+v=4\\ uv=0\end{cases}$$

Giải hệ ta được nghiệm là $(8,8); (8,-8)$.

Bài 3.59: Xác định các giá trị của a sao cho hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y-1}=a\\ x+y=2a+1\end{cases}$$

Hướng dẫn giải

- Giả sử hệ có nghiệm $(x_0, y_0) \Rightarrow (y_0-2, x_0+2)$ cũng là nghiệm của hệ phương trình. Vậy hệ có nghiệm duy nhất thì điều kiện cần là $x_0 = y_0 - 2$

Khi đó hệ có dạng: $\begin{cases}\sqrt{y_0-1}+\sqrt{y_0-1}=a\\ y_0-2+y_0=2a+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\sqrt{y_0-1}=a\\ 2y_0=2a+3\end{cases}$

$$\Rightarrow \sqrt{2(2a+3)-1}=a \Leftrightarrow \begin{cases}a \ge 0\\ 4a-2=a^2\end{cases} \Leftrightarrow a=2+\sqrt{6}$$

- Với $a=2+\sqrt{6}$, hệ có dạng:

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y-1}=2+\sqrt{6}\\ x+y=2(2+\sqrt{6})+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y-1}=2+\sqrt{6}\\ (x+1)+(y-1)=5+2\sqrt{6}\end{cases}$$

Đặt: $\begin{cases}u=\sqrt{x+1}\\ v=\sqrt{y-1}\end{cases}; u,v\ge 0$. Ta được: $\begin{cases}u+v=2+\sqrt{6}\\ u^2+v^2=5+2\sqrt{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=2+\sqrt{6}\\ uv=\dfrac{5+2\sqrt{6}}{2}\end{cases}$

Suy ra u,v là nghiệm phương trình:

$$t^2-(2+\sqrt{6})t+\frac{1}{2}(5+2\sqrt{6})=0\Leftrightarrow t=\frac{2+\sqrt{6}}{2}\Rightarrow u=v=\frac{2+\sqrt{6}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x+1}=\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}\\ \sqrt{y-1}=\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{6+4\sqrt{6}}{4}\\ y=\dfrac{14+4\sqrt{6}}{4}\end{cases}$$ là nghiệm duy nhất.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất khi $a=2+\sqrt{6}$.

Bài 3.60: Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases}x^2-xy+y^2=3(x-y)\\ x^2+xy+y^2=7(x-y)^2\end{cases}$

b) $\begin{cases}x^3y+xy^2+x^2+y+xy=-\dfrac{5}{4}\\ x^4+2x^2y+y^2+xy=-\dfrac{5}{4}\end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: HPT $\Leftrightarrow\begin{cases}(x-y)^2+xy=3(x-y)\\ xy=2(x-y)^2\end{cases}$

Đặt $u=x-y, v=xy$.

Hệ trở thành $\begin{cases}u^2-3u+v=0\\ v=2u^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=0\\ v=0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}u=1\\ v=2\end{cases}$

Từ đó giải được các nghiệm của hệ là $(0;0),(2;1),(-1;-2)$.

b) HPT $\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y+xy(x^2+y)+xy=-\dfrac{5}{4}\\ (x^2+y)^2+xy=-\dfrac{5}{4}\end{cases}$. Đặt $a=x^2+y;\ b=xy$

Ta có: $\begin{cases}a+ab+b=-\dfrac{5}{4}\\ a^2+b=-\dfrac{5}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-\dfrac{5}{4}-a^2\\ a+a(-\dfrac{5}{4}-a^2)-\dfrac{5}{4}-a^2=-\dfrac{5}{4}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=-\dfrac{5}{4}-a^2\\ a^3+a^2+\dfrac{1}{4}a=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\ b=-\dfrac{5}{4}\end{cases}$$ hoặc $\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\ b=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$

* $\begin{cases}a=0\\ b=-\dfrac{5}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y=0\\ xy=-\dfrac{5}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}}\\ y=-\sqrt[3]{\dfrac{25}{16}}\end{cases}$

* $\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\ b=-\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y=-\dfrac{1}{2}\\ xy=-\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$

Vậy hệ có hai cặp nghiệm $(x;y)=\left(\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}};-\sqrt[3]{\dfrac{24}{16}}\right),\left(1;-\dfrac{3}{2}\right)$.

Bài 3.61: Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases}xy+x+1=7y\\ x^2y^2+xy+1=13y^2\end{cases}$

b) $\begin{cases}y(1+2x^3y)=3x^6\\ 1+4x^6y^2=5x^6\end{cases}$

c) $\begin{cases}x^2-2xy+x+y=0\\ x^4-4x^2y+3x^2+y^2=0\end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Vì $y=0$ không thỏa hệ đã cho nên hệ đã cho $\Leftrightarrow\begin{cases}x+\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{y}=7\\ x^2+\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{y^2}=13\end{cases}$

Đặt $a=x+\dfrac{1}{y};\ b=\dfrac{x}{y}\Rightarrow x^2+\dfrac{1}{y^2}=a^2-2b$.

Ta có hệ là $\begin{cases}a+b=7\\ a^2-b=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=7\\ a^2+a-20=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\ b=3\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a=-5\\ b=12\end{cases}$.

* $\begin{cases}x+\dfrac{1}{y}=4\\ \dfrac{x}{y}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-4x+3=0\\ x=3y\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=\dfrac{1}{3}\\ x=3\Rightarrow y=1\end{array}\right.$

* $\begin{cases}x+\dfrac{1}{y}=-5\\ \dfrac{x}{y}=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+5x+12=0\\ x=12y\end{cases}$ hệ vô nghiệm.

Vậy hệ đã cho có hai cặp nghiệm: $(x;y)=\left(1;\frac{1}{3}\right),\ (3;1)$.

b) Ta thấy $x=0$ không là nghiệm của hệ nên ta biến đổi hệ trở thành

$\begin{cases}2y\frac{1}{x^3}(\frac{1}{x^3}+2y)=6\\ \frac{1}{x^6}+(2y)^2=5\end{cases}$. Đặt $a=2y,\ b=\frac{1}{x^3}$, ta có hệ

$$\begin{cases}ab(a+b)=6\\ a^2+b^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=\frac{6}{ab}\\ (a+b)^2-2ab=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=\frac{6}{ab}\\ 2a^3b^3+5a^2b^2-36=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}ab=2\\ a+b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases}\ \text{v}\ \begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}.$$

* $\begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\frac{1}{2}\\ x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\end{cases}$.

* $\begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=1\\ x=1\end{cases}$.

Vậy hệ đã cho có hai cặp nghiệm : $(x;y)=(1;1),\ \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}};\frac{1}{2}\right)$.

c) Nếu $x=0$ thay vào hệ $\Rightarrow y=0\Rightarrow x=y=0$ là một nghiệm của hệ

Với $x\neq 0$ ta có hệ đã cho $\Leftrightarrow\begin{cases}x+\frac{y}{x}=2y-1\\ x^2+\frac{y^2}{x^2}=4y-3\end{cases}$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+\frac{y}{x}=2y-1\\ (x+\frac{y}{x})^2=6y-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\frac{y}{x}=2y-1 & (1)\\ (2y-1)^2=6y-3 & (2)\end{cases}.$$

(2) $\Leftrightarrow 2y^2-5y+2=0\Leftrightarrow y=2;y=\frac{1}{2}$.

* $y=2\Rightarrow(1)\Leftrightarrow x+\frac{2}{x}=3\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow x=1;x=2$.

* $y=\frac{1}{2}\Rightarrow(1)\Leftrightarrow x+\frac{1}{2x}=0$ phương trình vô nghiệm.

Vậy hệ đã cho có ba cặp nghiệm: $(x;y)=(0;0),\ (1;2),\ (2;2)$.

Bài 3.62: Giải hệ phương trình :

a) $\begin{cases}x^3+3xy^2=6xy-3x-49\\ x^2-8xy+y^2=10y-25x-9\end{cases}$

b) $\begin{cases}x^3-y^3=35\\ 2x^2+3y^2=4x-9y\end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Nhân phương trình thứ hai của hệ với 3 và cộng hai phương trình theo vế ta có

$$x^3+3x^2+3y^2(x+1)-24xy=6xy+30y-78x-76$$

$$\Leftrightarrow(x+1)(x^2+2x+76)+3y^2(x+1)-30y(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow(x+1)(x^2+2x+3y^2-30y+76)=0\quad(*)$$

Do $x^2+2x+3y^2-30y+76=(x+1)^2+3(y-5)^2\geq 0$ và không có đẳng thức xảy ra nên (*) tương đương với $x=-1$.

Thay vào hệ ta tìm được $y=-3, y=5$.

b) Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$(6x^2-12x+8)+(9y^2+27y+27)=35$$

Thay vào phương trình thứ nhất của hệ, ta được:

$$x^3-y^3=(6x^2-12x+8)+(9y^2+27y+27)\Leftrightarrow(x-2)^3=(y+3)^3\Leftrightarrow x=y+5$$

Lại thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được:

$$2(y+5)^2+3y^2=4(y+5)-9y\Leftrightarrow 5y^2+25y+30=0$$

$$\Leftrightarrow(y+2)(y+3)=0\Leftrightarrow y=-2\vee y=-3$$

Với $y=-2$, ta có $x=3$, với $y=-3$, ta có $x=2$.

Thử lại ta thấy thỏa.

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(x,y)=(-2,3),(-3,2)$.

Bài 3.63: Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt[4]{x}(\frac{1}{4}+\frac{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y})=2\\ \sqrt[4]{y}(\frac{1}{4}-\frac{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y})=1\end{cases}$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $\begin{cases}x,y\geq 0\\ x+y\neq 0\end{cases}$

Ta thấy $x=0$ ($y=0$) không là nghiệm của hệ nên hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases}\frac{1}{4}+\frac{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y}=\frac{2}{\sqrt[4]{x}}\\ \frac{1}{4}-\frac{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y}=\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\frac{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y}=\frac{2}{\sqrt[4]{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\\ \frac{1}{2}=\frac{2}{\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\end{cases}$$

Suy ra $\frac{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y}=\left(\frac{2}{\sqrt[4]{x}}-\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt[4]{x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{y}}\right)=\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{y}}$

$\Leftrightarrow x\sqrt{x}-2x\sqrt{y}+2y\sqrt{x}-4y\sqrt{y}=0$.

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ ta có: $t^3-2t^2+2t-4=0\Leftrightarrow t=2\Leftrightarrow x=4y$

Từ đó ta tìm được $\begin{cases}x=\dfrac{\left(\sqrt{2}+1\right)^4}{4}\\ y=\dfrac{\left(\sqrt{2}+1\right)^4}{16}\end{cases}$.

DẠNG TOÁN 5: *GIẢI PHƯƠNG TRÌNH BẰNG CÁCH ĐẶT ẨN PHỤ ĐƯA VỀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH*

Phương pháp giải.

Trong một phương trình mà có hai đại lượng có mối liên hệ với nhau thì ta đặt mỗi đại lượng ấy là một ẩn mới từ đó ta đưa về được hệ phương trình (dễ dàng giải được) có được từ mối liên hệ hai đại lượng đó và phương trình ban đầu. Giải hệ phương trình từ đó tìm được nghiệm của phương trình ban đầu.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau

a) $\sqrt[3]{20+x}+\sqrt{16-x}=6$ b) $\sqrt[3]{2(x-2)}+\sqrt[4]{4(x+2)}=2$.

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x\le 16$.

Đặt $\begin{cases}u=\sqrt[3]{20+x}\\ v=\sqrt{16-x}\end{cases}$ suy ra $u\le\sqrt[3]{36}$, $v\ge 0$ và $u^3+v^2=36$

Khi đó phương trình trở thành $u+v=6$

Ta có hệ phương trình:

$\begin{cases}u+v=6\\ u^3+v^2=36\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=6-u\\ u^3+(6-u)^2=36\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=6-u\\ u(u^2+u-12)=0\ (*)\end{cases}$

Phương trình $(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=0\\ u=3\\ u=-4\end{array}\right.$ thỏa mãn $u\le\sqrt[3]{36}$.

Với $u=0\Rightarrow 0=\sqrt[3]{20+x}\Leftrightarrow x=-20$, $u=3\Rightarrow 3=\sqrt[3]{20+x}\Leftrightarrow x=7$

và $u=-4\Rightarrow -4=\sqrt[3]{20+x}\Leftrightarrow x=-84$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm: $x=-20;x=-84;x=7$.

b) ĐKXĐ: $x\ge -2$

Đặt $\begin{cases}u=\sqrt[3]{2(x-2)}\\ v=\sqrt[4]{4(x+2)}\end{cases}$ suy ra $u\ge 0, v\ge 0$ và $v^4-2u^3=16$

Khi đó phương trình trở thành $u+v=2$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}u+v=2\\ v^4-2u^3=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=2-v\\ v^4-2(2-v)^3=16\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}u=2-v\\ v^4+2v^3-12v^2+24v-32=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=2-v\\ (v-2)\left(v^3+4v^2-4v+16\right)=0\end{cases}\ (*)$

Vì $v^3+4v^2-4v+16=v^3+(2v-1)^2+15>0$ nên hệ phương trình

$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}u=2-v\\ v=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=0\\ v=2\end{cases}$ (thỏa mãn).

Ta có $u=0\Rightarrow\sqrt[3]{2(x-2)}=0\Leftrightarrow x=2$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm là $x=2$

Nhận xét: Khi gặp phương trình có chứa các đại lượng $\sqrt{a+f(x)}$, $f(x)$ và $\sqrt{b-f(x)}$ (hoặc $\sqrt{b+f(x)}$) thì ta đặt $u=\sqrt{a+f(x)}$, $v=\sqrt{b-f(x)}$ (hoặc $v=\sqrt{b-f(x)}$) và đưa về hệ phương trình $\begin{cases}g(u;v)=c\\ u^2+v^2=a+b\end{cases}$ (hoặc $\begin{cases}g(u;v)=c\\ u^2-v^2=a-b\end{cases}$). Giải hệ tìm được u, v từ đó giải phương trình $u=\sqrt{a+f(x)}$ hoặc $v=\sqrt{b\pm f(x)}$ tìm được x.

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau

a) $\sqrt[3]{13+2x}+\sqrt[3]{13-2x}-2\sqrt[3]{169-4x^2}=8$ b) $x+\sqrt[3]{4-x^3}=2+3x\sqrt[3]{4-x^3}$

Lời giải

a) Đặt $\begin{cases}u=\sqrt[3]{13+2x}\\ v=\sqrt[3]{13-2x}\end{cases}\Rightarrow u^3+v^3=26$

Phương trình trở thành $u+v-2uv=8$

Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases}u^3+v^3=26\\ u+v-2uv=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(u+v)^3-3uv(u+v)=26\\ u+v-2uv=8\end{cases}\ (*)$

Đặt $\begin{cases}S=u+v\\ P=uv\end{cases}$, $S^2\ge 4P$, hệ phương trình (*) trở thành $\begin{cases}S^3-3SP=26\\ S-2P=8\end{cases}$

$\begin{cases}2S^3-3S(S-8)=52\\ 2P=S-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2S^3-3S^2+24S-52=0\\ 2P=S-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=2\\ P=-3\end{cases}$

Thay vào ta có $\begin{cases}2=u+v\\-3=uv\end{cases}$, do đó u,v là nghiệm của phương trình

$X^2-2X-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}X=-1\\X=3\end{array}\right.$. Suy ra $\begin{cases}u=-1\\v=3\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}u=3\\v=-1\end{cases}$

Với $\begin{cases}u=-1\\v=3\end{cases}\Rightarrow\sqrt[3]{13+2x}=-1\Leftrightarrow x=-7$

Với $\begin{cases}u=3\\v=-1\end{cases}\Rightarrow\sqrt[3]{13+2x}=3\Leftrightarrow x=7$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=\pm7$.

b) $x+\sqrt[3]{4-x^3}=2+3x\sqrt[3]{4-x^3}$

Đặt $y=\sqrt[3]{4-x^3}\Rightarrow x^3+y^3=4$

Phương trình trở thành $x+y=2+xy$

Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases}x^3+y^3=4\\x+y=2+xy\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)^3-3xy(x+y)=4\\x+y=2+xy\end{cases}$ (*)

Đặt $\begin{cases}S=x+y\\P=xy\end{cases}$, $S^2\geq4P$, hệ phương trình (*) trở thành $\begin{cases}S^3-3SP=4\\S=2+P\end{cases}$

$\begin{cases}S^3-3S(S-2)=4\\P=S-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S^3-3S^2+6S-4=0\\P=S-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=1\\P=-1\end{cases}$

Thay vào ta có $\begin{cases}1=x+y\\-1=xy\end{cases}\Rightarrow x,y$ là nghiệm của phương trình

$$X^2-X-1=0\Leftrightarrow X=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$$

Do đó phương trình có nghiệm là $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 3: Giải các phương trình sau

a) $x^2-x+1=\sqrt{1-8x}$ b) $x^2+3x+3=2\sqrt[3]{\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x\leq\dfrac{1}{8}$

Đặt $\sqrt{1-8x}=1-2y, y\leq\dfrac{1}{2}\Rightarrow1-8x=4y^2-4y+1\Leftrightarrow y^2+2x=y$

Phương trình trở thành $x^2-x+1=1-2y\Leftrightarrow x^2+2y=x$

Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases}y^2+2x=y\\x^2+2y=x\end{cases}$ (*)

$\Rightarrow x^2-y^2+2y-2x=x-y\Leftrightarrow(x-y)(x+y-3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\\x=3-y\end{array}\right.$

Thay vào phương trình đầu của hệ phương trình (*):

Với $x=y$ ta có $y^2+2y=y\Leftrightarrow y^2+y=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=0\Rightarrow x=0\\y=-1\Rightarrow x=-1\end{array}\right.$ (thỏa mãn)

Với $x=3-y$ ta có $y^2+2(3-y)=y\Leftrightarrow y^2-3y+6=0$ (vô nghiệm)

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x=0$ và $x=-1$.

b) ĐKXĐ: $x\neq0$.

Phương trình tương đương với

$x^3+3x^2+3x=2\sqrt[3]{2x+3}\Leftrightarrow(x+1)^3-1=2\sqrt[3]{2(x+1)+1}$

Đặt $y=x+1$ phương trình trở thành $y^3-2=2\sqrt[3]{2y+1}$, đặt

$t=\sqrt[3]{2y+1}\Rightarrow y=\dfrac{t^3-1}{2}$.

Khi đó ta có hệ $\begin{cases}y^3-1=2t & (1)\\t^3-1=2y & (2)\end{cases}$

Lấy (1) trừ (2) ta có: $y^3-t^3=2t-2y$

$\Leftrightarrow(y-t)\left(y^2+yt+t^2\right)+2(y-t)=0$

$\Leftrightarrow(y-t)\left(y^2+yt+t^2+2\right)=0\Leftrightarrow y-t=0$

(Vì $y^2+yt+t^2+2=\left(y+\dfrac{t}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}t^2+2>0$)

Với $t=y$ thay vào (1) ta có $y^3-1=2y\Leftrightarrow y^3-2y-1=0$

$$\Leftrightarrow(y+1)\left(y^2-y-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-1\Rightarrow x=-2\\y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\\y=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm $x=-2;x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};x=-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Nhận xét:

- Phương trình có dạng $ax^2+bx+c=\sqrt{a'x+b'}$ ta đặt

$\sqrt{a'x+b'}=\alpha y+\beta \Rightarrow \alpha^2y^2+2\alpha\beta y-a'x+\beta-b'=0$ và phương trình trở thành $ax^2+bx+c-\alpha y-\beta=0$. Từ đó ta chọn α, β sao cho hệ phương trình $\begin{cases}\alpha^2y^2+2\alpha\beta y-a'x+\beta-b'=0\\ ax^2+bx+c-\alpha y-\beta=0\end{cases}$ là đối xứng. Hoàn toàn tương tự đối với phương trình chứa căn bậc n.

- Khi gặp phương trình có thể đưa về dạng $f^n(x)+b=a\sqrt[n]{af(x)-b}$ ta đưa về hệ đối xứng loại 2 bằng cách đặt $t=f(x), y=\sqrt[n]{af(x)-b}$ ta có hệ $\begin{cases}t^n+b=ay\\ y^n+b=at\end{cases}$

Ví dụ 4: Giải các phương trình sau:

a) $4x^2+5+\sqrt{3x+1}=13x$ b) $10x^2+12x+3=x\sqrt{2x^2+2x+1}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x\ge -\frac{1}{3}$

Phương trình tương đương với $(3-2x)^2+\sqrt{3x+1}=x+4$

Đặt $\begin{cases}u=3-2x\\ \sqrt{3x+1}=v\end{cases}, v\ge 0, u\le \frac{11}{3} \Rightarrow v^2+u=x+4$

Phương trình trở thành $u^2+v=x+4$ (*)

Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases}v^2+u=x+4\\ u^2+v=x+4\end{cases}$

$\Rightarrow (v^2+u)-(u^2+v)=0 \Leftrightarrow (v-u)(u+v-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}v=u\\ v=1-u\end{array}\right.$

Với $v=u$ thay vào (*) ta có $u^2+u=x+4$ hay $(3-2x)^2+3-2x=x+4$

$\Leftrightarrow 4x^2-15x+8=0 \Leftrightarrow x=\frac{15\pm\sqrt{97}}{8}$ (loại $x=\frac{15+\sqrt{97}}{8}$ vì khi đó $v=u<0$)

Với $v=1-u$ thay vào (*) ta có

$u^2+1-u=x+4$ hay $(3-2x)^2+1-(3-2x)=x+4$

$\Leftrightarrow 4x^2-11x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{11\pm\sqrt{73}}{8}$ (loại $x=\frac{11-\sqrt{73}}{8}$ vì $v=1-(3-2x)<0$)

Vậy phương trình có hai nghiệm $x=\frac{15-\sqrt{97}}{8}$ và $x=\frac{11+\sqrt{73}}{8}$.

b) Phương trình tương đương với $(3x+2)^2+x^2-1=x\sqrt{x(3x+2)-x^2+1}$

Đặt $\begin{cases}u=\sqrt{x(3x+2)-x^2+1}\\ v=3x+2\end{cases}, u\ge 0$ suy ra $u^2=xv-x^2+1$

Phương trình trở thành $v^2+x^2-1=xu$.

Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases}u^2=xv-x^2+1\\ v^2+x^2-1=xu\end{cases}$

$\Rightarrow u^2-v^2-x^2+1=xv-x^2+1-xu \Leftrightarrow (u-v)(u+v+x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=v\\ u+v+x=0\end{array}\right.$

Với $u=v$ ta có $v^2=xv-x^2+1$ hay $(3x+2)^2=x(3x+2)-x^2+1$

$\Leftrightarrow 7x^2+10x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=-\frac{3}{7}\end{array}\right.$ (loại $x=-1$ vì khi đó $u=v=-1<0$)

Với $u+v+x=0 \Rightarrow u=-x-v=-4x-2$ ta có $(-4x-2)^2=x(3x+2)-x^2+1$

$\Leftrightarrow 14x^2+14x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{-7\pm\sqrt{7}}{14}$ (loại $x=\frac{-7+\sqrt{7}}{14}$ vì khi đó $u<0$)

Vậy phương trình có hia nghiệm là $x=\frac{-3}{7}$ và $x=\frac{-7-\sqrt{7}}{14}$.

Chú ý: Đây là phương trình bằng sau khi đặt $u=f(x), v=g(x)$ đưa về hệ Phương trình còn ẩn x mà có thể đưa về phương trình tích. Sau khi tìm được nghiệm cần tìm u, v để kiểm tra xem có thỏa mãn điều kiện ẩn phụ hay không.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 3.64: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt[3]{(3x+1)^2}+\sqrt[3]{(3x-1)^2}+\sqrt[3]{9x^2-1}=1$ b) $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{17-x}=3$

Hướng dẫn giải

a) Đặt: $u=\sqrt[3]{3x+1}$ và $v=\sqrt[3]{3x-1}$

(6) trở thành: $\begin{cases}u^2+v^2+u.v=1\\ u^3-v^3=2\end{cases} \Rightarrow u-v=2 \Rightarrow u=v+2$

Do đó: $(v+2)^2+v^2+v(v+2)=1$

$\Leftrightarrow 3v^2+6v+3=0 \Leftrightarrow 3(v+1)^2=0 \Leftrightarrow v=-1 \Rightarrow u=1$

Vậy ta có: $\begin{cases}u=\sqrt[3]{3x+1}=1\\ v=\sqrt[3]{3x-1}=-1\end{cases} \Rightarrow x=0.$

b) ĐKXĐ: $0\le x\le 2$.

Đặt $a=\sqrt[4]{x}; b=\sqrt[4]{17-x}; a,b\ge 0$. Ta có hệ phương trình

$\begin{cases} a+b=3 \\ a^4+b^4=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ [(a+b)^2-2ab]^2-2a^2b^2=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ a^2b^2-18ab+32=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ ab=2 \text{ V } ab=16 \end{cases}$.

- Với $\begin{cases} a+b=3 \\ ab=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \text{ V } \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=16 \end{cases}$.
- Với $\begin{cases} a+b=2 \\ ab=16 \end{cases} \Rightarrow$ hệ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có hai ngiệm $x=1; x=16$.

Bài 3.65: Giải các phương trình sau:

a) $2x^2+4x=\sqrt{\dfrac{x+3}{2}}$ b) $4x^2+7x+1=2\sqrt{x+2}$

Hướng dẫn giải

a) ĐKXĐ: $x \ge -3$.

Phương trình $\Leftrightarrow 2(x+1)^2-2=\sqrt{\dfrac{(x+1)+2}{2}} \Leftrightarrow (x+1)^2-1=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x+1}{2}+1}$.

Đặt $t=x+1; y=\sqrt{\dfrac{x+1}{2}+1}=\sqrt{\dfrac{t}{2}+1} \Rightarrow y^2-1=\dfrac{t}{2}$, ta có hệ phương trình:

$\begin{cases} t^2-1=\dfrac{1}{2}y \\ y^2-1=\dfrac{1}{2}t \end{cases} \Rightarrow (t-y)\left(t+y+\dfrac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=y \\ y=-t-\dfrac{1}{2} \end{cases}$

* $t=y \Leftrightarrow t^2-1=\dfrac{t}{2} \Leftrightarrow 2t^2-t-2=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{4} \Leftrightarrow x=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$ (thỏa đk $x \ge -3$)

* $y=-t-\dfrac{1}{2} \Rightarrow (t+\dfrac{1}{2})^2-1=\dfrac{t}{2} \Leftrightarrow 4t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{4} \Leftrightarrow x=\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{4}$

(thỏa đk $x \ge -3$).

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm: $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{4}; x=\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{4}$.

b) ĐKXĐ: $x \ge 2$

Phương trình $\Leftrightarrow (2x+1)^2+3x=2\sqrt{2(2x+1)-3x}$

Đặt $t=2x+1; y=\sqrt{2t-3x} \Rightarrow y^2+3x=2t \Rightarrow$ ta có hệ phương trình

$\begin{cases} t^2+3x=2y \\ y^2+3x=2t \end{cases} \Rightarrow (t-y)(t+y+2)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y=t \\ y=-t-2 \end{cases}$.

* $y=t \Leftrightarrow t^2-2t+3x=0 \Leftrightarrow 4x^2+3x-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=\dfrac{1}{4} \end{cases}$.

* $y=-t-2 \Rightarrow t^2+3x+2(t+2)=0 \Leftrightarrow 4x^2+11x+7=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-\dfrac{7}{4} \end{cases}$.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm: $x=-1; x=-\dfrac{7}{4}; x=\dfrac{1}{4}$.

Cách khác : pt $\Leftrightarrow 4x^2+8x+4=\left(\sqrt{x+2}+1\right)^2$

Bài 3.66: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2-x^2}=(2-\sqrt{x})^2$ b) $\sqrt[3]{2-x^2}=\sqrt{2-x^3}$.

Hướng dẫn giải

a) ĐK: $0 \le x \le \sqrt{2}$.

Đặt $a=\sqrt{x}; b=2-\sqrt{x}$, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a+b=2 \\ a^4+b^4=2 \end{cases}$ (I)

(I) $\Leftrightarrow a=b=1 \Leftrightarrow x=1$ là nghiệm của phương trình đã cho.

b) ĐKXĐ: $x \le \sqrt[3]{2}$

Đặt $a=\sqrt[3]{2-x^2}, a \ge 0 \Rightarrow a^3=2-x^2 \Leftrightarrow a^3+x^2=2$

Mặt khác từ phương trình ban đầu $\Rightarrow a=\sqrt{2-x^3} \Leftrightarrow x^3+a^2=2$

Vậy ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a^3+x^2=2 \\ x^3+a^2=2 \end{cases}$ trừ hai phương trình của hệ ta được

$a^3-x^3-(a^2-x^2)=0 \Leftrightarrow (a-x)(a^2+ax+x^2-a-x)=0$ (*)

Ta có: $a^2+ax+x^2-a-x=a^2+(a+x)(x-1)$

* Với $x \ge 1 \Rightarrow a+x>0 \Rightarrow (a+x)(x-1) \ge 0 \Rightarrow a^2+(a+x)(x-1)>0$

* Với $0 \le x<1 \Rightarrow a \ge 1 \Rightarrow a^2+ax+x^2-a-x=a(a-1)+ax+x(a-1)>0$

* Với $x<0 \Rightarrow a+x<0 \Rightarrow (a+x)(x-1)>0 \Rightarrow a^2+(a+x)(x-1)>0$

$\Rightarrow a^2+ax+x^2-a-x>0 \ \forall x$

Do đo (*) $\Leftrightarrow a=x$ thay vào hệ ta được: $\sqrt{2-x^3}=x \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le \sqrt[3]{2} \\ x^3+x^2-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài 3.67: Giải phương trình: $(4x^3-x+3)^3-x^3=\dfrac{3}{2}$ (1)

Hướng dẫn giải

Đặt $y = 4x^3 - x + 3$. (1) có dạng: $\begin{cases} 2y^3 - 2x^3 = 3 \\ 4x^3 - x + 3 = y \end{cases}$ (I)

(I) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2y^3 - 2x^3 = 3 \\ 2x^3 + 2y^3 - (x+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^3 - 2x^3 = 3 (2) \\ (x+y)(2x^2 - 2xy + 2y^2 - 1) = 0 (3) \end{cases}$

TH1: $y = -x$ kết hợp(2), có nghiệm của (1): $x = -\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$

TH2: $2x^2 - 2xy + 2y^2 - 1 = 0; \Delta'_x = 2 - 3y^2$.

Nếu có nghiệm thì $|y| \le \sqrt{\frac{2}{3}}$. Tương tự cũng có $|x| \le \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Khi đó VT (2) $\le 4\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3 = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} < 3$. Chứng tỏ TH2 vô nghiệm.

KL (1) có 1 nghiệm $x = -\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$.

Bài 3.68: Giải phương trình: $x^2 - 3x + 4 = x\sqrt[3]{x^3 - x^2 - x - 1}$

Hướng dẫn giải

Dễ thấy $x = 0$ không là nghiệm của phương trình.

Xét $x \neq 0$ phương trình tương đương với $(x-1)^3 + x + 1 = x^2\sqrt[3]{x^2(x-1) - x - 1}$

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt[3]{x^2(x-1) - x - 1} \\ v = x - 1 \end{cases} \Rightarrow u^3 + x + 1 = x^2 v$

Phương trình trở thành $v^3 + x + 1 = x^2 v$

Vậy ta có hệ phương trình $\begin{cases} u^3 + x + 1 = x^2 v \\ v^3 + x + 1 = x^2 v \end{cases}$

$\Rightarrow u^3 - v^3 = x^2(v-u) \Leftrightarrow (u-v)\left(u^2 + uv + v^2 + x^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v \\ u^2 + uv + v^2 + x^2 = 0 \end{array}\right.$

Với $u = v$ ta có $(x-1)^3 + x + 1 = x^2(x-1) \Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$ (loại $x = 0$)

Với $u^2 + uv + v^2 + x^2 = 0 \Leftrightarrow \left(u + \frac{v}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}v^2 + x^2 = 0 \Leftrightarrow u = v = x = 0$ (loại)

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 2$.

ÔN TẬP CHƯƠNG III

Bài 3.69: Giải các phương trình:

a) $2x - \sqrt{x-8} = \sqrt{8-x} + 16$. b) $3x + \sqrt{x-8} = \sqrt{4-x}$.

Hướng dẫn giải

a) Xét phương trình: $2x - \sqrt{x-8} = \sqrt{8-x} + 16$. (1)

Điều kiện : $\begin{cases} x - 8 \ge 0 \\ 8 - x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 8 \\ x \le 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = 8.$

Thay $x = 8$ ta thấy (1) được thoả. Vậy, nghiệm của phương trình (1) là $x = 8$.

b) Xét phương trình: $3x + \sqrt{x-8} = \sqrt{4-x}$.

Điều kiện: $\begin{cases} x - 8 \ge 0 \\ 4 - x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 8 \\ x \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing.$

Vậy, phương trình (2) vô nghiệm.

Bài 3.70: Giải và biện luận các phương trình:

a) $\left(m^2 + 5\right)x + 3 = 2(x - m)$ b) $m^2(x-1) = 2(2x-3) + m$

c) $\frac{mx - m - 3}{x + 1} = 2$

Hướng dẫn giải

a) PT $\Leftrightarrow (m^2 + 3)x = -2m - 3 \Leftrightarrow x = \frac{-2m-3}{m^2+3}$ (vì $m^2 + 3 \neq 0, \forall m$)

Vậy, nghiệm của (1) là : $x = \frac{-(2m+3)}{m^2+3}$.

b) PT $\Leftrightarrow (m^2 - 4)x = m^2 + m - 6 \Leftrightarrow (m+2)(m-2)x = (m-2)(m+3)$.

+ $(m+2)(m-2) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$. Nghiệm của (2) là: $x = \frac{m+3}{m+2}$.

+ $m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$: (2) trở thành: $0x = -4$: vô nghiệm

+ $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$: (2) trở thành : $0x = 0 : x \in \mathbb{R}$.

Kết luận: $m \neq \pm 2 : x = \frac{m+3}{m+2}$

$m = -2$: phương trình vô nghiệm.

$m = 2 : x \in \mathbb{R}$.

c) Điều kiện: $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$. Với điều kiện đó thì:

PT $\Leftrightarrow mx - m - 3 = 2x + 2 \Leftrightarrow (m-2)x = m + 5$.

+ $m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2 : x = \frac{m+5}{m-2}$.

Để nó là nghiệm của (3) thì: $x \neq -1 \Leftrightarrow \dfrac{m+5}{m-2} \neq -1 \Leftrightarrow m \neq -\dfrac{3}{2}$.

+ $m-2=0 \Leftrightarrow m=2$: (3) $\Leftrightarrow 0x=7$: vô nghiệm.

Vậy: $m \neq 2$ và $m \neq -\dfrac{3}{2}$, thì nghiệm của phương trình là: $x=\dfrac{m+5}{m-2}$

$m=2$ hay $m=-\dfrac{3}{2}$: phương trình vô nghiệm.

Bài 3.71: Giải và biện luận các phương trình :

a) $(m-1)x^2-2x+3=0$ b) $\dfrac{2mx-m^2+m-2}{x^2-1}=1$

Hướng dẫn giải

a) $m=1$: PT trở thành: $-2x+3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$

$m \neq 1$: (1) có: $\Delta' = 1-3(m-1) = -3m+4$.

+ $\Delta' = -3m+4<0 \Leftrightarrow m>\dfrac{4}{3}$: phương trình (1) vô nghiệm.

+ $\Delta' = -3m+4=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{4}{3}$: phương trình (1) có nghiệm kép $x=\dfrac{1}{m-1}=3$.

+ $\Delta' = -3m+4>0 \Leftrightarrow m<\dfrac{4}{3}$: phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt:

$$x=\frac{1\pm\sqrt{-3m+4}}{m-1}.$$

b) Điều kiện: $x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$. Với điều kiện đó, thì:

PT $\Leftrightarrow f(x)=x^2-2mx+m^2-m+1=0$ (*)

Với $x \neq 1$ thì: $f(1)=m^2-3m+2\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ m\neq 2 \end{cases}$.

Với $x \neq -1$ thì: $f(-1)=m^2+m+2\neq 0$: đúng với mọi m.

Khi đó, (*) có biệt thức: $\Delta' = m^2-(m^2-m+1)=m-1$.

- $\begin{cases} m>1 \\ m\neq 2 \end{cases}$ thì $\Delta'>0$, nên (*) có hai nghiệm phân biệt $x=m\pm\sqrt{m-1}$ và đó cũng là hai nghiệm của (2).
- $m=1$ thì: $\Delta'=0$, nên (*) có nghiệm kép $x=m=1$ (không thoả điều kiện), suy ra đã cho vô nghiệm.
- $m=2$, thì (*) trở thành: $x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \text{ (loại)} \\ x=3 \end{array}\right.$

Do đó nghiệm của đã cho là $x=3$.

- $m<1$ thì $\Delta'<0$, nên (*) vô nghiệm, suy ra đã cho vô nghiệm.

Kết luận : $m\leq 1$: đã cho vô nghiệm

$m>1$ và $m\neq 2$: (2) có hai nghiệm phân biệt $x=m\pm\sqrt{m-1}$.

$m=2$: (2) có một nghiệm $x=3$.

Bài 3.72: Cho phương trình $|x-2|+|x-1|+|x|=x+m$

a) Giải phương trình khi $m=-1$

b) Tìm m để phương trình có nghiệm

Hướng dẫn giải

a) Với $m=-1$ phương trình trở thành: $|x-2|+|x-1|+|x|=x-1$.

Vì VT $\geq 0 \Rightarrow x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$. Khi đó ta có:

$|x-2|+x-1+x=x-1 \Leftrightarrow |x-2|+x=0$ phương trình vô nghiệm.

b) Xét hàm số :

$$y=f(x)=|x-2|+|x-1|+|x|-x=\begin{cases} 2x-3 & \text{khi } x\geq 2 \\ 1 & \text{khi } 1\leq x<2 \\ -2x+3 & \text{khi } 0\leq x<1 \\ -4x+3 & \text{khi } x<0 \end{cases}.$$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m\geq 1$.

Bài 3.73: Giải các phương trình sau

a) $2(x+1)^2=(x+5)(1-\sqrt{3+2x})^2$

b) $x^2-2x-3=\sqrt{x+3}$ c) $(x+4)^2-6\sqrt{x^3+3x}=13$

Hướng dẫn giải

a) PT $\Leftrightarrow 2(x+1)^2(1+\sqrt{3+2x})^2=(x+5)(2x+2)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$

b) PT $\Leftrightarrow \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2=\left(\sqrt{x+3}+\dfrac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2} \\ x=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$

c) Chia hai vế cho x rồi đặt $\sqrt{x+\dfrac{3}{x}}=t$

Phương trình có nghiệm là $x=1, x=3, x=8\pm\sqrt{61}$.

Bài 3.74: Tìm m để phương trình $\sqrt{x^2 - 2mx + 1} = m - 2$ có nghiệm.

Hướng dẫn giải

* Nếu $m < 2 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

* Với $m \geq 2 \Rightarrow$ Phương trình

$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + 1 = m^2 - 4m + 4 \Leftrightarrow x^2 - 2mx - m^2 + 4m - 3 = 0$

Phương trình có nghiệm $\Delta' = 2(m-1)^2 + 1 > 0$ đúng mọi m

Vậy $m \geq 2$ là những giá trị cần tìm.

Bài 3.75: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx + y = m + 1 \\ x + my = 2. \end{cases}$

a) Giải và biện luận hệ phương trình.

b) Khi hệ có nghiệm (x ; y), tìm hệ thức giữa x, y độc lập với m.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$;

$D_x = \begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2 + m - 2 = (m-1)(m+2)$; $D_y = \begin{vmatrix} m & m+1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = m - 1.$

- $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$: Hệ có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{m+2}{m+1} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{1}{m+1}. \end{cases}$

- $D = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

\+ Khi $m = 1$ thì: $D_x = D_y = 0$, hệ trở thành: $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 2.$

Hệ đã cho có vô số nghiệm: $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2 - x. \end{cases}$

\+ Khi $m = -1$ thì: $D_x = -2 \neq 0$: Hệ vô nghiệm.

Kết luận :

- $m \neq \pm 1$: Hệ có nghiệm: $\begin{cases} x = \dfrac{m+2}{m+1} \\ y = \dfrac{1}{m+1}. \end{cases}$
- $m = 1$: Hệ có nghiệm: $\begin{cases} x \in R \\ y = 2 - x. \end{cases}$
- $m = -1$: Hệ vô nghiệm.

b) Theo câu a) với $m \neq \pm 1$ thì hệ có nghiệm $\begin{cases} x = \dfrac{m+2}{m+1} & (1) \\ y = \dfrac{1}{m+1} & (2) \end{cases}$

Từ (2) $\Rightarrow m = \dfrac{1-y}{y}$ thay vào (2) $\Rightarrow x = \dfrac{\dfrac{1-y}{y} + 2}{\dfrac{1-y}{y} + 1} = \dfrac{1+y}{1} = 1 + y$

Vậy khi $m \neq \pm 1$ ta có hệ thức liên hệ là $x = 1 + y$

Bài 3.76: Giải các hệ phương trình sau

a) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x^2 - 3xy + y^2 = -5. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = 2x + 9 \\ x^2 + 2xy = 6x + 6 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) PT $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 4 \\ x^2 - 3x(2x-4) + (2x-4)^2 = -5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 4 \\ x^2 + 4x - 21 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3,\ y = 2 \\ x = -7,\ y = -18. \end{array} \right.$

Vậy nghiệm của hệ là (3; 2), (−7; −18).

b) HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + xy)^2 = 2x + 9 & (1) \\ xy = 3x + 3 - \dfrac{x^2}{2} & (2) \end{cases}$

Thay (2) vào (1) ta được: $\left(x^2 + 3x + 3 - \dfrac{x^2}{2} \right)^2 = 2x + 9$

$\Leftrightarrow x^4 + 12x^3 + 48x^2 + 64x = 0 \Leftrightarrow x(x+4)^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -4 \end{array} \right.$

Ta thấy $x = 0$ không thoả cả (1) và (2), nên loại.

Thay $x = -4$ vào (2) ta được $y = \dfrac{17}{4}$

Thay $x = -4$ và $y = \dfrac{17}{4}$ vào (1), ta thấy (1) được thoả.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $\left(-4; \dfrac{17}{4} \right)$.

Bài 3.77: Cho hệ phương trình $\begin{cases} x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}=5 \\ x^3+\frac{1}{x^3}+y^3+\frac{1}{y^3}=15m-10 \end{cases}$

a) Giải hệ phương trình khi $m=2$

b) Tìm m để hệ phương trình trên có nghiệm

Hướng dẫn giải

ĐKXĐ: $x \neq 0, y \neq 0$

Đặt $u = x+\frac{1}{x}$, $v = y+\frac{1}{y}$ với $|u| \geq 2, |v| \geq 2$, hệ trên trở thành:

$$\begin{cases} u+v=5 \\ u^3+v^3-3(u+v)=15m-10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ (u+v)^3-3uv(u+v)-3(u+v)=15m-10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ 125-15uv-15=15m-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ uv=8-m \end{cases}$$

$\Rightarrow$ u, v là nghiệm của phương trình: $t^2-5t+8=m$ (1)

Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm t_1, t_2 với $|t_1| \geq 2$, $|t_2| \geq 2$ (t_1, t_2 không nhất thiết phân biệt).

Xét hàm số $f(t) = t^2-5t+8$ với $|t| \geq 2$.

Từ bảng biến thiên ta có hệ trên có nghiệm khi và chỉ khi:

$\frac{7}{4} \leq m \leq 2$ hoặc $m \geq 22$.

Chương 4 BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

§1. BẤT ĐẲNG THỨC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa.

Cho a, b là hai số thực. Các mệnh đề "$a>b$", "$a<b$", "$a \geq b$", "$a \leq b$" được gọi là những *bất đẳng thức*.

- Chứng minh bất đẳng thức là chứng minh bất đẳng thức đó đúng (mệnh đề đúng)
- Với A, B là mệnh đề chứa biến thì "$A>B$" là mệnh đề chứa biến. Chứng minh bất đẳng thức $A>B$ (với điều kiện nào đó) nghĩa là chứng minh mệnh đề chứa biến "$A>B$" đúng với tất cả các giá trị của biến (thỏa mãn điều kiện đó). Khi nói ta có bất đẳng thức $A>B$ mà không nêu điều kiện đối với các biến thì ta hiểu rằng bất đẳng thức đó xảy ra với mọi giá trị của biến là số thực.

2. Tính chất :

* $a>b$ và $b>c \Rightarrow a>c$
* $a>b \Leftrightarrow a+c>b+c$
* $a>b$ và $c>d \Rightarrow a+c>b+d$
* Nếu $c>0$ thì $a>b \Leftrightarrow ac>bc$

  Nếu $c<0$ thì $a>b \Leftrightarrow ac<bc$
* $a>b\geq 0 \Rightarrow \sqrt{a}>\sqrt{b}$
* $a \geq b \geq 0 \Leftrightarrow a^2 \geq b^2$
* $a>b\geq 0 \Rightarrow a^n>b^n$

3. Bất đẳng thức về giá trị tuyệt đối.

* $-|a| \leq a \leq |a|$ với mọi số thực a .
* $|x|<a \Leftrightarrow -a<x<a$ (Với $a>0$)
* $|x|>a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>a \\ x<-a \end{array}\right.$ (Với $a>0$)

4. Bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân (Bất đẳng thức Cauchy)

a) *Đối với hai số không âm*

Cho $a \geq 0, b \geq 0$, ta có $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $a=b$

Hệ quả:

* Hai số dương có tổng không đổi thì tích lớn nhất khi hai số đó bằng nhau
* Hai số dương có tích không đổi thì tổng nhỏ nhất khi hai số đó bằng nhau

b) Đối với ba số không âm

Cho $a \ge 0, b \ge 0, c \ge 0$, ta có $\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$. Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: *SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍCH CHẤT CƠ BẢN.*

Phương pháp giải.

Để chứng minh bất đẳng thức (BĐT) $A \ge B$ ta có thể sử dụng các cách sau:

- Ta đi chứng minh $A - B \ge 0$. Để chứng minh nó ta thường sử dụng các hằng đẳng thức để phân tích $A - B$ thành tổng hoặc tích của những biểu thức không âm.
- Xuất phát từ BĐT đúng, biến đổi tương đương về BĐT cần chứng minh.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Loại 1: **Biến đổi tương đương về bất đẳng thức đúng.**

Ví dụ 1 : Cho hai số thực a, b, c. Chứng minh rằng các bất đẳng thức sau

a) $3\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge (a+b+c)^2$ b) $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca)$

Lời giải

a) BĐT tương đương $3\left(a^2+b^2+c^2\right) \ge a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0$ (đúng) ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

b) BĐT tương đương $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \ge 3(ab+bc+ca)$

$\Leftrightarrow 2\left(a^2+b^2+c^2\right)-2(ab+bc+ca) \ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0$ (đúng) ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Nhận xét: Các BĐT trên được vận dụng nhiều, và được xem như là "bổ đề" trong chứng minh các bất đẳng thức khác.

Ví dụ 2 : Cho năm số thực a, b, c, d, e. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \ge a(b+c+d+e).$$

Lời giải

Ta có : $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2-a(b+c+d+e) =$

$$= \left(\frac{a^2}{4}-ab+b^2\right)+\left(\frac{a^2}{4}-ac+c^2\right)+\left(\frac{a^2}{4}-ad+d^2\right)+\left(\frac{a^2}{4}-ae+e^2\right)$$

$$= \left(\frac{a}{2}-b\right)^2+\left(\frac{a}{2}-c\right)^2+\left(\frac{a}{2}-d\right)^2+\left(\frac{a}{2}-e\right)^2 \ge 0 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow b = c = d = e = \frac{a}{2}$.

Ví dụ 3 : Cho $ab \ge 1$. Chứng minh rằng : $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1} \ge \frac{2}{1+ab}$.

Lời giải

Ta có $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}-\frac{2}{1+ab} = \left(\frac{1}{a^2+1}-\frac{1}{1+ab}\right)+\left(\frac{1}{b^2+1}-\frac{2}{1+ab}\right)$

$$= \frac{ab-a^2}{(a^2+1)(1+ab)}+\frac{ab-b^2}{(b^2+1)(1+ab)}$$

$$= \frac{a-b}{1+ab}\left(\frac{b}{1+b^2}-\frac{a}{1+a^2}\right) = \frac{a-b}{1+ab}.\frac{b-a+a^2b-b^2a}{(1+b^2)(1+a^2)}$$

$$= \frac{a-b}{1+ab}\frac{(a-b)(ab-1)}{(1+b^2)(1+a^2)} = \frac{(a-b)^2(ab-1)}{(1+ab)(1+b^2)(1+a^2)} \ge 0 \text{ (Do } ab \ge 1).$$

Nhận xét : Nếu $-1 < b \le 1$ thì BĐT có chiều ngược lại : $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1} \le \frac{2}{1+ab}$.

Ví dụ 4: Cho số thực x. Chứng minh rằng

a) $x^4+3 \ge 4x$ b) $x^4+5 > x^2+4x$ c) $x^{12}+x^4+1 > x^9+x$

Lời giải

a) Bất đẳng thức tương đương với $x^4-4x+3 \ge 0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^3+x^2+x-3\right) \ge 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\left(x^2+2x+3\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2\left[(x+1)^2+1\right] \ge 0$ (đúng với mọi số thực x)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

b) Bất đẳng thức tương đương với $x^4-x^2-4x+5 > 0$

$\Leftrightarrow x^4-2x^2+1+x^2-4x+4 > 0 \Leftrightarrow \left(x^2-1\right)^2+(x-2)^2 > 0$

Ta có $\left(x^2-1\right)^2 \ge 0, (x-2)^2 \ge 0 \Rightarrow \left(x^2-1\right)^2+(x-2)^2 \ge 0$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x^2-1=0 \\ x-2=0 \end{cases}$ (không xảy ra)

Suy ra $(x^2-1)^2+(x-2)^2>0$ ĐPCM.

c) Bất đẳng thức tương đương với $x^{12}-x^9+x^4-x+1>0$

+ Với $x<1$: Ta có $x^{12}-x^9+x^4-x+1=x^{12}+x^4(1-x^5)+(1-x)$

Vì $x<1$ nên $1-x>0, 1-x^5>0$ do đó $x^{12}-x^9+x^4-x+1>0$.

+ Với $x\ge 1$: Ta có $x^{12}-x^9+x^4-x+1=x^9(x^3-1)+x(x^3-1)+1$

Vì $x\ge 1$ nên $x^3-1\ge 0$ do đó $x^{12}-x^9+x^4-x+1>0$.

Vậy ta có $x^{12}+x^4+1>x^9+x$.

Ví dụ 5: Cho a,b,c là các số thực. Chứng minh rằng

a) $2(a^4+1)+(b^2+1)^2\ge 2(ab+1)^2$

b) $3(a^2+b^2)-ab+4\ge 2\left(a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1}\right)$

Lời giải

a) BĐT tương đương với $2(a^4+1)+(b^4+2b^2+1)-2(a^2b^2+2ab+1)\ge 0$

$\Leftrightarrow (a^4+b^4-2a^2b^2)+(2a^2-4ab+2b^2)+(a^4-2a^2+1)\ge 0$

$\Leftrightarrow (a^2-b^2)^2+2(a-b)^2+(a^2-1)^2\ge 0$ (đúng)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=\pm 1$.

b) BĐT tương đương với $6(a^2+b^2)-2ab+8-4\left(a\sqrt{b^2+1}+b\sqrt{a^2+1}\right)\ge 0$

$\Leftrightarrow \left[a^2-4a\sqrt{b^2+1}+4(b^2+1)\right]+\left[b^2-4b\sqrt{a^2+1}+4(a^2+1)\right]+(a^2-2ab+b^2)\ge 0$

$\Leftrightarrow \left(a-2\sqrt{b^2+1}\right)^2+\left(b-2\sqrt{a^2+1}\right)^2+(a-b)^2\ge 0$ (đúng)

Đẳng thức không xảy ra.

***Loại 2:* Xuất phát từ một BĐT đúng ta biến đổi đến BĐT cần chứng minh**

Đối với loại này thường cho lời giải không được tự nhiên và ta thường sử dụng khi các biến có những ràng buộc đặc biệt

* Chú ý hai mệnh đề sau thường dùng

$a\in[\alpha;\beta]\Rightarrow (a-\alpha)(a-\beta)\le 0$ (*)

$a,b,c\in[\alpha;\beta]\Rightarrow (a-\alpha)(b-\alpha)(c-\alpha)+(\beta-a)(\beta-b)(\beta-c)\ge 0$ (**)

Ví dụ 6 : Cho a,b,c là độ dài ba cạnh tam giác. Chứng minh rằng :

$a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca)$.

Lời giải

Vì a,b,c là độ dài ba cạnh tam giác nên ta có : $a+b>c\Rightarrow ac+bc>c^2$.

Tương tự $bc+ba>b^2$; $ca+cb>c^2$ cộng ba BĐT này lại với nhau ta có đpcm

Nhận xét : * Ở trong bài toán trên ta đã xuất phát từ BĐT đúng đó là tính chất về độ dài ba cạnh của tam giác. Sau đó vì cần xuất hiện bình phương nên ta nhân hai vế của BĐT với c.

Ngoài ra nếu xuất phát từ BĐT $|a-b|<c$ rồi bình phương hai vế ta cũng có được kết quả.

Ví dụ 7: Cho $a,b,c\in[0;1]$. Chứng minh : $a^2+b^2+c^2\le 1+a^2b+b^2c+c^2a$

Lời giải

Cách 1: Vì $a,b,c\in[0;1]\Rightarrow (1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)\ge 0$

$\Leftrightarrow 1+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-a^2b^2c^2\ge a^2+b^2+c^2$ (*)

Ta có : $a^2b^2c^2\ge 0$; $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\le a^2b+b^2c+c^2a$ nên từ (*) ta suy ra

$a^2+b^2+c^2\le 1+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\le 1+a^2b+b^2c+c^2a$ đpcm.

Cách 2: BĐT cần chứng minh tương đương với

$a^2(1-b)+b^2(1-c)+c^2(1-a)\le 1$

Mà $a,b,c\in[0;1]\Rightarrow a^2\le a, b^2\le b, c^2\le c$ do đó

$a^2(1-b)+b^2(1-c)+c^2(1-a)\le a(1-b)+b(1-c)+c(1-a)$

Ta chỉ cần chứng minh $a(1-b)+b(1-c)+c(1-a)\le 1$

Thật vậy: vì $a,b,c\in[0;1]$ nên theo nhận xét (**) ta có

$abc+(1-a)(1-b)(1-c)\ge 0 \Leftrightarrow a+b+c-(ab+bc+ca)\le 1$

$\Leftrightarrow a(1-b)+b(1-c)+c(1-a)\le 1$

Vậy BĐT ban đầu được chứng minh.

Ví dụ 8: Cho các số thực a,b,c thỏa mãn : $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh:

$2(1+a+b+c+ab+bc+ca)+abc\ge 0$.

Lời giải

Vì $a^2+b^2+c^2=1\Rightarrow a,b,c\in[-1;1]$ nên ta có :

$(1+a)(1+b)(1+c)\ge 0\Leftrightarrow 1+a+b+c+ab+bc+ca+abc\ge 0$ (*)

Mặt khác : $\frac{(1+a+b+c)^2}{2}\ge 0\Leftrightarrow 1+a+b+c+ab+bc+ca\ge 0$ (**)

Cộng (*) và (**) ta có đpcm.

Ví dụ 9: Chứng minh rằng nếu $a \ge 4, b \ge 5, c \ge 6$ và $a^2+b^2+c^2=90$ thì $a+b+c \ge 16$

Lời giải

Từ giả thiết ta suy ra $a<9, b<8, c \le 7$ do đó áp dụng (*) ta có

$(a-4)(a-9) \le 0, (b-5)(b-8) \le 0, (c-6)(c-7) \le 0$ nhân ra và cộng các BĐT cùng chiều lại ta được:

$a^2+b^2+c^2-13(a+b+c)+118 \le 0$ suy ra

$$a+b+c \ge \frac{1}{13}\left(a^2+b^2+c^2+118\right)=16 \text{ vì } a^2+b^2+c^2=90$$

Vậy $a+b+c \ge 16$ dấu "=" xảy ra khi $a=4, b=5, c=7$.

Ví dụ 10: Cho ba số a, b, c thuộc $[-1;1]$ và không đồng thời bằng không. Chứng minh rằng: $\dfrac{a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2+3}{a^{2012}+b^{2012}+c^{2012}} \ge 2$

Lời giải

Vì ba số a, b, c thuộc $[-1;1]$ nên $0 \le a^2, b^2, c^2 \le 1$

Suy ra $(1-b^2)(1+b^2-a^4) \ge 0 \Leftrightarrow a^4+b^4-a^4b^2 \le 1$ (*)

Mặt khác $a^4 \ge a^{2012}, b^4 \ge b^{2012}$ đúng với mọi a, b thuộc $[-1;1]$

Suy ra $a^4+b^4-a^4b^2 \ge a^{2012}+b^{2012}-a^4b^2$ (**)

Từ (*) và (**) ta có $a^{2012}+b^{2012} \le a^4b^2+1$ hay $\dfrac{a^4b^2+c^{2012}+1}{a^{2012}+b^{2012}+c^{2012}} \ge 1$

Tương tự ta có $\dfrac{b^4c^2+a^{2012}+1}{a^{2012}+b^{2012}+c^{2012}} \ge 1$ và $\dfrac{c^4a^2+b^{2012}+1}{a^{2012}+b^{2012}+c^{2012}} \ge 1$

Cộng vế với ta được $\dfrac{a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2+a^{2012}+b^{2012}+c^{2012}+3}{a^{2012}+b^{2012}+c^{2012}} \ge 3$

Hay $\dfrac{a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2+3}{a^{2012}+b^{2012}+c^{2012}} \ge 2$ ĐPCM.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 4.1: Cho a, b, c, d là số dương. Chứng minh rằng

a) $\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{b+c}+\dfrac{c}{c+a}<2$ b) $1<\dfrac{a}{a+b+c}+\dfrac{b}{b+c+d}+\dfrac{c}{c+d+a}+\dfrac{d}{d+a+b}<2$

Hướng dẫn giải

a) Sử dụng câu a), ta được: $\dfrac{a}{a+b}<\dfrac{a+c}{a+b+c}$, $\dfrac{b}{b+c}<\dfrac{b+a}{a+b+c}$, $\dfrac{c}{c+a}<\dfrac{c+b}{a+b+c}$.

Cộng các BĐT vế theo vế, ta được đpcm.

b) Sử dụng tính chất phân số, ta có: $\dfrac{a}{a+b+c+d}<\dfrac{a}{a+b+c}<\dfrac{a}{a+c}$

Tương tự ta có $\dfrac{b}{a+b+c+d}<\dfrac{b}{b+c+d}<\dfrac{b}{b+d}$,

$\dfrac{c}{a+b+c+d}<\dfrac{c}{c+d+a}<\dfrac{c}{a+c}$; $\dfrac{d}{a+b+c+d}<\dfrac{d}{d+a+b}<\dfrac{d}{d+b}$.

Cộng các BĐT vế theo vế ta được đpcm.

Bài 4.2: Chứng minh các bất đẳng thức sau

a) $(ax+by)(bx+ay) \ge (a+b)^2xy$ (với $a,b>0;\ x,y \in R$).

b) $\dfrac{c+a}{\sqrt{c^2+a^2}} \ge \dfrac{c+b}{\sqrt{c^2+b^2}}$. với $a>b>0;\ c>\sqrt{ab}$.

c) $\dfrac{a+b}{2a-b}+\dfrac{c+b}{2c-b} \ge 4$ với $a,b,c>0$ và $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{2}{b}$

Hướng dẫn giải

a) BĐT $\Leftrightarrow abx^2+\left(a^2+b^2\right)xy+aby^2 \ge (a+b)^2xy$

$\Leftrightarrow ab(x-y)^2 \ge 0$ (đúng)

b) Bình phương 2 vế, ta phải chứng minh: $\dfrac{(c+a)^2}{c^2+a^2} \ge \dfrac{(c+b)^2}{c^2+b^2}$

$\Leftrightarrow (a-b)(c^2-ab) \ge 0$. Điều này hiển nhiên đúng do giải thiết.

c) Ta có $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{2}{b} \Rightarrow \dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{a}{2c}, \dfrac{c}{b}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{c}{2a}$

$$\text{BĐT} \Leftrightarrow \frac{\frac{a}{b}+1}{2\frac{a}{b}-1}+\frac{\frac{c}{b}+1}{2\frac{c}{b}-1} \ge 4 \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}+\frac{a}{2c}+1}{1+\frac{a}{c}-1}+\frac{\frac{1}{2}+\frac{c}{2a}+1}{1+\frac{c}{a}-1} \ge 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{3c}{2a}+\frac{1}{2}+\frac{3a}{2c}+\frac{1}{2} \ge 4 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\frac{a^2+c^2}{ac} \ge 3 \Leftrightarrow (a-c)^2 \ge 0 \text{ (đúng).}$$

Bài 4.3: Cho $x \ge y \ge z \ge 0$. Chứng minh rằng:

a) $xy^3+yz^3+zx^3 \ge xz^3+zy^3+yx^3$ b) $\dfrac{x^2y}{z}+\dfrac{y^2z}{x}+\dfrac{z^2x}{y} \ge \dfrac{x^2z}{y}+\dfrac{y^2x}{z}+\dfrac{z^2y}{x}$.

Hướng dẫn giải

a) BĐT $\Leftrightarrow -x^3y+xy^3+x^3z-y^3z-xz^3+yz^3 \le 0$

$\Leftrightarrow (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z) \le 0$ (đúng vì $x \ge y \ge z \ge 0$).

b) BĐT $\Leftrightarrow \dfrac{1}{xyz}(x-y)(y-z)(x-z)(xy+yz+zx) \ge 0$ (đúng vì $x \ge y \ge z \ge 0$).

Bài 4.4: Cho bốn số dương a, b, c, d . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\le\frac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}}.$$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}+\frac{1}{\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}\le\frac{1}{\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+d}}\Leftrightarrow\frac{1}{\frac{a+b}{ab}}+\frac{1}{\frac{c+d}{cd}}\le\frac{1}{\frac{a+b+c+d}{(a+c)(b+d)}}$

$\Leftrightarrow\frac{ab}{a+b}+\frac{cd}{c+d}\le\frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}\Leftrightarrow\frac{ab(c+d)+cd(a+b)}{(a+b)(c+d)}\le\frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}$

$\Leftrightarrow\frac{abc+abd+acd+bcd}{ac+ad+bc+bd}\le\frac{ab+ad+bc+cd}{a+b+c+d}$

$\Leftrightarrow(a+b+c+d)(abc+abd+acd+bcd)\le(ab+ad+bc+cd)(ac+ad+bc+bd)$

$\Leftrightarrow 2abcd\le a^2d^2+b^2c^2\Leftrightarrow a^2d^2-2abcd+b^2c^2\ge 0\Leftrightarrow(ad-bc)^2\ge 0$.

Do bất đẳng thức cuối cùng đúng nên bất đẳng thức cần chứng minh cũng đúng.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $ad=bc$.

Bài 4.5: Cho $a,b,c\in[1;3]$ và thoả mãn điều kiện $a+b+c=6$.

Chứng minh rằng $a^2+b^2+c^2\le 14$

Hướng dẫn giải

Vì $a,b,c\in[1;3]$ do đó ta có

$(a-1)(b-1)(c-1)+(3-a)(3-b)(3-c)\ge 0$

$\Leftrightarrow 2(ab+bc+ca)-8(a+b+c)+26\ge 0$

$\Leftrightarrow(a+b+c)^2-8(a+b+c)+26\ge a^2+b^2+c^2$

Mà $a+b+c=6$ suy ra $a^2+b^2+c^2\le 14$.

DẠNG TOÁN 2: SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY(côsi) ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT.

Phương pháp giải.

Một số chú ý khi sử dụng bất đẳng thức côsi:

* Khi áp dụng bđt côsi thì các số phải là những số không âm
* BĐT côsi thường được áp dụng khi trong BĐT cần chứng minh có tổng và tích
* Điều kiện xảy ra dấu '=' là các số bằng nhau

* Bất đẳng thức côsi còn có hình thức khác thường hay sử dụng

Đối với hai số: $x^2+y^2\ge 2xy$; $x^2+y^2\ge\frac{(x+y)^2}{2}$; $xy\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$.

Đối với ba số: $abc\le\frac{a^3+b^3+c^3}{3}$, $abc\le\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Loại 1: Vận dụng trực tiếp bất đẳng thức côsi

Ví dụ 1: Cho a, b là số dương thỏa mãn $a^2+b^2=2$. Chứng minh rằng

a) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\right)\ge 4$ b) $(a+b)^5\ge 16ab\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2\sqrt{\frac{a}{b}.\frac{b}{a}}=2$, $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\ge 2\sqrt{\frac{a}{b^2}.\frac{b}{a^2}}=\frac{2}{\sqrt{ab}}$

Suy ra $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\right)\ge\frac{4}{\sqrt{ab}}$ (1)

Mặt khác ta có $2=a^2+b^2\ge 2\sqrt{a^2b^2}=2ab\Rightarrow ab\le 1$ (1)

Từ (1) và (2) suy ra $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}\right)\ge 4$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1$.

b) Ta có $(a+b)^5=(a^2+2ab+b^2)(a^3+3ab^2+3a^2b+b^3)$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$a^2+2ab+b^2\ge 2\sqrt{2ab(a^2+b^2)}=4\sqrt{ab}$ và

$(a^3+3ab^2)+(3a^2b+b^3)\ge 2\sqrt{(a^3+3ab^2)(3a^2b+b^3)}=4\sqrt{ab(1+b^2)(a^2+1)}$

Suy ra $(a^2+2ab+b^2)(a^3+3ab^2+3a^2b+b^3)\ge 16ab\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}$

Do đó $(a+b)^5\ge 16ab\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=1$.

Ví dụ 2: Cho a, b, c là số dương. Chứng minh rằng

a) $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)\ge 8$ b) $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)\ge 6abc$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có: $a+\frac{1}{b}\ge 2\sqrt{\frac{a}{b}}$, $b+\frac{1}{c}\ge 2\sqrt{\frac{b}{c}}$, $c+\frac{1}{a}\ge 2\sqrt{\frac{c}{a}}$

Suy ra $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)\ge 8\sqrt{\frac{a}{b}}.\sqrt{\frac{b}{c}}.\sqrt{\frac{c}{a}}=8$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

b) Áp dụng BĐT côsi cho hai số dương ta có

$1+a^2\ge 2\sqrt{a^2}=2a$, tương tự ta có $1+b^2\ge 2b$, $1+c^2\ge 2c$

Suy ra $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)\ge 2\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$

Mặt khác, áp dụng BĐT côsi cho ba số dương ta có

$a^2b+b^2c+c^2a\ge 3\sqrt{a^2b.b^2c.c^2a}=3abc$

Suy ra $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)\ge 6abc$. ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 3: Cho a,b,c,d là số dương. Chứng minh rằng

a) $\frac{a+b+c+d}{4}\ge\sqrt[4]{abcd}$ b) $\left(\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{d^3}+\frac{d}{a^3}\right)(a+b)(b+c)\ge 16$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có

$a+b\ge 2\sqrt{ab}, c+d\ge 2\sqrt{cd}$ và $\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\ge 2\sqrt{\sqrt{ab}.\sqrt{cd}}=2\sqrt[4]{abcd}$

Suy ra $\frac{a+b+c+d}{4}\ge\frac{2\sqrt{ab}+2\sqrt{cd}}{4}\ge\sqrt[4]{abcd}$ ĐPCM.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d$.

b) Áp dụng câu a) ta có

$\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{d^3}+\frac{d}{a^3}\ge 4\sqrt[4]{\frac{a}{b^3}.\frac{b}{c^3}.\frac{c}{d^3}.\frac{d}{a^3}}=\frac{4}{\sqrt{abcd}}$

Suy ra $\left(\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{d^3}+\frac{d}{a^3}\right)(a+b)(c+d)\ge\frac{4}{\sqrt{abcd}}.2\sqrt{ab}.2\sqrt{cd}=16$ ĐPCM

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d$.

Ví dụ 4: Cho a,b,c là số dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$.

Chứng minh rằng

a) $a^2b+b^2c+c^2a\le 3$ b) $\frac{ab}{3+c^2}+\frac{bc}{3+a^2}+\frac{ca}{3+b^2}\le\frac{3}{4}$

Lời giải

a) Ta có $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2=9\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2b^2=9$ (1)

Áp dụng BĐT côsi ta có $a^4+b^4\ge 2a^2b^2$, $b^4+c^4\ge 2b^2c^2$, $c^4+a^4\ge 2c^2a^2$

Cộng vế với vế lại ta được $a^4+b^4+c^4\ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\le 3$ (3)

Áp dụng BĐT côsi ta có: $a^2+a^2b^2\ge 2\sqrt{a^2.a^2b^2}=2a^2b$

Tương tự ta có: $b^2+b^2c^2\ge 2b^2c$, $c^2+c^2a^2\ge 2c^2a$

Cộng vế với vế ta được

$a^2+b^2+c^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge 2\left(a^2b+b^2c+c^2a\right)$ (4)

Từ giả thiết và (3), (4) suy ra $a^2b+b^2c+c^2a\le 3$ ĐPCM

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

b) Áp dụng BĐT côsi ta có

$3+a^2=3+\left(3-b^2-c^2\right)=\left(3-b^2\right)+\left(3-c^2\right)\ge 2\sqrt{\left(3-b^2\right)\left(3-c^2\right)}$

$\Rightarrow\frac{bc}{3+a^2}\le\frac{bc}{2\sqrt{\left(3-b^2\right)\left(3-c^2\right)}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2}{3-c^2}.\frac{c^2}{3-b^2}}$

$\le\frac{1}{4}\left(\frac{b^2}{3-c^2}+\frac{c^2}{3-b^2}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{b^2}{b^2+a^2}+\frac{c^2}{c^2+a^2}\right)$

Tương tự ta có

$\frac{ab}{3+c^2}\le\frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{a^2+c^2}+\frac{b^2}{b^2+c^2}\right)$, $\frac{ca}{3+b^2}\le\frac{1}{4}\left(\frac{c^2}{c^2+b^2}+\frac{a^2}{a^2+b^2}\right)$

Cộng vế với vế ta được $\frac{ab}{3+c^2}+\frac{bc}{3+a^2}+\frac{ca}{3+b^2}\le\frac{3}{4}$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Loại 2: Kĩ thuật tách, thêm bớt, ghép cặp.

- Để chứng minh BĐT ta thường phải biến đổi (nhân chia, thêm, bớt một biểu thức) để tạo biểu thức có thể giản ước được sau khi áp dụng BĐT côsi.
- Khi gặp BĐT có dạng $x+y+z\ge a+b+c$ (hoặc $xyz\ge abc$), ta thường đi chứng minh $x+y\ge 2a$ (hoặc $ab\le x^2$), xây dựng các BĐT tương tự rồi cộng(hoặc nhân) vế với vế ta suy ra điều phải chứng minh.
- Khi tách và áp dụng BĐT côsi ta dựa vào việc đảm bảo dấu bằng xảy ra(thường dấu bằng xảy ra khi các biến bằng nhau hoặc tại biên).

Ví dụ 5: Cho a,b,c là số dương. Chứng minh rằng:

a) $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\ge a+b+c$ b) $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\ge 2\sqrt{\frac{ab}{c}.\frac{bc}{a}}=2b$

Tương tự ta có $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\ge 2c$, $\frac{ac}{b}+\frac{ba}{c}\ge 2a$.

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$2\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\right)\ge 2(a+b+c)\Leftrightarrow\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\ge a+b+c$ ĐPCM

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

b) Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{a}{b^2}+\frac{1}{a}\ge 2\sqrt{\frac{a}{b^2}.\frac{1}{a}}=\frac{2}{b}$

Tương tự ta có $\frac{b}{c^2}+\frac{1}{b}\ge\frac{2}{c}$, $\frac{c}{a^2}+\frac{1}{c}\ge\frac{2}{a}$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}\Leftrightarrow\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Ví dụ 6: Cho a,b,c dương sao cho $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

a) $\frac{a^3b^3}{c}+\frac{b^3c^3}{a}+\frac{c^3a^3}{b}\ge 3abc$ b) $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\ge 3$.

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{a^3b^3}{c}+\frac{b^3c^3}{a}\ge 2\sqrt{\frac{a^3b^3}{c}.\frac{b^3c^3}{a}}=2b^3ac$

Tương tự ta có $\frac{b^3c^3}{a}+\frac{c^3a^3}{b}\ge 2abc^3$, $\frac{c^3a^3}{b}+\frac{a^3b^3}{c}\ge 2a^3bc$

Cộng vế với vế ta có $2\left(\frac{a^3b^3}{c}+\frac{b^3c^3}{a}+\frac{c^3a^3}{b}\right)\ge 2abc\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$\Leftrightarrow\frac{a^3b^3}{c}+\frac{b^3c^3}{a}+\frac{c^3a^3}{b}\ge 3abc$. ĐPCM

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

b) BĐT tương đương với $\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)^2\ge 9$

$\Leftrightarrow\left(\frac{ab}{c}\right)^2+\left(\frac{bc}{a}\right)^2+\left(\frac{ca}{b}\right)^2+2\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge 9\Leftrightarrow\left(\frac{ab}{c}\right)^2+\left(\frac{bc}{a}\right)^2+\left(\frac{ca}{b}\right)^2\ge 3$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\left(\frac{ab}{c}\right)^2+\left(\frac{bc}{a}\right)^2\ge 2\sqrt{\left(\frac{ab}{c}\right)^2.\left(\frac{bc}{a}\right)^2}=2b^2$

Tương tự ta có $\left(\frac{bc}{a}\right)^2+\left(\frac{ca}{b}\right)^2\ge 2c^2$, $\left(\frac{ca}{b}\right)^2+\left(\frac{ab}{c}\right)^2\ge 2a^2$

Cộng vế với vế và rút gọn ta được $\left(\frac{ab}{c}\right)^2+\left(\frac{bc}{a}\right)^2+\left(\frac{ca}{b}\right)^2\ge 3$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Ví dụ 7: Cho a,b,c là số dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

a) $8(a+b)(b+c)(c+a)\le(3+a)(3+b)(3+c)$

b) $(3-2a)(3-2b)(3-2c)\le abc$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có

$(a+b)(b+c)\le\left(\frac{(a+b)+(b+c)}{2}\right)^2=\frac{(3+a)^2}{4}$

Tương tự ta có $(b+c)(c+a)\le\frac{(3+c)^2}{4}$, $(c+a)(a+b)\le\frac{(3+a)^2}{4}$

Nhân vế với vế lại ta được

$\left[(a+b)(b+c)(c+a)\right]^2\le\frac{\left[(3+a)(3+b)(3+c)\right]^2}{64}$

Suy ra $8(a+b)(b+c)(c+a)\le(3+a)(3+b)(3+c)$ ĐPCM

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

b)* TH1: Với $(3-2a)(3-2b)(3-2c)\le 0$: BĐT hiển nhiên đúng.

* TH2: Với $(3-2a)(3-2b)(3-2c)>0$:

+ Nếu cả ba số $(3-2a),(3-2b),(3-2c)$ đều dương.

Áp dụng BĐT côsi ta có: $(3-2a)(3-2b)\le\left(\frac{(3-2a)+(3-2b)}{2}\right)^2=c^2$

Tương tự ta có: $(3-2b)(3-2c)\le a^2$, $(3-2c)(3-2a)\le b^2$

Nhân vế với vế ta được $\left[(3-2a)(3-2b)(3-2c)\right]^2 \le a^2b^2c^2$

Hay $(3-2a)(3-2b)(3-2c) \le abc$.

+ Nếu hai trong ba số $(3-2a), (3-2b), (3-2c)$ âm và một số dương. Không mất tính tổng quát giả sử $3-2a<0, 3-2b<0$

Suy ra có $6-2a-2b<0 \Leftrightarrow c<0$ (không xảy ra)

Vậy BĐT được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Ví dụ 8: Cho a,b,c là số dương.

Chứng minh rằng $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \ge \frac{a+b+c}{2}$.

Lời giải

Áp dụng BĐT Côsi cho hai số thực dương ta có :

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b+c}{4} \ge 2\sqrt{\frac{a^2}{b+c}.\frac{b+c}{4}} = a.$$

Tương tự ta có $\frac{b^2}{c+a}+\frac{c+a}{4} \ge b$; $\frac{c^2}{a+b}+\frac{a+b}{4} \ge c$.

Cộng ba BĐT này lại với nhau ta được :

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}+\frac{a+b+c}{2} \ge a+b+c$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \ge \frac{a+b+c}{2}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Lưu ý :Việc ta ghép $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b+c}{4}$ và đánh giá như trên là vì những lí do sau:

Thứ nhất là ta cần làm mất mẫu số ở các đại lượng vế trái (vì vế phải không có phân số), chẳng hạn đại lượng $\frac{a^2}{b+c}$ khi đó ta sẽ áp dụng BĐT côsi cho đại lượng đó với một đại lượng chứa $b+c$.

Thứ hai là ta cần lưu ý tới điều kiện xảy ra đẳng thức ở BĐT côsi là khi hai số đó bằng nhau. Ta dự đoán dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$ khi đó $\frac{a^2}{b+c}=\frac{a}{2}$ và $b+c=2a$ do đó ta ghép như trên.

Ví dụ 9: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

a) $f(x)=\frac{(x-1)^2}{x-2}$ với $x>2$ b) $g(x)=2x+\frac{1}{(x+1)^2}$ với $x>-1$

Lời giải

a) Ta có $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x-2}=x-2+\frac{1}{x-2}+2$

Do $x>2$ nên $x-2>0, \frac{1}{x-2}>0$.

Áp dụng BĐT côsi ta có: $x-2+\frac{1}{x-2} \ge 2\sqrt{(x-2).\frac{1}{x-2}}=2$

Suy ra $f(x) \ge 4$

Đẳng thức xảy ra

$\Leftrightarrow x-2=\frac{1}{x-2} \Leftrightarrow (x-2)^2=1 \Leftrightarrow x=1$ (loại) hoặc $x=3$ (thỏa mãn)

Vậy $\min f(x)=4$ khi và chỉ khi $x=3$.

b) Do $x>-1$ nên $x+1>0$. Áp dụng BĐT côsi ta có

$$g(x)=(x+1)+(x+1)+\frac{1}{(x+1)^2}-2 \ge 3\sqrt[3]{(x+1).(x+1).\frac{1}{(x+1)^2}}-2=1$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x+1=\frac{1}{(x+1)^2} \Leftrightarrow (x+1)^3=1 \Leftrightarrow x=0$ (thỏa mãn)

Vậy $\min g(x)=1$ khi và chỉ khi $x=0$.

Loại 3: Kĩ thuật tham số hóa

Nhiều khi không dự đoán được dấu bằng xảy ra(để tách ghép cho hợp lí) chúng ta cần đưa tham số vào rồi chọn sau sao cho dấu bằng xảy ra.

Ví dụ 10: Cho a,b,c là số dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của $A=(1+2a)(1+2bc)$

Phân tích

Rõ ràng ta sẽ đánh giá biểu thức A để làm xuất hiện $a^2+b^2+c^2$.

Trước tiên ta sẽ đánh giá a qua a^2 bởi $a^2+m^2 \ge 2ma \Rightarrow 2a \le \frac{a^2}{m}+m$ (với $m>0$)

Do b,c bình đẳng nên dự đoán dấu bằng A đạt giá trị nhỏ nhất khi $b=c$ nên ta đánh giá $2bc \le b^2+c^2$.

Suy ra $A \le \left(\frac{a^2}{m}+m+1\right)\left(1+b^2+c^2\right)=B$.

Tiếp tục ta sẽ sử dụng BĐT côsi dưới dạng $xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ để làm xuất hiện $a^2+b^2+c^2$ nên ta sẽ tách như sau

$$B=\frac{1}{m}\left(a^2+m^2+m\right)\left(1+b^2+c^2\right)\le\frac{1}{m}\left(\frac{\left(a^2+m^2+m\right)+\left(1+b^2+c^2\right)}{2}\right)^2$$

Suy ra $A\le\frac{1}{4m}\left(m^2+m+2\right)^2$

Dấu bằng xảy ra khi: $a=m,\ b=c, a^2+m^2+m=1+b^2+c^2$ và $a^2+b^2+c^2=1$.

Từ đây ta có $m=\frac{2}{3}$. Do đó ta có lời giải như sau:

Lời giải

Áp dụng BĐT côsi ta có $a^2+\frac{4}{9}\ge\frac{4}{3}a\Rightarrow 2a\le\frac{3a^2}{2}+\frac{2}{3}$ và $2bc\le b^2+c^2$

Suy ra $A\le\left(\frac{3a^2}{2}+\frac{2}{3}+1\right)\left(b^2+c^2+1\right)$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\left(\frac{3a^2}{2}+\frac{2}{3}+1\right)\left(b^2+c^2+1\right)=\frac{3}{2}\left(a^2+\frac{10}{9}\right)\left(b^2+c^2+1\right)\le\frac{3}{2}\left(\frac{a^2+\frac{10}{9}+b^2+c^2+1}{2}\right)^2=\frac{98}{27}$$

Suy ra $A\le\frac{98}{27}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases}a=\frac{2}{3}\\ b=c\\ a^2+\frac{10}{9}=b^2+c^2+1\\ a^2+b^2+c^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{2}{3}\\ b=c=\sqrt{\frac{5}{18}}\end{cases}$$

Vậy $\max A=\frac{98}{27}$ khi và chỉ khi $a=\frac{2}{3}$ và $b=c=\sqrt{\frac{5}{18}}$.

Ví dụ 11: Cho a,b,c là số dương thỏa mãn $2a+4b+3c^2=68$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của $A=a^2+b^2+c^3$.

Phân tích

Ta cần đánh giá biểu thức A qua biểu thức $2a+4b+3c^2$. Do đó ta sẽ cho thêm vào các tham số vào và đánh giá như sau (m,n,p dương)

$$a^2+m^2\ge 2am,\ b^2+n^2\ge 2bn \text{ và } \frac{c^3}{2}+\frac{c^3}{2}+4p^3\ge 3pc^2$$

Suy ra $a^2+b^2+c^3+m^2+n^2+4p^3\ge 2am+2bn+3pc^2$ (*)

Để $2am+2bn+3pc^2$ có thể là bội số của $2a+4b+3c^2$ thì

$$\frac{2m}{2}=\frac{2n}{4}=\frac{3p}{3}\Leftrightarrow m=\frac{n}{2}=p$$

Mặt khác dấu bằng ở BĐT (*) xảy ra khi $a=m,b=n,c=2p$

Hay $a=m,b=2m,c=2m\Rightarrow 2m+4.(2m)+3(2m)^2=68$

$\Leftrightarrow 12m^2+10m-68=0\Leftrightarrow m=2$ (nhận) hoặc $m=-\frac{17}{6}$ (loại)

Suy ra $p=2,n=4$ do đó ta có lời giải như sau

Lời giải

Áp dụng bĐT côsi ta có: $a^2+4\ge 4a$, $b^2+16\ge 8b$ và $\frac{c^3}{2}+\frac{c^3}{2}+32\ge 6c^2$

Cộng vế với vế ta được:

$a^2+b^2+c^3+52\ge 4a+8b+6c^2$, kết hợp với $2a+4b+3c^2=68$

Suy ra $a^2+b^2+c^3\ge 84$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=2,b=4,c=4$

Vậy $\min A=84\Leftrightarrow a=2,b=4,c=4$.

Loại 4: Kĩ thuật côsi ngược dấu.

Ví dụ 12: Cho a,b,c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của

$$P=\frac{\sqrt{bc}}{a+2\sqrt{bc}}+\frac{\sqrt{ca}}{b+2\sqrt{ca}}+\frac{\sqrt{ab}}{c+2\sqrt{ab}}.$$

Lời giải

Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{\sqrt{bc}}{a+2\sqrt{bc}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{a+2\sqrt{bc}}\right)\le\frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{a+b+c}\right)$

Tương tự ta có $\frac{\sqrt{ca}}{b+2\sqrt{ca}}\le\frac{1}{2}\left(1-\frac{b}{a+b+c}\right)$, $\frac{\sqrt{ab}}{c+2\sqrt{ab}}\le\frac{1}{2}\left(1-\frac{c}{a+b+c}\right)$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$$P\le\frac{1}{2}\left(3-\frac{a}{a+b+c}-\frac{b}{a+b+c}-\frac{c}{a+b+c}\right)=1$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Vậy $\min P=1\Leftrightarrow a=b=c$.

Ví dụ 13: Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

a) $\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge\frac{3}{2}$.

b) $\frac{a^2}{a+2b^3}+\frac{b^2}{b+2c^3}+\frac{c^2}{c+2a^3}\ge 1$

Lời giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có:

$$\frac{a}{1+b^2}=\frac{a\left(1+b^2-b^2\right)}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}\ge a-\frac{ab^2}{2b}=a-\frac{ab}{2}$$

Tương tự ta có $\frac{b}{1+c^2}\ge b-\frac{bc}{2}$ và $\frac{c}{1+a^2}\ge c-\frac{ca}{2}$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta được:

$$\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge a+b+c-\frac{ab+bc+ca}{2}=3-\frac{ab+bc+ca}{2}$$

Mặt khác ta có $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)\Rightarrow ab+bc+ca\le 3$.

Do đó $\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge 3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

b) Theo bất đẳng thức Côsi ta có :

$$\frac{a^2}{a+2b^3}=\frac{a\left(a+2b^3\right)-2ab^3}{a+2b^3}\ge a-\frac{2ab^3}{3\sqrt[3]{ab^6}}=a-\frac{2b\sqrt[3]{a^2}}{3}.$$

Tương tự ta có $\frac{b^2}{b+2c^3}\ge b-\frac{2c\sqrt[3]{b}}{3}$, $\frac{c^2}{c+2a^3}\ge c-\frac{2a\sqrt[3]{c}}{3}$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta được:

$$\frac{a^2}{a+2b^3}+\frac{b^2}{b+2c^3}+\frac{c^2}{c+2a^3}\ge a+b+c-\frac{2}{3}\left(b\sqrt[3]{a^2}+a\sqrt[3]{c^2}+c\sqrt[3]{b^2}\right)$$

Mặt khác $a+b+c=3$ do đó ta chỉ cần chứng minh:

$b\sqrt[3]{a^2}+c\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{c^2}\le 3$.

Thật vậy, theo bất đẳng thức Côsi ta có :

$$b\sqrt[3]{a^2}\le\frac{1}{3}b.(a+a+1)=\frac{2ab+b}{3}$$

Tương tự ta có $c\sqrt[3]{b^2}\le\frac{2bc+c}{3}$, $a\sqrt[3]{c^2}\le\frac{2ca+a}{3}$

Cộng vế theo vế các BĐT trên ta có:

$$b\sqrt[3]{a^2}+c\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{c^2}\le\frac{2ab+b}{3}+\frac{2bc+c}{3}+\frac{2ca+a}{3}=\frac{2}{3}(ab+bc+ca)+\frac{1}{3}(a+b+c)$$

Từ đó suy ra: $b\sqrt[3]{a^2}+c\sqrt[3]{b^2}+a\sqrt[3]{c^2}\le\frac{2}{3}.3+\frac{1}{3}.3=3$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 4.6: Cho x, y, z dương.

Chứng minh rằng $\frac{2\sqrt{x}}{x^3+y^2}+\frac{2\sqrt{y}}{y^3+z^2}+\frac{2\sqrt{z}}{z^3+x^2}\le\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT Côsi cho hai số thực dương ta có:

$$x^3+y^2\ge 2xy\sqrt{x}\Rightarrow\frac{2\sqrt{x}}{x^3+y^2}\le\frac{2\sqrt{x}}{2xy\sqrt{x}}=\frac{1}{xy}.$$

Tương tự: $\frac{2\sqrt{y}}{y^3+z^2}\le\frac{1}{yz}$; $\frac{2\sqrt{z}}{z^3+x^2}\le\frac{1}{zx}\Rightarrow VT\le\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}$.

Mặt khác: $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca\Rightarrow\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\le\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}$

Vậy : $VT\le\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\Rightarrow$ đpcm. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Bài 4.7: Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xyz=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}+\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}+\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx}\ge 3\sqrt{3}$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT Cô-si, ta có: $1+x^3+y^3\ge 3xy\Rightarrow\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}\ge\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}}$

Chứng minh tương tự, ta được: $\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}\ge\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}}$, $\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx}\ge\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}}$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên, ta được:

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}+\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}+\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx}\ge\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}\right)\quad(1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có: $\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}\ge\frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}=3\quad(2)$

Từ (1) và (2), ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$.

Bài 4.8: Với các số dương a, b, c, d sao cho: $\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}+\frac{d}{1+d}=1$

Chứng minh rằng: $abcd\le\frac{1}{81}$

Hướng dẫn giải

$$\frac{1}{1+a}=1-\frac{a}{1+a}=\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}+\frac{d}{1+d}\ge 3\sqrt[3]{\frac{bcd}{(1+b)(1+c)(1+d)}}$$

Xây dựng các BĐT tương tự rồi nhân vế với vế ta được $abcd\le\frac{1}{81}$

Bài 4.9: Với các số dương a, b, c sao cho: $\frac{a}{1+b}+\frac{b}{1+c}+\frac{c}{1+a}=1$

Chứng minh rằng: $\left(\frac{1+b}{a}-1\right)\left(\frac{1+c}{b}-1\right)\left(\frac{1+a}{c}-1\right)\ge 8$

Hướng dẫn giải

$$1-\frac{a}{1+b}=\frac{1+b-a}{1+b}=\frac{b}{1+c}+\frac{c}{1+a}\ge 2\sqrt{\frac{bc}{(1+c)(1+a)}}$$

Chứng minh tương tự, ta thu được:

$$(1+b-a)(1+c-b)(1+a-c)\ge 8abc\Leftrightarrow\left(\frac{1+b}{a}-1\right)\left(\frac{1+c}{b}-a\right)\left(\frac{1+a}{c}-1\right)\ge 8$$

Bài 4.10: Cho ba số dương x,y,z thoả mãn hệ thức $xyz(x+y+z)=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(x+y)(x+z)$.

Hướng dẫn giải

Ta có $1=xyz(x+y+z)=yz\left(x^2+xy+xz\right)$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$P=(x+y)(x+z)=yz+\left(x^2+xy+zx\right)\ge 2\sqrt{yz.\left(x^2+xy+zx\right)}=2$$

Suy ra $\min P=2$.

Bài 4.11: Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$.

Chứng minh rằng $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\le\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{a}{\sqrt{ab+cb+ca+a^2}}=\frac{a}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c}\right)$

Tương tự $\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+b}+\frac{b}{b+c}\right),\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{c}{a+c}+\frac{c}{b+c}\right)$.

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên suy ra điều phải chứng minh.

Bài 4.12: Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=1$.

Chứng minh rằng: $\frac{ab}{\sqrt{c+ab}}+\frac{bc}{\sqrt{a+bc}}+\frac{ca}{\sqrt{b+ca}}\le\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\frac{ab}{\sqrt{c+ab}}=\frac{ab}{\sqrt{c(a+b+c)+ab}}=\frac{ab}{\sqrt{(c+a)(c+b)}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{ab}{c+a}+\frac{ab}{c+b}\right)$$

Tương tự ta có $\frac{bc}{\sqrt{a+bc}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c}\right),\frac{ca}{\sqrt{b+ca}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{ca}{b+a}+\frac{ca}{b+c}\right)$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được $\frac{ab}{\sqrt{c+ab}}+\frac{bc}{\sqrt{a+bc}}+\frac{ca}{\sqrt{b+ca}}\le\frac{1}{2}$.

Bài 4.13: Cho ba số thực dương a,b,c.

Chứng minh rằng $1+\frac{3}{ab+bc+ca}\ge\frac{6}{a+b+c}$.

Hướng dẫn giải

$$\text{BĐT}\Leftrightarrow a+b+c+\frac{3(a+b+c)}{ab+bc+ca}\ge 6$$

Áp dụng BĐT côsi ta có $a+b+c+\frac{3(a+b+c)}{ab+bc+ca}\ge 2\sqrt{\frac{3(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}}$

Do đó ta chỉ cần chứng minh $2\sqrt{\frac{3(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}}\ge 6$

$\Leftrightarrow(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$ (đúng)

Bài 4.14: Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$.

Chứng minh rằng : $\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\ge\frac{3}{2}$

Hướng dẫn giải

Ta có $(1+abc)\left(\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\right)+3=$

$$=\left(\frac{1+abc}{a(1+b)}+1\right)+\left(\frac{1+abc}{b(1+c)}+1\right)+\left(\frac{1+abc}{c(1+a)}+1\right)$$

$$=\frac{1+a+ab+abc}{a(1+b)}+\frac{1+b+bc+abc}{b(1+c)}+\frac{1+c+ca+abc}{c(1+a)}$$

$$=\frac{1+a}{a(1+b)}+\frac{ab(1+c)}{a(1+b)}+\frac{1+b}{b(1+c)}+\frac{bc(1+b)}{b(1+c)}+\frac{1+c}{c(1+a)}+\frac{ca(1+b)}{c(1+a)}$$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\frac{1+a}{a(1+b)}+\frac{1+b}{b(1+c)}+\frac{1+c}{c(1+a)}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1+a}{a(1+b)}.\frac{1+b}{b(1+c)}.\frac{1+c}{c(1+a)}}=3$$

$$\frac{ab(1+c)}{a(1+b)}+\frac{bc(1+b)}{b(1+c)}+\frac{ca(1+b)}{c(1+a)}\ge 3\sqrt[3]{\frac{ab(1+c)}{a(1+b)}.\frac{bc(1+b)}{b(1+c)}.\frac{ca(1+b)}{c(1+a)}}=3\sqrt{abc}=3$$

Suy ra $(1+abc)\left(\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\right)+3\ge 6$

$\Leftrightarrow \frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\ge\frac{3}{2}$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 4.15: Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{a+b}{2ab}}+\sqrt{\frac{b+c}{2bc}}+\sqrt{\frac{c+a}{2ca}}\ge 3$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\sqrt{\frac{a+b}{2ab}}+\sqrt{\frac{b+c}{2bc}}+\sqrt{\frac{c+a}{2ca}}\ge 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{a+b}{2ab}}.\sqrt{\frac{b+c}{2bc}}.\sqrt{\frac{c+a}{2ca}}}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh $\frac{a+b}{2ab}.\frac{b+c}{2bc}.\frac{c+a}{2ca}\ge 1$ (*)

Ta có $\frac{a+b}{2ab}.\frac{b+c}{2bc}.\frac{c+a}{2ca}\ge\frac{2\sqrt{ab}}{2ab}.\frac{2\sqrt{bc}}{2bc}.\frac{2\sqrt{ca}}{2ca}=\frac{1}{abc}$ (1)

Mặt khác $3=a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}\Rightarrow abc\le 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra (*) đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Bài 4.16: Cho ba số thực dương a,b,c.

Chứng minh rằng $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\ge 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$.

Hướng dẫn giải

Ta có BĐT $\Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\ge 2.\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{a}{a}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}.\frac{a}{c}.\frac{a}{a}}=\frac{3a}{\sqrt[3]{abc}}$

Tương tự ta có $\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{b}\ge\frac{3b}{\sqrt[3]{abc}}$, $\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{c}{c}\ge\frac{3c}{\sqrt[3]{abc}}$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+3\ge 3.\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$

Mặt khác theo BĐT côsi ta có $\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\ge 3$

Do đó $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\ge 2.\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$ ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 4.17: Cho a,b,c là độ dài ba cạnh tam giác.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{\frac{2a}{2b+2c-a}}+\sqrt{\frac{2b}{2c+2a-b}}+\sqrt{\frac{2c}{2a+2b-c}}$$

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT Côsi ta có:

$$\sqrt{\frac{2a}{2b+2c-a}}=\frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{3a(2b+2c-a)}}\ge\frac{a\sqrt{6}}{a+b+c}$$

Tương tự: $\sqrt{\frac{2b}{2c+2a-b}}\ge\frac{b\sqrt{6}}{a+b+c}$; $\sqrt{\frac{2c}{2a+2b-c}}\ge\frac{c\sqrt{6}}{a+b+c}$

Cộng 3 BĐT trên ta được: $P\ge\frac{\sqrt{6}(a+b+c)}{a+b+c}=\sqrt{6}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

Vậy $\min P=\sqrt{6}$.

Bài 4.18: Với các số dương a, b, c, chứng minh rằng:

a) $a^3+b^3+c^3\ge ab^2+bc^2+ca^2$ b) $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge ab+bc+ca$

Hướng dẫn giải

a) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$a^3+b^3+b^3\ge 3ab^2$, $b^3+c^3+c^3\ge 3bc^2$, $c^3+a^3+a^3\ge 3ca^2$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$3\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge 3\left(ab^2+bc^2+ca^2\right)\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3\ge ab^2+bc^2+ca^2$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$

b) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$\frac{a^3}{b}+ab\ge 2a^2$, $\frac{b^3}{c}+bc\ge 2b^2$, $\frac{c^3}{a}+ca\ge 2c^2$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}+ab+bc+ca\ge 2\left(a^2+b^2+c^2\right)$ (1)

Lại có, $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}+ab+bc+ca\ge 2(ab+bc+ca)$

$\Leftrightarrow \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge ab+bc+ca$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 4.19: Với các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$.

Chứng minh rằng $a^3+b^3+c^3\ge\frac{1}{\sqrt{3}}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có: $a^3+b^3+\frac{1}{3\sqrt{3}}\ge ab\sqrt{3}$

$b^3+c^3+\frac{1}{3\sqrt{3}}\ge bc\sqrt{3}$, $c^3+a^3+\frac{1}{3\sqrt{3}}\ge ca\sqrt{3}$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$2\left(a^3+b^3+c^3\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\ge\sqrt{3}(ab+bc+ca)=\sqrt{3}$

$\Rightarrow 2\left(a^3+b^3+c^3\right)\ge\frac{2}{\sqrt{3}}\Rightarrow a^3+b^3+c^3\ge\frac{1}{\sqrt{3}}$

Dấu đẳng thức xảy ra $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 4.20: Với các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $4(a+b+c)=3abc$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\ge\frac{3}{8}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $4(a+b+c)=3abc\Leftrightarrow\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{3}{4}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có: $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{8}\ge\frac{3}{2}.\frac{1}{ab}$

$\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}+\frac{1}{8}\ge\frac{3}{2}.\frac{1}{bc}$, $\frac{1}{c^3}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{8}\ge\frac{3}{2}.\frac{1}{ca}$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)+\frac{3}{8}\ge\frac{3}{2}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=\frac{9}{8}\Leftrightarrow\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\ge\frac{3}{8}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=2$.

Bài 4.21: Với các số dương a, b, c. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a^3}{b(b+c)}+\frac{b^3}{c(c+a)}+\frac{c^3}{a(a+b)}\ge\frac{1}{2}(a+b+c)$

b) $\frac{a^3}{(b+2c)^2}+\frac{b^3}{(c+2a)^2}+\frac{c^3}{(a+2b)^2}\ge\frac{2}{9}(a+b+c)$

Hướng dẫn giải

a) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$\frac{a^3}{b(b+c)}+\frac{b}{2}+\frac{b+c}{4}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b(b+c)}.\frac{b}{2}.\frac{b+c}{4}}=\frac{3}{2}a$

Tương tự, ta có: $\frac{b^3}{c(c+a)}+\frac{c}{2}+\frac{c+a}{4}\ge\frac{3}{2}b$, $\frac{c^3}{a(a+b)}+\frac{a}{2}+\frac{a+b}{4}\ge\frac{3}{2}c$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$\frac{a^3}{b(b+c)}+\frac{b^3}{c(c+a)}+\frac{c^3}{a(a+b)}+a+b+c\ge\frac{3}{2}(a+b+c)$

$\Leftrightarrow\frac{a^3}{b(b+c)}+\frac{b^3}{c(c+a)}+\frac{c^3}{a(a+b)}\ge\frac{1}{2}(a+b+c)$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

b) Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$\frac{a^3}{(b+2c)^2}+\frac{b+2c}{27}+\frac{b+2c}{27}\ge 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{(b+c)^2}.\frac{b+2c}{27}.\frac{b+2c}{27}}=\frac{a}{3}$

Tương tự, ta có:

$\frac{b^3}{(c+2a)^2}+\frac{c+2a}{27}+\frac{c+2a}{27}\ge\frac{b}{3}$, $\frac{c^3}{(a+2b)^2}+\frac{a+2b}{27}+\frac{a+2b}{27}\ge\frac{c}{3}$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên, ta được:

$\frac{a^3}{(b+2c)^2}+\frac{b^3}{(c+2a)^2}+\frac{c^3}{(a+2b)^2}+\frac{a+b+c}{9}\ge\frac{a+b+c}{3}$

$\Leftrightarrow\frac{a^3}{(b+2c)^2}+\frac{b^3}{(c+2a)^2}+\frac{c^3}{(a+2b)^2}\ge\frac{2(a+b+c)}{9}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 4.22: Cho x,y,z dương thỏa mãn và $xyz=1$.

Chứng minh rằng : $x^3+y^3+z^3\ge x+y+z$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT Côsi cho ba số thực không âm ta có :

$x^3+1+1\ge 3\sqrt[3]{x^3.1.1}=3x\Leftrightarrow x^3+2\ge 3x$. Tương tự : $y^3+2\ge 3y$; $z^3+2\ge 3y$

Cộng ba BĐT trên lại với nhau ta được: $x^3+y^3+z^3+6\ge 3(x+y+z)$

Mặt khác : $x+y+z \ge 3\sqrt[3]{xyz} = 3 \Rightarrow 2(x+y+z) \ge 6$.

$\Rightarrow x^3+y^3+z^3+6 \ge (x+y+z)+2(x+y+z) \Rightarrow x^3+y^3+z^3 \ge x+y+z$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Bài 4.23: Cho a,b,c dương và $a+b+c=1$.

Chứng minh rằng: $9(a^4+b^4+c^4) \ge a^2+b^2+c^2$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT Côsi ta có:

$a^4+\frac{1}{81} \ge \frac{2}{9}a^2$; $b^4+\frac{1}{81} \ge \frac{2}{9}b^2$; $c^4+\frac{1}{81} \ge \frac{2}{9}b^2$ cộng ba BĐT lại với nhau

$\Rightarrow a^4+b^4+c^4+\frac{1}{27} \ge \frac{a^2+b^2+c^2}{9}+\frac{a^2+b^2+c^2}{9}$.

Mặt khác: $a^2+b^2+c^2 \ge \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow 9(a^4+b^4+c^4) \ge a^2+b^2+c^2$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 4.24: Cho x,y,z dương thỏa mãn $x+y+z=1$.

Chứng minh rằng : $\left(1+\frac{1}{x}\right)^4+\left(1+\frac{1}{y}\right)^4+\left(1+\frac{1}{z}\right)^4 \ge 768$.

Hướng dẫn giải

Đặt $a=1+\frac{1}{x}$; $b=1+\frac{1}{y}$; $c=1+\frac{1}{z} \Rightarrow a+b+c \ge 12$

Ta có : $a^4+4^4+4^4+4^4 \ge 4\sqrt[4]{4^{12}a^4} = 4^4a \Leftrightarrow a^4+3.4^4 \ge 4^4a$. Tương tự

$b^4+3.4^4 \ge 4^4b$; $c^4+3.4^4 \ge 4^4c$ cộng ba BĐT trên lại với nhau ta được

$a^4+b^4+c^4+9.4^4 \ge 4^4(a+b+c) \ge 12.4^4 \Rightarrow a^4+b^4+c^4 \ge 3.4^4 = 768$ đpcm

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=4 \Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}$.

Bài 4.25: Cho a,b dương thỏa mãn $a+b=1$. Chứng minh rằng

a) $\frac{1}{ab}+\frac{1}{a^2+b^2} \ge 6$ b) $\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{2}{ab}+4ab \ge 11$

c) $\left(a^2+\frac{1}{b^2}\right)\left(b^2+\frac{1}{a^2}\right) \ge \frac{289}{16}$

Hướng dẫn giải

a) Áp dụng BĐT côsi ta có

$\frac{1}{ab}+\frac{1}{a^2+b^2} = \frac{1}{2ab}+\left(\frac{1}{2ab}+\frac{1}{a^2+b^2}\right) \ge \frac{1}{2ab}+2\sqrt{\frac{1}{2ab(a^2+b^2)}}$

$\ge \frac{2}{(a+b)^2}+2\sqrt{\frac{4}{(a+b)^2}} = 6$

b) Áp dụng BĐT côsi ta có

$A = \frac{1}{a^2+b^2}+\frac{2}{ab}+4ab = \left(\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{2ab}\right)+\frac{5}{4ab}+\left(\frac{1}{4ab}+4ab\right)$.

$A \ge \frac{4}{(a+b)^2}+\frac{5}{(a+b)^2}+4\sqrt{\frac{1}{4ab}.4ab} = 4+5+4 = 11$.

c) Ta có $\left(a^2+\frac{1}{b^2}\right)\left(b^2+\frac{1}{a^2}\right) = \frac{a^2b^2+1}{b^2}.\frac{a^2b^2+1}{a^2} = \left(ab+\frac{1}{ab}\right)^2$

Ta có: $ab+\frac{1}{ab} = \left(ab+\frac{1}{16ab}\right)+\frac{15}{16ab}$ (1)

Áp dụng BĐT Côsi ta có: $ab+\frac{1}{16ab} \ge 2\sqrt{ab.\frac{1}{16ab}} = \frac{1}{2}$ (2)

Mà $\frac{1}{2} = \frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$ nên $ab \le \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{ab} \ge 4$ (3)

Từ (1) (2) (3) $\Rightarrow ab+\frac{1}{ab} \ge \frac{1}{2}+\frac{15}{16}.4 = \frac{17}{4}$

$\Rightarrow \left(a^2+\frac{1}{b^2}\right)\left(b^2+\frac{1}{a^2}\right) \ge \left(\frac{17}{4}\right)^2 = \frac{289}{16}$.

Bài 4.26: Cho hai số thực dương a,b. Chứng minh rằng

$\left(a^2+b+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+a+\frac{3}{4}\right) \ge \left(2a+\frac{1}{2}\right)\left(2b+\frac{1}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT côsi ta có $a^2+\frac{1}{4} \ge a \Rightarrow a^2+b+\frac{3}{4} \ge a+b+\frac{1}{2}$

$b^2+\frac{1}{4} \ge b \Rightarrow b^2+a+\frac{3}{4} \ge a+b+\frac{1}{2}$

Suy ra $\left(a^2+b+\frac{3}{4}\right)\left(b^2+a+\frac{3}{4}\right) \ge \left(a+b+\frac{1}{2}\right)^2$ (1)

Theo BĐT côsi ta lại có $\left(2a+\frac{1}{2}\right)\left(2b+\frac{1}{2}\right) \le \left(\frac{2a+2b+1}{2}\right)^2 = \left(a+b+\frac{1}{2}\right)^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Bài 4.27: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy + yz + zx = 3$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{xyz} + \frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geq \frac{3}{2}$

Hướng dẫn giải

Trước tiên, ta dễ dàng có $xyz \leq 1$

Áp dụng côsi ta có $\frac{1}{xyz} + \frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)}$

$= \frac{1}{2xyz} + \left[\frac{1}{2xyz} + \frac{4}{(x+y)(y+z)(z+x)}\right] \geq \frac{1}{2xyz} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{xyz(x+y)(y+z)(z+x)}}$

$= \frac{1}{2xyz} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(xy+xz)(yz+yx)(zx+zy)}} \geq \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\left(\frac{xy+xz+yz+yx+zx+zy}{3}\right)^3}}$

$= \frac{3}{2}$.

Bài 4.28: Cho x, y, z dương thỏa mãn $x + y + z = 3$.

Chứng minh rằng $\frac{x^3}{y^3+8} + \frac{y^3}{z^3+8} + \frac{z^3}{x^3+8} \geq \frac{1}{9} + \frac{2}{27}(xy + yz + zx)$

Hướng dẫn giải

Ta có $\frac{x^3}{y^3+8} + \frac{(y+2)}{27} + \frac{(y^2-2y+4)}{27} \geq \frac{x}{3} \Rightarrow \frac{x^3}{y^3+8} \geq \frac{9x+y-y^2-6}{27}$

Tương tự ta có

$\frac{y^3}{z^3+8} \geq \frac{9y+z-z^2-6}{27}, \frac{z^3}{x^3+8} \geq \frac{9z+x-x^2-6}{27}$ nên

$VT \geq \frac{10(x+y+z)-(x^2+y^2+z^2)-18}{27} = \frac{12-(x^2+y^2+z^2)}{27}$ mà ta lại có

$\frac{12-(x^2+y^2+z^2)}{27} = \frac{3+(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)}{27} = \frac{1}{9} + \frac{2}{27}(xy+yz+zx)$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Bài 4.29: Cho a, b, c dương. Chứng minh rằng:

$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}} + \frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}} + \frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}} \geq \frac{1}{5}(a+b+c)$

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT côsi ta có

$\sqrt{3a^2+8b^2+14ab} = \sqrt{(a+4b)(3a+2b)} \leq \frac{1}{2}(4a+6b) = 2a+3b$

$\Rightarrow \frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}} \geq \frac{a^2}{2a+3b}$

Mặt khác $\frac{a^2}{2a+3b} + \frac{2a+3b}{25} \geq \frac{2a}{5} \Rightarrow \frac{a^2}{2a+3b} \geq \frac{8a-3b}{25}$

Do đó $\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}} \geq \frac{8a-3b}{25}$

Tương tự ta có $\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}} \geq \frac{8b-3c}{25}, \frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}} \geq \frac{8c-3a}{25}$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được điều phải chứng minh.

Bài 4.30: Cho ba số thực dương x, y, z. Chứng minh rằng:

$\sqrt{1+\frac{16x}{y+z}} + \sqrt{1+\frac{16y}{z+x}} + \sqrt{1+\frac{16z}{x+y}} \geq 9$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bất đẳng thức BĐT côsi ta có

$6\sqrt{1+\frac{16x}{y+z}} \leq \left(1+\frac{16x}{y+z}\right)+9 = \frac{2(8x+5y+5z)}{y+z}$

Suy ra $\sqrt{1+\frac{16x}{y+z}} \leq \frac{8x+5y+5z}{3(y+z)}$ (*). Sử dụng (*), ta có

$\sqrt{1+\frac{16x}{y+z}} = \left(\sqrt{1+\frac{16x}{y+z}}-1\right)+1$

$= \frac{\frac{16x}{y+z}}{\sqrt{1+\frac{16x}{y+z}}+1} + 1 \geq \frac{\frac{16x}{y+z}}{\frac{8x+5y+5z}{3(y+z)}+1} + 1 = \frac{6x}{x+y+z} + 1.$

Tương tự, ta cũng có $\sqrt{1+\frac{16y}{z+x}} \geq \frac{6y}{x+y+z}+1, \sqrt{1+\frac{16z}{x+y}} \geq \frac{6z}{x+y+z}+1.$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 4.31: Cho a, b, c là số dương thỏa mãn $abc \geq 1$.

Chứng minh rằng $\sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+1} + \sqrt{c^2+1} \leq \sqrt{2}(a+b+c)$

Hướng dẫn giải

Ta có $\sqrt{a^2+1} = \sqrt{(a+1)^2-2a} = \sqrt{(a+1-\sqrt{2a})(a+1+\sqrt{2a})}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(2+\sqrt{2})(a+1-\sqrt{2a})(2-\sqrt{2})(a+1+\sqrt{2a})}$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\sqrt{a^2+1} \le \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(2+\sqrt{2})(a+1-\sqrt{2a})+(2-\sqrt{2})(a+1+\sqrt{2a})}{2} = \sqrt{2}(a-\sqrt{a}+1)$$

Tương tự ta có $\sqrt{b^2+1} \le \sqrt{2}(b-\sqrt{b}+1)$, $\sqrt{c^2+1} \le \sqrt{2}(c-\sqrt{c}+1)$

Cộng vế với vế các BĐT ta có

$$\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1} \le \sqrt{2}(a+b+c-\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}+3) \quad (1)$$

Mặt khác theo BĐT côsi ta có $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \ge 3\sqrt[3]{\sqrt{abc}} \ge 3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1} \le \sqrt{2}(a+b+c)$

Bài 4.32: Cho a,b,c là số dương. Chứng minh rằng

a) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 \ge (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

b) $\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \ge 1$

Hướng dẫn giải

a) BĐT $\Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+2\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right) \ge 3+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+\frac{c}{a}$

$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b} \ge 3+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}$

Áp dụng BDT côsi ta có có:

$\frac{a^2}{b^2}+1 \ge \frac{2a}{b}$; $\frac{b^2}{c^2}+1 \ge \frac{2b}{c}$; $\frac{c^2}{a^2}+1 \ge \frac{2c}{a}$

Mặt khác $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b} \ge 6$

Cộng các vế các BĐT lại ta có ĐPCM.

b) Ta có $\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} = \sqrt{\frac{1}{1+x^3}}$ với $x = \frac{b+c}{a}$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\sqrt{\frac{1}{1+x^3}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}\sqrt{x^2-x+1}} \ge \frac{2}{x^2+2} = \frac{2}{\left(\frac{b+c}{a}\right)^2+1} = \frac{2a^2}{(b+c)^2+2a^2}$$

Mặt khác ta có $(b+c)^2 \le 2(b^2+c^2) \Rightarrow \frac{2a^2}{(b+c)^2+2a^2} \ge \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$

Do đó ta có $\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} \ge \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$

Tương tự ta có :

$\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}} \ge \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}$, $\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \ge \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được điều phải chứng minh.

Bài 4.33: Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x^3+y^3+z^3=3$. Chứng minh rằng $xy+yz+zx-xyz \le 2$.

Hướng dẫn giải

Không mất tính tổng quát giả sử $(1-x)(1-y) \ge 0 \Leftrightarrow x+y-xy \le 1$

Suy ra $z(x+y-xy) \le z \Rightarrow xy+yz+zx-xyz \le xy+z$

Mặt khác, theo BĐT côsi ta có

$xy = \sqrt[3]{x^3.y^3.1} \le \frac{x^3+y^3+1}{3}$; $z = \sqrt[3]{z^3.1.1} \le \frac{z^3+1+1}{3}$.

Suy ra $xy+z \le \frac{x^3+y^3+z^3+3}{3} = 2$ ĐPCM.

Bài 4.34: Cho a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất $M = a^3+64b^3+c^3$

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT côsi ta có $a^3+m^3+m^3 \ge 3m^2a$, $c^3+m^3+m^3 \ge 3m^2c$

$64b^3+n^3+n^3 \ge 12n^2b$ (m,n dương)

Do đó ta cần chọn tham số m,n sao cho $3m^2=12n^2$, $a=c=m$, $4b=n$ và $a+b+c=3$

Từ đó ta tìm được $m = \frac{24}{17}$, $n = \frac{12}{17}$. Ta dễ dàng có được lời giải bài toán.

Bài 4.35: Cho x,y,z dương thỏa mãn $xy+yz+zx=1$.

Tìm GTNN của $P = x^2+2y^2+3z^2$

Hướng dẫn giải

Ta đưa vào tham số và đánh giá như sau

$\frac{x^2}{2}+my^2 \ge 2\sqrt{\frac{m}{2}}xy$; $\frac{x^2}{2}+nz^2 \ge 2\sqrt{\frac{n}{2}}xz$;

$(2-m)y^2+(3-n)z^2 \ge 2\sqrt{(2-m)(3-n)}yz$

Cần cho m, n sao cho $\sqrt{(2-m)(3-n)} = \sqrt{\frac{m}{2}} = \sqrt{\frac{n}{2}}$ $(0<m,n\le 2)$

Ta có $m = n = \frac{3}{2}$

Chú ý: đối với bài toán tổng quát, tìm GTNN của $P = mx^2 + ny^2 + pz^2$ ta đưa về $P = m\left(x^2 + \frac{n}{m}y^2 + \frac{p}{m}z^2\right)$ và là tương tự như trên.

Bài 4.36: Cho a, b, c không âm thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Chứng minh rằng $a^3 + 2b^3 + 3c^3 \geq \frac{6}{7}$

Hướng dẫn giải

Đặt $P = a^3 + 2b^3 + 3c^3$

Với các số thực dương α, β, γ chọn sau ta có

$$2P = (a^3 + \alpha^3 + \alpha^3) + 2(b^3 + b^3 + \beta^3) + 3(c^3 + c^3 + \gamma^3) - (\alpha^3 + 2\beta^3 + 3\gamma^3)$$
$$\geq 3\alpha a^2 + 6\beta b^2 + 9\gamma c^2 - (\alpha^3 + 2\beta^3 + 3\gamma^3)$$

Cần chọn $\alpha = 2\beta = 3\gamma = t$ và kết hợp với dấu đẳng thức xảy ra khi

$a = \alpha, b = \beta, c = \gamma, a^2 + b^2 + c^2 = 1$ ta được $\alpha = \frac{6}{7}, \beta = \frac{6}{14}, \gamma = \frac{6}{21}$

Vậy $2P \geq 3.\frac{6}{7}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{6}{7} \Rightarrow P \geq \frac{6}{7}$

Bài 4.37: Cho x, y, z dương thỏa mãn $x + \sqrt{xy} + \sqrt[3]{xyz} = \frac{4}{3}$.

Chứng minh rằng $x + y + z \geq 1$

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT côsi ta có $x + \frac{1}{2}\sqrt{x.4y} + \frac{1}{4}\sqrt[3]{x.4y.16z} \leq \frac{4}{3}(x + y + z)$

Bài 4.38: Cho a, b, c dương.

Chứng minh rằng $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{16c^2}{a+b} \geq \frac{1}{9}(64c - a - b)$

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a^2}{b+c} + \frac{4}{9}(b+c) \geq \frac{4}{3}a \\ \frac{b^2}{c+a} + \frac{4}{9}(a+c) \geq \frac{4}{3}b \\ \frac{16c^2}{a+b} + (a+b) \geq 8c \end{array}\right| \Rightarrow \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{16c^2}{a+b} \geq \frac{1}{9}(64c - a - b)$$

Bài 4.39: Cho x, y, z dương thỏa mãn $y^2 + yz + z^2 = 1 - \frac{3x^2}{2}$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y + z$.

Hướng dẫn giải

$$y^2 + yz + z^2 = 1 - \frac{3x^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2\right) + \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}z^2\right) + yz + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = 1.$$

Ta có $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \geq xy, \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}z^2 \geq xz$

Suy ra $\frac{1}{2}(x + y + z)^2 \leq 1 \Leftrightarrow |P| \leq \sqrt{2}$.

Bài 4.40: Cho x, y, z dương thỏa mãn $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của: $T = \frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x}$

Hướng dẫn giải

Ta có: $\frac{x^2}{x+y} = \frac{x(x+y) - xy}{x+y} = x - \frac{xy}{x+y} \geq x - \frac{\sqrt{xy}}{2}$

Chứng minh tương tự: $\frac{y^2}{y+z} \geq y - \frac{\sqrt{yz}}{2}; \frac{z^2}{z+x} \geq z - \frac{\sqrt{zx}}{2}$

Suy ra: $T \geq x + y + z - \frac{\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}}{2} = x + y + z - \frac{1}{2} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

(vì $x + y + z \geq \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1$)

Vậy $\min T = \frac{1}{2}$ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Bài 4.41: Cho x, y, z dương thỏa mãn $x + y + z = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{x^2}{x+y^2} + \frac{y^2}{y+z^2} + \frac{z^2}{z+x^2}$.

Hướng dẫn giải

Theo BĐT côsi ta có

$$A = x + y + z - \left(\frac{xy^2}{x+y^2} + \frac{yz^2}{y+z^2} + \frac{zx^2}{z+x^2}\right) \geq 3 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{x}y + \sqrt{y}z + \sqrt{z}x\right)$$

Lại có

$$\sqrt{x}y + \sqrt{y}z + \sqrt{z}x \leq \frac{1}{2}[(x+1)y + (y+1)z + (z+1)x] = \frac{1}{2}(x + y + z + xy + yz + zx)$$

$\le \frac{1}{2}(3+\frac{1}{3}(x+y+z)^2)=3 \Rightarrow A \ge \frac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$.

Vậy $\min A=\frac{3}{2}$.

DẠNG TOÁN 3: ĐẶT ẨN PHỤ TRONG BẤT ĐẲNG THỨC.

Phương pháp giải.

Điều quan trọng trong kĩ thuật này là phát hiện ra ẩn phụ (ẩn phụ có thể là $x=f(a,b,c)$, $y=g(a,b,c)$, $z=h(a,b,c)$ hoặc là chỉ một ẩn phụ $t=f(a;b;c)$).

Ẩn phụ có thể có ngay trong biểu thức của bất đẳng thức hoặc qua một số phép biến đổi, đánh giá.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho các số dương a,b,c.

a) Chứng minh rằng $\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{6b+8c}{2a+b}+\frac{3a+2b+c}{b+c}\ge 7$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{b+c+4a}+\frac{c+a}{c+a+16b}$.

Lời giải

a) Đặt $x=a+b+c$, $y=2a+b$, $z=b+c$

Suy ra $a=x-z$, $b=-2x+y+2z$, $c=2x-y-z$

Bất đẳng thức trở thành $\frac{-x+y+z}{x}+\frac{4x-2y+4z}{y}+\frac{x+y}{z}\ge 7$

$$\Leftrightarrow -1+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{4x}{y}-2+\frac{4z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\ge 7$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{4z}{y}+\frac{y}{z}\right)\ge 10 \ (*)$$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{y}{x}+\frac{4x}{y}\ge 4$, $\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\ge 2$, $\frac{4z}{y}+\frac{y}{z}\ge 4$

Suy ra BĐT (*) đúng. ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=y \\ x=z \\ 2z=y \end{cases} \Leftrightarrow 2x=y=2z$ suy ra không tồn tại a,b,c.

Dấu đẳng thức không xảy ra.

b) Đặt $x=a+b+c$, $y=b+c+4a$, $z=c+a+16b$

Suy ra $a=\frac{y-x}{3}$, $b=\frac{z-x}{15}$, $c=\frac{21x-5y-z}{15}$

Khi đó ta có $P=\frac{-6x+5y+z}{15x}+\frac{4x-y}{3y}+\frac{16x-z}{15z}$

$$\Rightarrow P=\frac{y}{3x}+\frac{4x}{3y}+\frac{z}{15x}+\frac{16x}{15z}-\frac{4}{5}$$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{y}{3x}+\frac{4x}{3y}\ge\frac{4}{3}$, $\frac{z}{15x}+\frac{16x}{15z}\ge\frac{8}{15}$

Suy ra $P\ge\frac{4}{3}+\frac{8}{15}-\frac{4}{5}=\frac{16}{15}$, đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 4x=2y=z \Leftrightarrow a=\frac{5b}{3}=\frac{5c}{7}$

Vậy $\min P=\frac{16}{15}$ khi và chỉ khi $a=\frac{5b}{3}=\frac{5c}{7}$.

Ví dụ 2: Cho a,b,c là ba cạnh của tam giác có chu vi là $2p$.

Chứng minh rằng $\frac{a}{p-a}+\frac{b}{p-b}+\frac{c}{p-c}\ge\sqrt{\frac{b+c}{p-a}}+\sqrt{\frac{c+a}{p-b}}+\sqrt{\frac{a+b}{p-c}}$

Lời giải

Đặt $x=p-a$; $y=p-b$; $z=p-c$ suy ra $a=y+z$; $b=z+x$; $c=x+y$.

Do a,b,c là ba cạnh của tam giác nên x,y,z dương

Bất đẳng thức cần chứng minh được đưa về dạng:

$$\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\ge\sqrt{2+\frac{y+z}{x}}+\sqrt{2+\frac{z+x}{y}}+\sqrt{2+\frac{x+y}{z}}$$

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có: $4\sqrt{2+\frac{y+z}{x}}\le\left(2+\frac{y+z}{x}\right)+4=\frac{y+z}{x}+6$

Tương tự ta có $4\sqrt{2+\frac{z+x}{y}}\le\frac{z+x}{y}+6$, $4\sqrt{2+\frac{x+y}{z}}\le\frac{x+y}{z}+6$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$$4\left(\sqrt{2+\frac{y+z}{x}}+\sqrt{2+\frac{z+x}{y}}+\sqrt{2+\frac{x+y}{z}}\right)\le\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}+18$$

Vì vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\ge\frac{1}{4}\left(\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}+18\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\ge 6.$$

Ta có $\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}=\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\ge 2\sqrt{\frac{y}{x}.\frac{x}{y}}=2, \frac{y}{z}+\frac{z}{y}\ge 2, \frac{x}{z}+\frac{z}{x}\ge 2$

Suy ra $\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z}\ge 6$. đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hay tam giác đều.

Nhận xét: Đối với BĐT có giả thiết a,b,c là ba cạnh của tam giác thì ta thực hiện phép đặt ẩn phụ $x=\frac{a+b-c}{2}, y=\frac{a-b+c}{2}, z=\frac{-a+b+c}{2}$ thì khi đó $a=y+z; b=z+x; c=x+y$ và x,y,z dương. Ta chuyển về bài toán với giả thiết x,y,z dương không còn rằng buộc là ba cạnh của tam giác.

Ví dụ 3: Cho x,y,z là số dương.

Chứng minh rằng $x^3+2y^3+3z^3\ge\frac{1590}{1331}(x+y+z)^3$

Lời giải

Ta có BĐT $\Leftrightarrow\left(\frac{x}{x+y+z}\right)^3+2\left(\frac{y}{x+y+z}\right)^3+3\left(\frac{z}{x+y+z}\right)^3\ge\frac{1590}{1331}$

Đặt $a=\frac{x}{x+y+z}, b=\frac{y}{x+y+z}, c=\frac{z}{x+y+z}\Rightarrow a,b,c$ dương và $a+b+c=1$

BĐT trở thành $a^3+2b^3+3c^3\ge\frac{1590}{1331}$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$a^3+\left(\frac{6}{11}\right)^3+\left(\frac{6}{11}\right)^3\ge\frac{18}{11}a$, $2b^3+2\left(\frac{3}{11}\right)^3+2\left(\frac{3}{11}\right)^3\ge\frac{18}{11}b$,

$3c^3+3\left(\frac{2}{11}\right)^3+3\left(\frac{2}{11}\right)^3\ge\frac{18}{11}c$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$a^3+2b^3+3c^3+\frac{588}{1331}\ge\frac{18}{11}(a+b+c)=\frac{18}{11}$

Suy ra $a^3+2b^3+3c^3\ge\frac{1590}{1331}$.

Nhận xét: Phương pháp đặt ẩn phụ trên được áp dụng khi BĐT là đồng bậc (Người ta gọi là phương pháp chuẩn hóa).

Ví dụ 4: Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a+b+c+\frac{4}{\sqrt[3]{abc}}$.

Lời giải

Ta có $\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}=1\Leftrightarrow 4=abc+ab+bc+ca$

Áp dụng BĐT côsi ta có $ab+bc+ca\ge 3\sqrt[3]{(abc)^2}$

Suy ra $4=abc+ab+bc+ca\ge abc+3\sqrt[3]{(abc)^2}=t^3+3t^2$, với $t=\sqrt[3]{abc}$.

$\Rightarrow t^3+3t^2-4\le 0\Leftrightarrow(t-1)(t+2)^2\le 0\Leftrightarrow t\le 1$

Cũng theo BĐT côsi ta có: $P=a+b+c+\frac{4}{\sqrt[3]{abc}}\ge 3\sqrt[3]{abc}+\frac{4}{\sqrt[3]{abc}}$

Suy ra $P\ge 3t+\frac{4}{t}=\left(3t+\frac{3}{t}\right)+\frac{1}{t}$

Áp dụng BĐT côsi ta có $3t+\frac{3}{t}\ge 2\sqrt{3t.\frac{3}{t}}=6$, mặt khác $t\le 1\Rightarrow\frac{1}{t}\ge 1$

Do đó $P\ge 3t+\frac{4}{t}\ge 7$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t=1$ hay $a=b=c=1$

Vậy $\min P=7\Leftrightarrow a=b=c=1$.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 4.42: Cho x,y,z dương. CMR $\frac{25x}{y+z}+\frac{4y}{z+x}+\frac{9z}{x+y}>12$

Hướng dẫn giải

Đặt $a=y+z, b=z+x, c=x+y$ (với a,b,c dương)

$\Rightarrow x=\frac{b+c-a}{2}, y=\frac{c+a-b}{2}, z=\frac{a+b-c}{2}$

$2VT=\frac{25(b+c-a)}{a}+\frac{4(c+a-b)}{b}+\frac{9(a+b-c)}{c}$

$=\left(\frac{25b}{a}+\frac{4a}{b}\right)+\left(\frac{25c}{a}+\frac{9a}{c}\right)+\left(\frac{4c}{b}+\frac{9b}{c}\right)-38$

$\ge 20+30+12=24\Rightarrow VT\ge 12$

Dấu bằng xảy ra khi

$\begin{cases}25b^2=4a^2\\25c^2=9a^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5b=2a\\5c=3a\end{cases}\Rightarrow 5b+5c=5a\Rightarrow x=0$ (vô lí).

Bài 4.43: Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{4a}{a+b+2c}+\frac{b+3c}{2a+b+c}-\frac{8c}{a+b+3c}\geq 12\sqrt{2}-17$$

Hướng dẫn giải

Đặt $x=a+b+2c,\ y=2a+b+c,\ z=a+b+3c$

Suy ra $a=-2x+y+z,\ b=5x-y-3z,\ c=z-x$

Bất phương trình trở thành $\frac{-8x+4y+4z}{x}+\frac{2x-y}{y}-\frac{-8x+8z}{z}\geq 12\sqrt{2}-17$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{4y}{x}+\frac{2x}{y}\right)+\left(\frac{4z}{x}+\frac{8x}{z}\right)\geq 12\sqrt{2}\ (*)$$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\frac{4y}{x}+\frac{2x}{y}\geq 4\sqrt{2},\ \frac{4z}{x}+\frac{8x}{z}\geq 8\sqrt{2}$

Cộng vế với vế lại suy ra BĐT (*) đúng. ĐPCM.

Bài 4.44: Cho x, y, z là các số dương thoả mãn $xyz\geq x+y+z+2$.

Chứng minh rằng $x+y+z\geq 6$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT Côsi ta có: $x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}\Rightarrow\frac{(x+y+z)^3}{27}\geq xyz$

Mặt khác $xyz\geq x+y+z+2$ suy ra $\frac{(x+y+z)^3}{27}\geq x+y+z+2$

Đặt $t=x+y+z, t>0$ ta có

$$\frac{t^3}{27}\geq t+2\Leftrightarrow t^3-27t-54\geq 0\Leftrightarrow (t-6)(t+3)^2\geq 0\Leftrightarrow t\geq 6$$

Suy ra $x+y+z\geq 6$, đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=2$.

Bài 4.45: Cho a, b, c là các số thực dương.

Chứng minh rằng $\frac{a^{11}}{bc}+\frac{b^{11}}{ca}+\frac{c^{11}}{ab}+\frac{3}{a^2b^2c^2}\geq\frac{a^6+b^6+c^6+9}{2}$

Hướng dẫn giải

Sử dụng bất đẳng thức côsi ta có $\frac{a^{11}}{bc}+abc\geq 2\sqrt{\frac{a^{11}}{bc}.abc}=2a^6$

Tương tự ta có $\frac{b^{11}}{ca}+abc\geq 2b^6,\ \frac{c^{11}}{ab}+abc\geq 2c^6$

Từ đó suy ra $\frac{a^{11}}{bc}+\frac{b^{11}}{ca}+\frac{c^{11}}{ab}\geq 2(a^6+b^6+c^6)-3abc$

Vậy ta chỉ cần chứng minh:

$$2(a^6+b^6+c^6)-3abc+\frac{3}{a^2b^2c^2}\geq\frac{a^6+b^6+c^6+9}{2}$$

Hay là $3(a^6+b^6+c^6)+\frac{6}{a^2b^2c^2}-6abc\geq 9$

Bây giờ lại sử dụng bất đẳng thức côsi ta được $a^6+b^6+c^6\geq 3a^2b^2c^2$

Do đó ta chỉ cần chứng minh $9a^2b^2c^2+\frac{6}{a^2b^2c^2}-6abc\geq 9$

Đặt $t=abc, t>0$. BĐT trở thành $9t^2+\frac{6}{t^2}-6t\geq 9$

Sử dụng bất đẳng thức côsi ta được

$$9t^2+\frac{6}{t^2}-6t\geq 9t^2+\frac{6}{t^2}-3(t^2+1)=6t^2+\frac{6}{t^2}-3\geq 12-3=9.\ \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 4.46: Cho x, y, z là số không âm thỏa mãn $x^2+y^2+z^2+xyz=4$.

Chứng minh rằng $x+y+z\leq 3$.

Hướng dẫn giải

Từ điều kiện suy ra $x, y, z\in[0;2]$. Áp dụng BĐT Côsi ta có:

$$27(2-x)(2-y)(2-z)\leq(2-x+2-y+2-z)^3$$

$$\Leftrightarrow 27\left[8-4(x+y+z)+2(xy+yz+zx)-xyz\right]\leq(8-x-y-z)^3$$

$$\Leftrightarrow 27\left[8-4(x+y+z)+2(xy+yz+zx)+\left(x^2+y^2+z^2\right)-4\right]\leq(8-x-y-z)^3$$

$$\Leftrightarrow 27\left[4-4(x+y+z)+(x+y+z)^2\right]\leq(8-x-y-z)^3$$

Đặt $t=x+y+z,\ t\geq 0$ ta có

$$\Leftrightarrow 27(t^2-4t+4)\leq(6-t)^3\Leftrightarrow t^3+9t^2-108\leq 0$$

$$\Leftrightarrow (t-3)(t+6)^2\leq 0\Leftrightarrow t\leq 3$$

Suy ra $x+y+z\leq 3$.

Bài 4.47: Cho x, y, z là số thực thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=2$.

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P=x^3+y^3+z^3-3xyz$.

Hướng dẫn giải

Giả thiết của bài toán và P là những đa thức đối xứng ba biến nên ta biểu diễn các đa thức này qua ba đa thức đối xứng cơ bản

$x+y+z,\ xy+yz+zx,\ xyz$.

Ta có: $x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=(x+y+z)^2$

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$. Suy ra:

$$|P|=\left|(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\right|=\left|(x+y+z)\left(2-\frac{(x+y+z)^2-2}{2}\right)\right|$$

Đặt $t=|x+y+z|, t\ge 0$ suy ra $|P|=t(2-\frac{t^2-2}{2})=-\frac{t^3}{2}+3t$.

Ta sẽ đi chứng minh $-\frac{t^3}{2}+3t\le 2\sqrt{2}\Leftrightarrow t^3+4\sqrt{2}\ge 6t$

Thật vậy theo BĐT côsi ta có

$t^3+4\sqrt{2}=t^3+2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\ge 3\sqrt{t^3.2\sqrt{2}.2\sqrt{2}}=6t$

Do đó $|P|\le 2\sqrt{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t=\sqrt{2}$.

Ta có $P=2\sqrt{2}$ chẳng hạn khi $x=\sqrt{2}, y=z=0$, $P=-2\sqrt{2}$ chẳng hạn khi $x=-\sqrt{2}, y=z=0$,

Vậy $\min P=-2\sqrt{2}$, $\max P=2\sqrt{2}$.

Nhận xét :

1) Việc chúng biết phải đi chứng minh $-\frac{t^3}{2}+3t\le 2\sqrt{2}$ là do chúng ta dự đoán được dấu bằng xảy ra tại biên.
2) Ta có mọi đa thức đối xứng ba ẩn luôn biểu diễn qua được các đa thức đối xứng sơ cấp $a=x+y+z; b=xy+yz+zx; c=xyz$. Hơn nữa giữa ba đa thức đối xứng sơ cấp này luôn có sự đánh giá qua lại giữa chúng, cụ thể $a^2\ge 3b\ge 9\sqrt[3]{c^2}$. Với bài toán trên từ giả thiết ta có: $a^2-2b=2\Leftrightarrow b=\frac{a^2-2}{2}$ tức là ta đã thay thế b bởi a do đó khi biểu diễn $P=x^3+y^3+z^3-3xyz$ thì chỉ còn hai biến là a và c. Mặt khác ta luôn đánh giá được c qua a (hoặc a qua c) và lúc đó trong P chỉ còn một biến là a hoặc c.

Bài 4.48: Cho $x,y,z\in(0;1)$ và $xyz=(1-x)(1-y)(1-z)$.

Chứng minh rằng $x^2+y^2+z^2\ge\frac{3}{4}$

Hướng dẫn giải

Ta có $xyz=(1-x)(1-y)(1-z)\Leftrightarrow 1-(x+y+z)+xy+yz+zx=2xyz$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=2-2(x+y+z)+(x+y+z)^2-4xyz$

Áp dụng BĐT côsi ta có $\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3\ge xyz$ nên

$$x^2+y^2+z^2\ge 2-2(x+y+z)+(x+y+z)^2-4\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$$

Đặt $t=x+y+z$ thì $0<t<3$. Khi đó:

$$x^2+y^2+z^2\ge-\frac{4}{27}t^3+t^2-2t+2=\frac{1}{27}(2t-3)^2(\frac{15}{4}-t)+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi $t=\frac{3}{2}$ hay $x=y=z=\frac{1}{2}$. đpcm

Bài 4.49: Cho các số thực x,y thỏa $x\ne -2y$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P=\frac{(2x^2+13y^2-xy)^2-6xy+9}{(x+2y)^2}$.

Hướng dẫn giải

Áp dụng BĐT côsi ta có

$$P\ge\frac{6(2x^2+13y^2-xy)-6xy}{(x+2y)^2}=6.\frac{2x^2+13y^2-2xy}{(x+2y)^2}=6.Q$$

Rõ ràng $y\ne 0$ ta có $Q=\frac{2t^2-2t+13}{(t+2)^2}, t=\frac{x}{y}$

Xét $Q-1=\frac{(t-3)^2}{(t+2)^2}\ge 0\Rightarrow Q\ge 1\Rightarrow P\ge 6$

Suy ra $\min P=6\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm 3\sqrt{\frac{3}{28}}\\ y=\pm\sqrt{\frac{3}{28}}\end{cases}$.

DẠNG TOÁN 4: SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC PHỤ

Phương pháp giải.

Điều quan trọng dạng toán này là cần phát hiện ra được bất đẳng thức phụ. Bất đẳng thức phụ có thể là những BĐT cơ bản đã có hoặc là chúng ta từ đặc điểm của BĐT cần chứng minh chúng ta dự đoán và đưa ra BĐT phụ từ đó vận dụng vào bài toán.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho a, b, c là số dương. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}\ge\frac{a+b+c}{abc}$

b) $\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{abc}$

Lời giải

Trước tiên ta chứng minh $a^3+b^3\ge a^2b+b^2a$.

BĐT tương đương với $a^3+b^3-a^2b-b^2a\ge 0\Leftrightarrow a^2(a-b)+b^2(b-a)\ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b)\ge 0$ (đúng với mọi $a>0,b>0$)

$\Rightarrow a^3+b^3\ge a^2b+b^2a$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b$.

a) Ta có $a^3+b^3\ge a^2b+b^2a\Leftrightarrow\frac{a}{b^3}+\frac{1}{a^2}\ge\frac{1}{b^2}+\frac{1}{ab}$

Hoàn toàn tương tự ta có $\frac{b}{c^3}+\frac{1}{b^2}\ge\frac{1}{c^2}+\frac{1}{bc}$, $\frac{c}{a^3}+\frac{1}{c^2}\ge\frac{1}{a^2}+\frac{1}{ac}$

Cộng vế với vế rút gọn ta được $\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Hay $\frac{a}{b^3}+\frac{b}{c^3}+\frac{c}{a^3}\ge\frac{a+b+c}{abc}$, đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

b) Theo bài toán trên ta có : $a^3+b^3\ge a^2b+b^2a=ab(a+b)$

$\Rightarrow a^3+b^3+abc\ge ab(a+b+c)\Rightarrow\frac{1}{a^3+b^3+abc}\le\frac{1}{ab(a+b+c)}=\frac{c}{abc(a+b+c)}$

Tương tự : $\frac{1}{b^3+c^3+abc}\le\frac{a}{abc(a+b+c)}$; $\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{b}{abc(a+b+c)}$

Cộng ba BĐT trên lại với nhau ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Ví dụ 2: Cho a là số dương và b là số thực thỏa mãn $a^2+b^2=5$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{2a^3+a+1}{a^2}-2b$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\ge(ac+bd)^2$ (*), dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ad=bc$.

Ta có $(a^2+b^2)(1+4)=25\ge(a+2b)^2\Leftrightarrow a+2b\le 5$

Suy ra $-2b\ge a-5$

Do đó $P=\frac{2a^3+a+1}{a^2}-2b\ge\frac{2a^3+a+1}{a^2}+a-5=3a+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}-5$ (1)

Áp dụng BĐT côsi ta có $a+\frac{1}{a}\ge 2$, $a+a+\frac{1}{a^2}\ge 3$

Do đó $3a+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}\ge 5$ (2)

Từ (1) và (2) suy sa $P\ge 0$. Đẳng thức xảy ra khi $a=1, b=2$.

Vậy $\min P=0\Leftrightarrow a=1, b=2$.

Nhận xét: Bất đẳng thức (*) là Bất đẳng thức Bunhiacopxki cho bốn số. Ta có thể tổng quát bất đẳng thức Cho 2n số $a_1,a_2,..,a_n,b_1,b_2,...,b_n$. Khi đó ta có bất đẳng thức

$(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2\le(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)$.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 4.50: Cho a, b, x, y $\in$ R. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2}\ge\sqrt{(a+b)^2+(x+y)^2}\quad(1)$$

Áp dụng chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) Cho $a,b\ge 0$ thoả $a+b=1$. Chứng minh rằng $\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}\ge\sqrt{5}$.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{a^2}}$.

c) Cho x, y, z > 0 thoả mãn $x+y+z=1$. Chứng minh:

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}\ge\sqrt{82}.$$

Hướng dẫn giải

Bình phương 2 vế ta được: (1) $\Leftrightarrow\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}\ge ab+xy$ (*)

- Nếu $ab+xy<0$ thì (*) hiển nhiên đúng.
- Nếu $ab+xy\ge 0$ thì bình phương 2 vế ta được: (*) $\Leftrightarrow(bx-ay)^2\ge 0$ (đúng).

a) Sử dụng (1). Ta có: $\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}\ge\sqrt{(1+1)^2+(a+b)^2}=\sqrt{5}$.

b) Sử dụng (1). $P\ge\sqrt{(a+b)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2}\ge\sqrt{(a+b)^2+\left(\frac{4}{a+b}\right)^2}=\sqrt{17}$

Chú ý: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$ (với a, b > 0).

c) Áp dụng (1) liên tiếp hai lần ta được:

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}\ge\sqrt{(x+y+z)^2+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2}$$

$$\ge\sqrt{(x+y+z)^2+\left(\frac{9}{x+y+z}\right)^2}=\sqrt{82}.$$

Chú ý: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{x+y+z}$ (với x, y, z > 0).

Bài 4.51: Cho a, b dương. Chứng minh $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$ (1).

Áp dụng chứng minh các BĐT sau:

a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$; với a, b, c > 0.

b) $\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\le\frac{a+b+c}{2}$; với a, b, c > 0.

Chứng minh: $\frac{2xy}{x+2y}+\frac{8yz}{2y+4z}+\frac{4xz}{4z+x}\le 6$.

c) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, p là nửa chu vi.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$.

Hướng dẫn giải

a) Áp dụng (1) ba lần ta được: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b};\ \frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{4}{b+c};\ \frac{1}{c}+\frac{1}{a}\ge\frac{4}{c+a}$.

Cộng các BĐT vế theo vế ta được đpcm.

b) Theo (1): $\frac{1}{a+b}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\Leftrightarrow\frac{ab}{a+b}\le\frac{1}{4}(a+b)$.

Cùng với các BĐT tương tự, cộng vế theo vế ta được đpcm.

c) Nhận xét: $(p-a)+(p-b)=2p-(a+b)=c$.

Áp dụng (1) ta được: $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}\ge\frac{4}{(p-a)+(p-b)}=\frac{4}{c}$.

Cùng với 2 BĐT tương tự, cộng vế theo vế, ta được đpcm.

Bài 4.52: Cho a, b, c là số dương. Chứng minh $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}$ (1).

Áp dụng chứng minh các BĐT sau:

a) $(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\ge\frac{3}{2}(a+b+c)$ với a, b, c dương

b) $\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{c}{c+1}\le\frac{3}{4}$. Với a, b, c dương thoả a + b + c = 1.

c) $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{2009}{ab+bc+ca}\ge 670$. Với a, b, c dương thỏa mãn a + b + c = 3

Hướng dẫn giải

Ta có: (1) $\Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$. Dễ dàng suy từ BĐT Cô–si.

a) Áp dụng (1) ta được: $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge\frac{9}{2(a+b+c)}$.

$$\Rightarrow VT\ge\frac{9(a^2+b^2+c^2)}{2(a+b+c)}=\frac{3}{2}.\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}\ge\frac{3}{2}(a+b+c)$$

Chú ý: $(a+b+c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2)$.

b) Để áp dụng (1), ta biến đổi P như sau:

$$P=\frac{a+1-1}{a+1}+\frac{b+1-1}{b+1}+\frac{c+1-1}{c+1}=3-\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)$$

Ta có: $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\ge\frac{9}{a+b+c+3}=\frac{9}{4}$. Suy ra: $P\le 3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$.

c) Ta có

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{ab+bc+ca}\ge\frac{9}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}$$

$$=\frac{9}{(a+b+c)^2}\ge 1$$

Và $3(ab+bc+ca)\le(a+b+c)^2$ nên $\frac{2007}{ab+bc+ca}\ge\frac{3.2007}{(a+b+c)^2}\ge 669$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c = 1.

Bài 4.53: Cho $a,b,c\ge 0$ và abc = 1.

Chứng minh rằng : $\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ac}\le 1$.

Hướng dẫn giải

Ta có : $a^5+b^5\ge a^3b^2+b^3a^2=a^2b^2(a+b)\Rightarrow a^5+b^5+ab\ge ab\frac{a+b+c}{c}$

$$\Rightarrow\frac{ab}{a^5+b^5+ab}\le\frac{ab}{ab\frac{a+b+c}{c}}=\frac{c}{a+b+c}.$$

Tương tự : $\frac{bc}{b^5+c^5+bc}\le\frac{a}{a+b+c};\ \frac{ca}{c^5+a^5+ac}\le\frac{b}{a+b+c}$.

Cộng ba BĐT này lại với nhau ta có đpcm.

Bài 4.54: Cho ba số thực không âm a, b, c và không có hai số đồng thời bằng không. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+4\sqrt{2}.\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}$$

Hướng dẫn giải

* Trước tiên, ta sẽ chứng minh kết quả sau:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\ (1)$$

Nhân hai vế của (1) với $ab+bc+ca$, và để ý rằng

$$\frac{a}{b+c}.(ab+bc+ca)=\frac{a}{b+c}\left[a(b+c)+bc\right]=a^2+\frac{abc}{b+c}.$$

Dễ thấy khi đó, (1) trở thành

$$a^2+\frac{abc}{b+c}+b^2+\frac{abc}{c+a}+c^2+\frac{abc}{a+b}\geq a^2+b^2+c^2$$

Hay $abc\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\geq 0$ (hiển nhiên đúng). (đpcm)

* Quay trở lại bài toán, sử dụng kết quả trên, ta suy ra

$$P\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+4\sqrt{2}.\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}=t^2+\frac{4\sqrt{2}}{t},\ \text{với}\ t=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}}$$

Với cách đặt trên, dễ dàng suy ra $t\geq 1$.

Vậy ta sẽ tìm giá trị nhỏ nhất của $f(t)=t^2+\frac{4\sqrt{2}}{t}$ với $t\geq 1$.

Áp dụng BĐT côsi ta có $f(t)=t^2+\frac{2\sqrt{2}}{t}+\frac{2\sqrt{2}}{t}\geq 3\sqrt[3]{t^2.\frac{2\sqrt{2}}{t}.\frac{2\sqrt{2}}{t}}=6$

Đẳng thức xảy ra khi $t=\sqrt{2}$ hay $a=b>0, c=0$ hoặc các hoán vị tương ứng.

Vậy $\min P=6$ khi và chỉ khi $a=b>0, c=0$ hoặc các hoán vị tương ứng.

§2. ĐẠI CƯƠNG VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. *Định nghĩa bất phương trình một ẩn*

Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ có tập xác định lần lượt là D_f và D_g. Đặt $D=D_f\cap D_g$. Mệnh đề chứa biến có một trong các dạng $f(x)<g(x)$, $f(x)>g(x)$, $f(x)\leq g(x)$, $f(x)\geq g(x)$ được gọi là ***bất phương trình một ẩn***; x được gọi là ***ẩn số*** (hay ***ẩn***) và D gọi là tập xác định của bất phương trình. $x_0\in D$ gọi là một ***nghiệm*** của bất phương trình $f(x)<g(x)$ nếu $f(x_0)<g(x_0)$ là mệnh đề đúng.

Giải một bất phương trình là tìm tất cả các nghiệm (hay tìm tập nghiệm) của bất phương trình đó.

Chú ý: Trong thực hành, ta không cần viết rõ tập xác đinh D của bất phương trình mà chỉ cần nêu điều kiện để $x\in D$. Điều kiện đó gọi là điều kiện xác định của bất phương trình, gọi tắt là ***điều kiện của bất phương trình***.

2. *Bất phương trình tương đương, biến đổi tương đương các bất phương trình.*

a) **Định nghĩa:** Hai bất phương trình (cùng ẩn) được gọi là ***tương đương*** nếu chúng có cùng tập nghiệm.

Kí hiệu: Nếu $f_1(x)<g_1(x)$ tương đương với $f_2(x)<g_2(x)$ thì ta viết $f_1(x)<g_1(x)\Leftrightarrow f_2(x)<g_2(x)$

- Phép biến đổi không làm thay đổi tập nghiệm của bất phương trình gọi là ***phép biến đổi tương đương***.

b) **Định lý và hệ quả:**

Định lý 1: Cho bất phương trình $f(x)<g(x)$ có tập xác định D; $y=h(x)$ là hàm số ***xác định*** trên D. Khi đó trên D, bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình sau

1) $f(x)+h(x)<g(x)+h(x)$

2) $f(x).h(x)<g(x).h(x)$ nếu $h(x)>0$ với mọi $x\in D$

3) $f(x).h(x)>g(x).h(x)$ nếu $h(x)<0$ với mọi $x\in D$

Hệ quả: Cho bất phương trình $f(x)<g(x)$ có tập xác định D. Khi đó

1) $f(x)<g(x)\Leftrightarrow f^3(x)<g^3(x)$

2) $f(x)<g(x)\Leftrightarrow f^2(x)<g^2(x)$ với $f(x)\geq 0, g(x)\geq 0, \forall x\in D$

Lưu ý: Khi giải phương trình ta cần chú ý

- Đặt điều kiện xác định(đkxđ) của phương trình và khi tìm được nghiệm của phương trình phải đối chiếu với điều kiện xác định.
- Đối với việc giải bất phương trình ta thường thực hiện phép biến đổi tương đương nên cần lưu ý tới điều kiện để thực hiện phép biến đổi tương đương đó.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: *TÌM ĐIỀU KIỆN XÁC ĐỊNH CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH.*

Phương pháp giải.

- Điều kiện xác định của bất phương trình bao gồm các điều kiện để giá trị của $f(x), g(x)$ cùng được xác định và các điều kiện khác (nếu có yêu cầu trong đề bài)
- Điều kiện để biểu thức
  - $\sqrt{f(x)}$ xác định là $f(x)\ge 0$
  - $\dfrac{1}{f(x)}$ xác định là $f(x)\ne 0$
  - $\dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$ xác định là $f(x)>0$

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Tìm điều kiện xác định của phương trình sau:

a) $x+\dfrac{5}{4x^2-9}<1$ b) $\sqrt{4-2x}\ge\dfrac{x+1}{x^2-2x-1}$

Lời giải

a) Điều kiện xác định của bất phương trình là

$$4x^2-9\ne 0\Leftrightarrow x^2\ne\frac{9}{4}\Leftrightarrow x\ne\pm\frac{3}{2}$$

b) Điều kiện xác định của bất phương trình là

$$\begin{cases}4-2x\ge 0\\ x^2-2x-1\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2\\ x\ne 1\pm\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2\\ x\ne 1-\sqrt{2}\end{cases}$$

Ví dụ 2: Tìm điều kiện xác định của bất phương trình sau rồi suy ra tập nghiệm của nó:

a) $2x+\sqrt{x-3}\ge 2\sqrt{3-x}+3$ b) $\sqrt{-x^2+4x-4}\le 27-3x^3$

c) $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}<\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}+2$ d) $\sqrt{(x-1)^2(3-4x)}-5x>\sqrt{4x-3}-7$

Lời giải

a) Điều kiện xác định của bất phương trình là $\begin{cases}x-3\ge 0\\ 3-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 3\\ x\le 3\end{cases}\Leftrightarrow x=3$

Thử vào bất phương trình thấy $x=3$ thỏa mãn

Vậy tập nghiệp của bất phương trình là $S=\{2\}$

b) Điều kiện xác định của bất phương trình là

$-x^2+4x-4\ge 0\Leftrightarrow -(x-2)^2\ge 0\Leftrightarrow x=2$

Thay $x=2$ vào thấy thỏa mãn bất phương trình

Vậy tập nghiệp của bất phương trình là $S=\{3\}$

c) Điều kiện xác định của bất phương trình là $\begin{cases}x\ge 0\\ x-2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x>2\end{cases}\Leftrightarrow x>2$

Với điều kiện đó bất phương trình tương đương với $\sqrt{x}<2\Leftrightarrow x<4$

Đối chiếu với điều kiện ta thấy bất phương trình vô nghiệm.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\varnothing$

d) Điều kiện xác định của bất phương trình là $\begin{cases}(x-1)^2(3-4x)\ge 0\\ 4x-3\ge 0\end{cases}$ (*)

Dễ thấy $x=1$ thỏa mãn điều kiện (*).

Nếu $x\ne 1$ thì $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}3-4x\ge 0\\ 4x-3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\dfrac{3}{4}\\ x\ge\dfrac{3}{4}\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{4}$

Vậy điều kiện xác định của bất phương trình là $x=1$ hoặc $x=\dfrac{3}{4}$

Thay $x=1$ hoặc $x=\dfrac{3}{4}$ vào bất phương trình thấy đều thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left\{1;\dfrac{3}{4}\right\}$.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 4.55: Tìm điều kiện xác định của bất phương trình sau rồi suy ra tập nghiệm của nó:

a) $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}<\sqrt{1-x}+2$ b) $\sqrt{(x-1)^2(2-x)(x-2)}>-7$

Hướng dẫn giải

a) $0\le x\le 1$ b) $x=1, x=2$

DẠNG TOÁN 2: XÁC ĐỊNH CÁC BẤT PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG VÀ GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHÉP BIẾN ĐỔI TƯƠNG.

Phương pháp giải.

Để giải bất phương trình ta thực hiện các phép biến đổi để đưa về bất phương trình tương đương với phương trình đã cho đơn giản hơn trong việc giải nó. Một số phép biến đổi thường sử dụng

- Cộng (trừ) cả hai vế của bất phương trình mà không làm thay đổi điều kiện xác định của bất phương trình ta thu được bất phương trình tương đương bất phương trình đã cho.
- Nhân (chia) vào hai vế của bất phương trình với một biểu thức *luôn dương*(hoặc *luôn âm*) và không làm thay đổi điều kiện xác định của phương trình ta thu được bất phương trình *cùng chiều* (hoặc *ngược chiều*) tương đương với bất phương trình đã cho.
- Bình phương hai vế của bất phương trình (hai vế luôn dương) ta thu được bất phương trình tương đương với bất phương trình đã cho.
- Lập phương hai vế của bất phương trình ta thu được bất phương trình tương đương với bất phương trình đã cho.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Trong các bất phương trình sau đây, bất phương trình nào tương đương với bất phương trình $3x+1>0$ (*) :

a) $3x+1-\frac{1}{x-3}>-\frac{1}{x-3}$ b) $3x+1+\frac{x}{\sqrt{3x+1}}>\frac{x}{\sqrt{3x+1}}$

Lời giải

Ta có $3x+1>0\Leftrightarrow x>-\frac{1}{3}$

a) $3x+1-\frac{1}{x-3}>-\frac{1}{x-3}$ (1) không tương đương $3x+1>0$ vì $x=3$ là nghiệm của bất phương trình (*) nhưng không là nghiệm của bất phương trình (1).

b) $3x+1+\frac{x}{\sqrt{3x+1}}>\frac{x}{\sqrt{3x+1}}\Leftrightarrow 3x+1>0\Leftrightarrow x>-\frac{1}{3}$

Do đó $3x+1+\frac{x}{\sqrt{3x+1}}>\frac{x}{\sqrt{3x+1}}$ tương đương $3x+1>0$.

Ví dụ 3: Không giải bất phương trình, hãy giải thích vì sao các bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x.

a) $\sqrt{|x-1|}+x^2\ge 2x-1$ b) $\frac{1}{x^2+1}-(x+1)^2\le\frac{1}{x^2+1}$

Lời giải

a) BPT $\Leftrightarrow\sqrt{|x-1|}+x^2-2x+1\ge 0\Leftrightarrow\sqrt{|x-1|}+(x-1)^2\ge 0$

Do $\sqrt{|x-1|}\ge 0, (x-1)^2\ge 0$ với mọi x nên $\sqrt{|x-1|}+(x-1)^2\ge 0$ với mọi x.

Vậy bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

b) BPT $\Leftrightarrow -(x+1)^2\le 0\Leftrightarrow(x+1)^2\ge 0$ (đúng với mọi x)

Vậy bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 4.56: Trong các bất phương trình sau đây, bất phương trình nào tương đương với bất phương trình $3x+1>0$:

a) $3x+1+\frac{1}{x+3}>\frac{1}{x+3}$ b) $3x+1+\sqrt{x+1}>\sqrt{x+1}$

Hướng dẫn giải

Ta có $3x+1>0\Leftrightarrow x>-\frac{1}{3}$

a) Ta có $3x+1+\frac{1}{x+3}>\frac{1}{x+3}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne -3\\3x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne -3\\x>-\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow x>-\frac{1}{3}$

Do đó $3x+1+\frac{1}{x+3}>\frac{1}{x+3}$ tương đương $3x+1>0$

b) $3x+1+\sqrt{x+1}>\sqrt{x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}x+1>0\\3x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\x>-\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow x>-\frac{1}{3}$

Do đó $3x+1+\sqrt{x+1}>\sqrt{x+1}$ tương đương $3x+1>0$

Bài 4.57: Không giải bất phương trình, hãy giải thích vì sao các bất phương trình sau vô nghiệm.

a) $\sqrt{x+1}>\sqrt{-x-4}$ b) $\sqrt{x+1}\le -x^2+x-1$

Hướng dẫn giải

a) ĐKXĐ: $\begin{cases}x+1>0\\-x-4>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\x<-4\end{cases}$ không tồn tại giá trị nào của x

Suy ra bất phương trình vô nghiệm.

b) Ta có $\sqrt{x+1}\ge 0, -x^2+x-1=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}<0$

Suy ra bất phương trình vô nghiệm.

Bài 4.58: Không giải bất phương trình, hãy giải thích vì sao các bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x.

a) $|x+1|+2x^2-2x+1>0$ b) $\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geq 2$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $|x+1|\geq 0,\ 2x^2-2x+1=(x-1)^2+x^2\geq 0$

Suy ra $|x+1|+2x^2-2x+1\geq 0$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x+1=0 \\ (x-1)^2+x^2=0 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Suy ra $|x+1|+2x^2-2x+1>0$ với mọi x.

Vậy bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

b) Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\geq 2\sqrt{\sqrt{x^2+1}.\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}=2$$

Suy ra bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Bài 4.59: Bạn Bình giải bất phương trình $\sqrt{x+1}\left(\sqrt{2x+2}-1\right)\geq 0$ như sau

Bất phương trình tương đương với

$$\sqrt{2x+2}-1\geq 0\Leftrightarrow\sqrt{2x+2}\geq 1\Leftrightarrow 2x+2\geq 1\Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{2}$$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S=[-\frac{1}{2};+\infty)$.

Theo em ban Bình giải như vậy đúng hay sai? Nếu sai hãy sửa lại cho đúng.

Hướng dẫn giải

Bạn Bình đã mắc sai lầm ở phép biến đổi đầu tiên

Lời giải đúng là:

$$\sqrt{x+1}\left(\sqrt{2x+2}-1\right)\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ \sqrt{2x+2}-1\geq 0 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ \sqrt{2x+2}\geq 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ 2x+2\geq 1 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x\geq -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S=\{-1\}\cup\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

§3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. *Bất phương trình bậc nhất hai ẩn.*

a) **Bất phương trình bậc nhất hai ẩn và miền nghiệm của nó.**

- *Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y* là bất phương trình có một trong các dạng: $ax+by+c<0,\ ax+by+c>0,\ ax+by+c\leq 0,\ ax+by+c\geq 0$ trong đó a, b, c là những số thực đã cho, a và b không đồng thời bằng 0; x và y là các ẩn số.

  Mỗi cặp số $(x_0; y_0)$ sao cho $ax_0+by_0<c$ gọi là **một nghiệm** của bất phương trình $ax+by+c<0$,

  Nghiệm của các bất phương trình dạng $ax+by>c,\ ax+by\leq c,\ ax+by\geq c$ cũng được định nghĩa tương tự.

- Trong mặt phẳng tọa độ thì mỗi nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn được biểu diễn bởi một điểm và tập nghiệm của nó được biểu diễn bởi một tập hợp điểm. Ta gọi tập hợp điểm ấy là **miền nghiệm** của bất phương trình.

b) **Cách xác định miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn.**

Định lí: Trong mặt phẳng tọa độ đường thẳng $(d): ax+by+c=0$ chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Một trong hai nửa mặt phẳng ấy (không kể bờ (d)) gồm các điểm có tọa độ thỏa mãn bất phương trình $ax+by+c>0$, nửa mặt phẳng còn lại (không kể bờ (d)) gồm các điểm có tọa độ thỏa mãn bất phương trình $ax+by+c<0$.

Vậy để xác định miền nghiệm của bất phương trình $ax+by+c<0$, ta có quy tắc thực hành **biểu diễn hình học tập nghiệm** (hay **biểu diễn miền nghiệm**) như sau:

Bước 1. Vẽ đường thẳng (d): $ax+by+c<0$

Bước 2. Xét một điểm $M(x_0;y_0)$ không nằm trên (d).

- Nếu $ax_0+by_0+c<0$ thì nửa mặt phẳng (không kể bờ (d)) chứa điểm M là miền nghiệm của bất phương trình $ax+by+c<0$.
- Nếu $ax_0+by_0+c>0$ thì nửa mặt phẳng (không kể bờ (d)) không chứa điểm M là miền nghiệm của bất phương trình $ax+by+c>0$.

Chú ý: Đối với các bất phương trình dạng $ax+by+c\leq 0$ hoặc $ax+by+c\geq 0$ thì miền nghiệm là nửa mặt phẳng kể cả bờ.

2. *Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn*

Tương tự hệ bất phương trình một ẩn, ta có *hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.*

Trong mặt phẳng tọa độ, ta gọi tập hợp các điểm có tọa độ thỏa mãn mọi bất phương trình trong hệ là ***miền nghiệm của hệ***. Vậy miền nghiệm của hệ là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

Để xác định miền nghiệm của hệ, ta dùng phương pháp biểu diễn hình học như sau:

- Với mỗi bất phương trình trong hệ, ta xác định miền nghiệm của nó và gạch bỏ (tô màu) miền còn lại.
- Sau khi làm như trên lần lượt đối với tất cả các bất phương trình trong hệ trên cùng một mặt phẳng tọa độ, miền còn lại không bị gạch (tô màu) chính là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: *XÁC ĐỊNH MIỀN NGHIỆM CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN.*

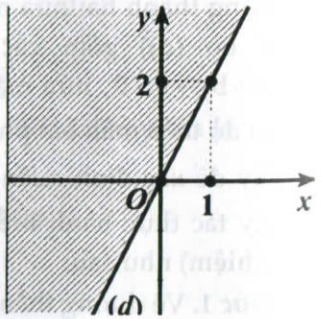
1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Xác định miền nghiệm của các bất phương trình sau:

a) $2x-y\ge 0$ b) $\dfrac{x-2y}{2}>\dfrac{2x+y+1}{3}$

Lời giải

a) Trong mặt phẳng tọa độ, vẽ đường thẳng $(d): 2x-y=0$. Ta có (d) chia mặt phẳng thành hai nửa mặt phẳng. Chọn một điểm bất kì không thuộc đường thẳng đó, chẳng hạn điểm $M(1;0)$. Ta thấy $(1;0)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho. Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng chứa bờ (d) và chứa điểm $M(1;0)$ (Miền không được tô màu trên hình vẽ).



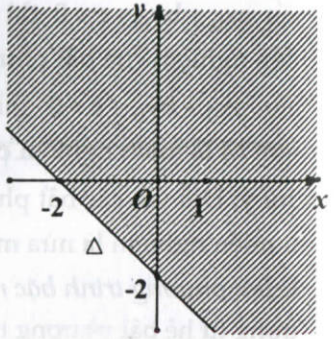
b) Ta có $\dfrac{x-2y}{2}>\dfrac{2x-y+1}{3}$

$\Leftrightarrow 3(x-2y)-2(2x-y+1)>0$

$\Leftrightarrow -x-4y-2>0 \Leftrightarrow x+4y+2<0$

Trong mặt phẳng tọa độ, vẽ đường thẳng $\Delta: x+4y+2=0$

Xét điểm $O(0;0)$, thấy $(0;0)$ không phải là nghiệm của bất phương trình



đã cho do đó miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng bờ Δ (không kể đường thẳng Δ) và không chứa điểm $O(0;0)$ (Miền không được tô màu trên hình vẽ).

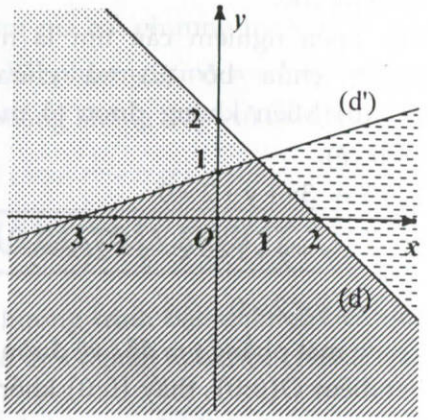
Ví dụ 2: Xác định miền nghiệm của các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} x+y-2\ge 0 \\ x-3y+3\le 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y>0 \\ 2x-3y+6>0 \\ x-2y+1\ge 0 \end{cases}$

Lời giải

a) Vẽ các đường thẳng $(d): x+y-2=0, (d'): x-3y+3=0$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy

Xét điểm $O(0;0)$, thấy $(0;0)$ không phải là nghiệm của bất phương trình $x+y-2\ge 0$ và $x-3y+3\le 0$ do đó miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được tô màu trên hình vẽ kể cả hai đường thẳng (d) và (d').

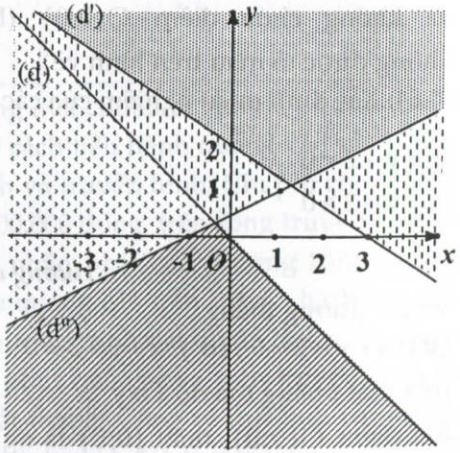


b) Vẽ các đường thẳng $(d): x+y=0, (d'): 2x-3y+6=0$ và $(d''): x-2y+1=0$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy

Xét điểm $O(0;0)$, thấy $(0;0)$ là nghiệm của bất phương trình $2x-3y+6>0$ và $x-2y+1\ge 0$.

Do đó $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình $2x-3y+6>0$ và $x-2y+1\ge 0$.

Xét điểm $M(1;0)$ ta thấy $(1;0)$ là nghiệm của bất phương trình $x+y>0$ do đó điểm $M(1;0)$ thuộc miền nghiệm bất phương trình $x+y>0$.



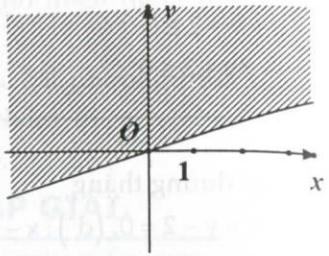
Vậy miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được tô màu trên hình vẽ kể cả đường thẳng (d'').

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 4.60: Xác định miền nghiệm của các bất phương trình sau:

a) $x-3y\ge 0$ b) $\frac{x-y}{-2}<x+y+1$

Hướng dẫn giải



a) Trong mặt phẳng tọa độ, vẽ đường thẳng $(d): x-3y=0$.

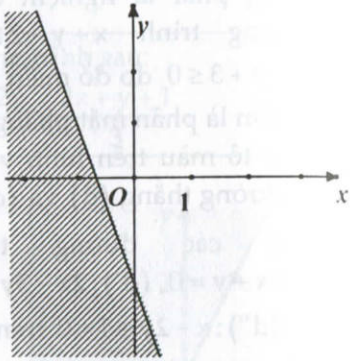
Ta thấy $(1;0)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng chứa bờ (d) và chứa điểm $M(1;0)$ (Miền không được tô màu trên hình vẽ).

b) Ta có $\Delta: 3x+y+2=0$

$\frac{x-y}{-2}<x+y+1\Leftrightarrow x-y+2(x+y+1)>0$

$\Leftrightarrow 3x+y+2>0$



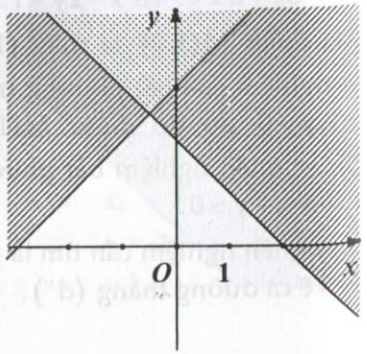
Trong mặt phẳng tọa độ , vẽ đường thẳng

Xét điểm $O(0;0)$, thấy $(0;0)$ không phải là nghiệm của bất phương trình đã cho do đó miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng bờ Δ (không kể đường thẳng Δ) và không chứa điểm $O(0;0)$ (Miền không được tô màu trên hình vẽ).

Bài 4.61: Xác định miền nghiệm của các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases}x+y-2<0\\x-y+3\ge 0\end{cases}$ b) $\begin{cases}x+y+2>0\\2x-3y-6\le 0\\x-2y+3\le 0\end{cases}$

Hướng dẫn giải



a) Vẽ các đường thẳng

$(d): x+y-2=0$, $(d'): x-y+3=0$

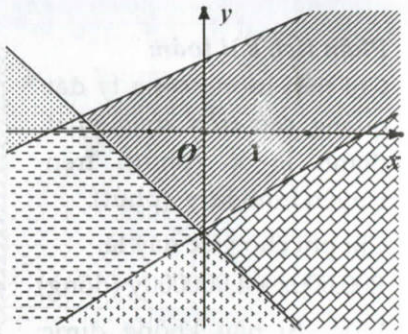
trên mặt phẳng tọa độ Oxy

Xét điểm $O(0;0)$, thấy $(0;0)$ là nghiệm của bất phương trình $x+y-2<0$ và $x-y+3\ge 0$ do đó miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được tô màu trên hình vẽ kể cả đường thẳng (d').

b) Vẽ các đường thẳng

$(d): x+y+2=0$, $(d'): 2x-3y-6=0$

và $(d''): x-2y+3=0$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy



Xét điểm $O(0;0)$, thấy $(0;0)$ là nghiệm của bất phương trình $x+y+2>0$ và $2x-3y-6\le 0$. Do đó $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình $x+y+2>0$ và $2x-3y-6\le 0$.

Xét điểm $M(0;3)$ ta thấy $(0;3)$ là nghiệm của bất phương trình $x-2y+3\le 0$ do đó điểm $M(0;3)$ thuộc miền nghiệm bất phương trình $x-2y+3\le 0$.

Vậy miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được tô màu trên hình vẽ kể cả đường thẳng (d'), (d'').

DẠNG TOÁN 1: *ỨNG DỤNG VÀO BÀI TOÁN KINH TẾ.*

Vấn đề tìm miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất có liên quan chặt chẽ đến ***quy hoạch tuyến tính***. Đó là một ngành toán học có nhiều ứng dụng trong đời sống và kinh tế.

Lưu ý: Ta thừa nhận kết quả sau "Giá trị nhỏ nhất hay lớn nhất của biểu thức $P(x;y)=ax+by\,(b\ne 0)$ trên miền đa giác lồi (kể cả biên) đạt được tại một đỉnh nào đó của đa giác".

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Một công ty kinh doanh thương mại chuẩn bị cho một đợt khuyến mại nhằm thu hút khách hàng bằng cách tiến hành quảng cáo sản phẩm của công ty trên hệ thống phát thanh và truyền hình. Chi phí cho 1 phút quảng cáo trên sóng phát thanh là 800.000 đồng, trên sóng truyền hình là 4.000.000 đồng. Đài phát thanh chỉ nhận phát các chương trình quảng cáo dài ít nhất là 5 phút. Do nhu cầu quảng cáo trên truyền hình lớn nên đài truyền hình chỉ nhận phát các chương trình dài tối đa là 4 phút. Theo các phân tích, cùng thời lượng một phút quảng cáo, trên truyền hình sẽ có hiệu quả gấp 6 lần trên sóng phát thanh. Công ty dự định chi tối đa 16.000.000 đồng cho quảng cáo. Công ty cần đặt thời lượng quảng cáo trên sóng phát thanh và truyền hình như thế nào để hiệu quả nhất?

Lời giải

Phân tích bài toán:

Gọi thời lượng công ty đặt quảng cáo trên sóng phát thanh là x (phút), trên truyền hình là y (phút).

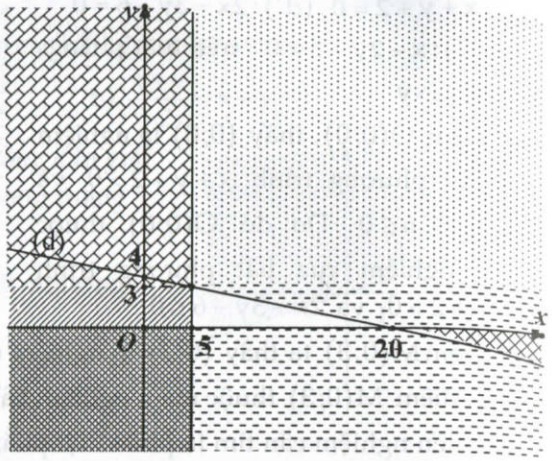
Chi phí cho việc này là:

$800.000x + 4.000000y$ (đồng)

Mức chi này không được phép vượt qúa mức chi tối đa, tức:

$800.000x + 4.000.000y \le 16.000.000$

hay $x + 5y - 20 \le 0$



Do các điều kiện đài phát thanh, truyền hình đưa ra, ta có: $x \ge 5,\ y \le 4$.

Đồng thời do x, y là thời lượng nên $x \ge 0,\ y \ge 0$. Hiệu quả chung của quảng cáo là: $x + 6y$.

Bài toán trở thành:

Xác định x, y sao cho: $M(x;y) = x + 6y$ đạt giá trị lớn nhất.

Với các điều kiện $\begin{cases} x + 5y - 20 \le 0 \\ x \ge 5 \\ 0 \le y \le 4 \end{cases}$ (*)

Trước tiên ta xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình (*)

Trong mặt phẳng tọa độ vẽ các đường thẳng

$(d): x + 5y - 20 = 0,\ (d'): x = 5,\ (d''): y = 4$

Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là phần mặt phẳng (tam giác) không tô màu trên hình vẽ

Giá trị lớn nhất của $M(x;y) = x + 6y$ đạt tại một trong các điểm $(5;3), (5;0), (20;0)$

Ta có $M(5;3) = 23,\ M(5;0) = 5,\ M(20;0) = 20$ suy ra giá trị lớn nhất của $M(x;y)$ bằng 23 tại $(5;3)$ tức là nếu đặt thời lượng quảng cáo trên sóng phát thanh là 5 phút và trên truyền hình là 3 phút thì sẽ đạt hiệu quả nhất.

Ví dụ 2: Một xưởng sản xuất hai loại sản phẩm, mỗi kg sản phẩm loại I cần 2kg nguyên liệu và 30 giờ, đem lại mức lời 40000 đồng. Mỗi kg sản phẩm loại II cần 4kg nguyên liệu và 15 giờ, đem lại mức lời 30000 đồng. Xưởng có 200kg nguyên liệu và 120 giờ làm việc. Nên sản xuất mỗi loại sản phẩm bao nhiêu để có mức lời cao nhất?

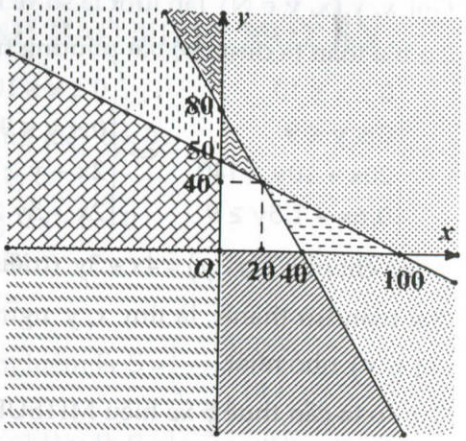
Lời giải

Phân tích bài toán: Gọi $x\ (x \ge 0)$ là số kg loại I cần sản xuất, $y\ (y \ge 0)$ là số kg loại II cần sản xuất.

Suy ra số nguyên liệu cần dùng là $2x + 4y$, thời gian là $30x + 15y$ có mức lời là $40000x + 30000y$

Theo giả thiết bài toán xưởng có 200kg nguyên liệu và 120 giờ làm việc suy ra $2x + 4y \le 200$ hay $x + 2y - 100 \le 0,\ 30x + 15y \le 1200$

hay $2x + y - 80 \le 0$.



Bài toán trở thành:

Tìm x, y thoả mãn hệ $\begin{cases} x + 2y - 100 \le 0 \\ 2x + y - 80 \le 0 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$ (*)

Sao cho $L(x;y) = 40000x + 30000y$ đạt giá trị lớn nhất.

Trong mặt phẳng tọa độ vẽ các đường thẳng

$(d): x + 2y - 100 = 0, (d'): 2x + y - 80 = 0$

Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là phần mặt phẳng(tứ giác) không tô màu trên hình vẽ

Giá trị lớn nhất của $L(x;y) = 40000x + 30000y$

đạt tại một trong các điểm $(0;0), (40;0), (0;50), (20;40)$.

Ta có $L(0;0) = 0,\ L(40;0) = 1600000,\ L(0;50) = 1500000,\ L(20;40) = 2000000$

suy ra giá trị lớn nhất của $L(x;y)$ là 2000000 khi $(x;y) = (20;40)$.

Vậy cần sản xuất 20kg sản phẩm loại I và 40kg sản phẩm loại II để có mức lời lớn nhất.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 4.62: Một công ty cần thuê xe vận chuyển 140 người và 9 tấn hàng hóa. Nơi cho thuê xe chỉ có 10 xe hiệu MITSUBISHI và 9 xe hiệu FORD. Một chiếc xe hiệu MITSUBISHI có thể chở 20 người và 0,6 tấn hàng. Một chiếc xe hiệu FORD có thể chở 10 người và 1,5 tấn hàng. Tiền thuê một xe hiệu MITSUBISHI là 4 triệu đồng, một xe hiệu FORD là 3 triệu đồng. Hỏi phải thuê bao nhiêu xe mỗi loại để chi phí thấp nhất?

Hướng dẫn giải

Gọi x, y $(x, y \in N)$ lần lượt là số xe loại MITSUBISHI, loại FORD cần thuê

Từ bài toán ta được hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 0 \le x \le 10 \\ 0 \le y \le 9 \\ 20x + 10y \ge 140 \\ 0,6x + 1,5y \ge 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 10 \\ 0 \le y \le 9 \\ 2x + y \ge 14 \\ 2x + 5y \ge 30 \end{cases} \quad (*)$$

Tổng chi phí $T(x, y) = 4x + 3y$ (triệu đồng)

Bài toán trở thành là tìm x, y nguyên không âm thoả mãn hệ (*) sao cho $T(x, y)$ nhỏ nhất.

Từ đó ta cần thuê 5 xe hiệu MITSUBISHI và 4 xe hiệu FORD thì chi phí vận tải là thấp nhất.

Bài 4.63: Nhân dịp tết Trung Thu, Xí nghiệp sản xuất bánh Trăng muốn sản xuất hai loại bánh: Đậu xanh, Bánh dẻo nhân đậu xanh. Để sản xuất hai loại bánh này, Xí nghiệp cần: Đường, Đậu, Bột, Trứng, Mứt, ... Giả sử số đường có thể chuẩn bị được là 300kg, đậu là 200kg, các nguyên liệu khác bao nhiêu cũng có. Sản xuất một cái bánh đậu xanh cần 0,06kg đường, 0,08kg đậu và cho lãi 2 ngàn đồng. Sản xuất một cái bánh dẻo cần 0,07kg đường, 0,04kg đậu và cho lãi 1,8 ngàn đồng.

Cần lập kế hoạch để sản xuất mỗi loại bánh bao nhiêu cái để không bị động về đường, đậu và tổng số lãi thu được là lớn nhất (nếu sản xuất bao nhiêu cũng bán hết)?

Hướng dẫn giải

Gọi x, y lần lượt là số cái bánh Đậu xanh, bánh Dẻo $(x, y \in N)$.

Bài toán trở thành tìm số tự nhiên x, y thoả mãn hệ $\begin{cases} 6x + 7y \le 30000 \\ 2x + y \le 5000 \end{cases}$

sao cho $L = 2x + 1,8y$ lớn nhất. Từ đó ta có $\begin{cases} x = 625 \\ y = 3750 \end{cases}$ thì $L = 2x + 1,8y$ đạt giá trị lớn nhất.

Vậy cần 625 bánh đậu xanh và 3750 bánh dẻo thì lãi lớn nhất.

§4. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. **Giải và biện luận bất phương trình dạng $ax + b < 0$.**

Giải bất phương trình dạng $ax + b < 0$ (1)

- Nếu $a = 0$ thì bất phương trình có dạng $0.x + b < 0$
  - Với $b < 0$ thì tập nghiệm BPT là $S = \mathbb{R}$
  - Với $b \ge 0$ thì tập nghiệm BPT là $S = \varnothing$
- Nếu $a > 0$ thì $(1) \Leftrightarrow x < -\dfrac{b}{a}$ suy ra tập nghiệm là $S = \left(-\infty; -\dfrac{b}{a}\right)$
- Nếu $a < 0$ thì $(1) \Leftrightarrow x > -\dfrac{b}{a}$ suy ra tập nghiệm là $S = \left(-\dfrac{b}{a}; +\infty\right)$

Các bất phương trình dạng $ax + b > 0, ax + b \le 0, ax + b \ge 0$ được giải hoàn toàn tương tự

2. **Hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn**

Để giải hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn ta giải từng bất phương trình của hệ bất phương trình. Khi đó tập nghiệm của hệ bất phương trình là giao của các tập nghiệm từng bất phương trình.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: *GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH DẠNG* $ax + b < 0$.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Giải và biện luận bất phương trình sau.

a) $mx + 6 \le 2x + 3m$ b) $(x + m)m + x > 3x + 4$

c) $(m^2 + 9)x + 3 \ge m(1 - 6x)$ d) $m(m^2x + 2) < x + m^2 + 1$

Lời giải

a) Bất phương trình tương đương với $(m - 2)x < 3m - 6$

Với $m = 2$ bất phương trình trở thành $0x \le 0$ suy ra bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Với $m > 2$ bất phương trình tương đương với $x < \dfrac{3m - 6}{m - 2} = 3$

Với $m < 2$ bất phương trình tương đương với $x > \dfrac{3m - 6}{m - 2} = 3$

Kết luận

$m=2$ bất phương trình nghiệm đúng với mọi x (có tập nghiệm là $S=\mathbb{R}$).

$m>2$ bất phương trình có nghiệm là $x<3$ (có tập nghiệm là $S=(-\infty;3)$)

$m<2$ bất phương trình có nghiệm là $x>3$ (có tập nghiệm là $S=(3;+\infty)$)

b) Bất phương trình tương đương với $(m-2)x>4-m^2$

Với $m=2$ bất phương trình trở thành $0x>0$ suy ra bất phương trình vô nghiệm.

Với $m>2$ bất phương trình tương đương với $x>\dfrac{4-m^2}{m-2}=-m-2$

Với $m<2$ bất phương trình tương đương với $x<\dfrac{4-m^2}{m-2}=-m-2$

Kết luận

$m=2$ bất phương trình vô nghiệm

$m>2$ bất phương trình có nghiệm là $x>-m-2$

$m<2$ bất phương trình có nghiệm là $x<-m-2$

c) Bất phương trình tương đương với $(m+3)^2x\geq m-3$

Với $m=-3$ bất phương trình trở thành $0x\geq -6$ suy ra bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Với $m\neq -3$ bất phương trình tương đương với $x\geq\dfrac{m-3}{(m+3)^2}$

Kết luận

$m=-3$ bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

$m\neq -3$ bất phương trình có nghiệm là $x\geq\dfrac{m-3}{(m+3)^2}$.

d) Bất phương trình tương đương với $\Leftrightarrow\left(m^3-1\right)x<m^2-2m+1$

$\Leftrightarrow(m-1)x<\dfrac{(m-1)^2}{m^2+m+1}$ (vì $m^2+m+1=\left(m+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$)

Với $m=1$ bất phương trình trở thành $0x<0$ suy ra bất phương trình vô nghiệm.

Với $m>1$ bất phương trình tương đương với $x<\dfrac{m-1}{m^2+m+1}$

Với $m<1$ bất phương trình tương đương với $x>\dfrac{m-1}{m^2+m+1}$

Kết luận

$m=1$ bất phương trình vô nghiệm

$m>1$ bất phương trình có nghiệm là $x<\dfrac{m-1}{m^2+m+1}$

$m<1$ bất phương trình có nghiệm là $x>\dfrac{m-1}{m^2+m+1}$.

Ví dụ 2. Tìm m để bất phương trình $\left(m^2-m\right)x+m<6x-2$ vô nghiệm.

Lời giải

Bất phương trình tương đương với $\left(m^2-m-6\right)x<-2-m$

Rõ ràng nếu $m^2-m-6\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq -2\\ m\neq 3\end{cases}$ bất phương trình luôn có nghiệm.

Với $m=-2$ bất phương trình trở thành $0x<0$ suy ra bất phương trình vô nghiệm

Với $m=3$ bất phương trình trở thành $0x<-5$ suy ra bất phương trình vô nghiệm

Vậy giá trị cần tìm là $m=-2$ và $m=3$.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 4.64: Giải và biện luận các bất phương trình:

a) $m(x-m)\leq x-1$.

b) $3x+m^2\geq m(x+3)$.

Hướng dẫn giải

a) $m(x-m)\leq x-1\Leftrightarrow(m-1)x\leq m^2-1$

Nếu: $m=1$ thì $0x\leq 2$ (đúng). Tập nghiệm: $S=R$.

Nếu: $m>1$ thì $x\leq m+1$. Tập nghiệm: $S=(-\infty;m+1]$.

Nếu: $m<1$ thì $x\geq m+1$. Tập nghiệm: $S=[m+1;+\infty)$.

b) $3x+m^2\geq m(x+3)\Leftrightarrow(m-3)x\leq m^2-3m$.

Nếu: $m=3$ thì bất phương trình $0x\leq 0$: nghiệm với mọi x.

Nếu: $m>3$ thì bất phương trình có nghiệm $x\leq m$.

Nếu: $m<3$ thì bất phương trình có nghiệm $x\geq m$.

Bài 4.65: a) Tìm m để bất phương trình $mx-2\leq x-m$ vô nghiệm.

b) Tìm m để bất phương trình $m^2(x-1)\geq 9x+3m$ có nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

a) Bất phương trình tương đương với $(m-1)x\leq 2-m$

Rõ ràng nếu $m\neq 1$ bất phương trình luôn có nghiệm.

Xét $m=1$ bất phương trình trở thành $0x\leq 1$ suy ra bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Vậy không có giá trị nào của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Bất phương trình tương đương với $(m^2-9)x \ge m^2+3m$

Dễ dàng thấy nếu $m^2-9 \ne 0 \Leftrightarrow m \ne \pm 3$ thì bất phương trình không thể có nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$

Với $m = 3$ bất phương trình trở thành $0x > 18$ suy ra bất phương trình vô nghiệm

Với $m = -3$ bất phương trình trở thành $0x \ge 0$ suy ra bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Vậy giá trị cần tìm là $m = -3$.

Bài 4.66: Cho hàm số $f(x) = (2m+1)x - 3m + 2$.

a) Tìm m để phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm $x \in [0;1]$.

b) Tìm m để $f(x) \ge 0$ với mọi $x \in [-1;2]$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên $[0;1]$ là một đoạn thẳng AB với $A(0;-3m+2)$ và $B(1;-m+3)$ nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên $[0;1] \Leftrightarrow$ đoạn thẳng AB có điểm chung với trục hoành $\Leftrightarrow$ các điểm đầu mút A, B nằm về hai phía của Ox (có thể nằm trên Ox). Điều này có nghĩa là

$f(0).f(1) \le 0 \Leftrightarrow (-3m+2)(-m+3) \le 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \le m \le 3$.

b) Ta có $f(x) \ge 0$ với mọi $x \in [-1;2] \Leftrightarrow$ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ nằm trên Ox $\Leftrightarrow$ hai đầu mút của đoạn thẳng đó đều nằm trên Ox

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) \ge 0 \\ f(2) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5m+1 \ge 0 \\ m+4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \le m \le \frac{1}{5}.$$

Bài 4.67: Tìm m để bất phương trình $m(2x-1) \ge 2x+1$ có tập nghiệm là $[1;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Bất phương trình tương đương với $(2m-2)x \ge m+1$

Với $m = 1$ thì bất phương trình vô nghiệm do đó không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m > 1$ bất phương trình tương đương với $x \ge \frac{m+1}{2m-2}$

Do đó để bất phương trình có tập nghiệm là $[1;+\infty)$ thì $\frac{m+1}{2m-2} = 1 \Leftrightarrow m = 3$ (thỏa mãn)

Với $m < 1$ bất phương trình tương đương với $x \le \frac{m+1}{2m-2}$ suy ra $m < 1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $m = 3$ là giá trị cần tìm.

Bài 4.68: Tìm m để hai bất phương trình sau tương đương

$(2-m)x + 2m + 4 \ge 0$ và $(m+1)x + m^2 - 4 \ge 0$.

Hướng dẫn giải

* Với $m = 2$ bất phương trình $(2-m)x + 2m + 4 \ge 0$ (1) trở thành $0.x + 8 \ge 0$ (nghiệm đúng với mọi x), bất phương trình $(m+1)x + m^2 - 4 \ge 0$ (2) trở thành $3x \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 0$ do đó hai bất phương trình không tương đương.
* Với $m = -1$ bất phương trình (1) trở thành $3x + 2 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -\frac{2}{3}$, bất phương trình (2) trở thành $0.x - 3 \ge 0$ (vô nghiệm) do đó hai bất phương trình không tương đương.
* Với $m > 2$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán
* Với $-1 < m < 2$ ta có $(1) \Leftrightarrow x \ge \frac{2m+4}{m-2}$, $(2) \Leftrightarrow x \ge \frac{4-m^2}{m+1}$

Suy ra hai bất phương trình tương đương $\Leftrightarrow \frac{2m+4}{m-2} = \frac{4-m^2}{m+1} \Leftrightarrow m = -2$ (loại)

* Với $m < -1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán

Vậy không có giá trị nào của m để hai bất phương trình tương đương.

DẠNG TOÁN 2: *GIẢI HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN.*

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. Giải các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} 6x + \frac{5}{7} < 4x + 7 \\ \frac{8x+3}{2} < 2x + 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 1 \le 2x - 3 \\ 3x < x + 5 \\ \frac{5-3x}{2} \le x - 3 \end{cases}$

Lời giải

a) Hệ bất phương trình tương đương với

$$\begin{cases} 6x + \frac{5}{7} < 4x + 7 \\ \frac{8x+3}{2} < 2x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{22}{7} \\ x < \frac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x < \frac{7}{4}$$

Vậy hệ bất phương trình có nghiệm là $x < \frac{7}{4}$.

b) Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} x \ge 2 \\ x < \frac{5}{2} \\ x \ge \frac{11}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{11}{5} \le x \le \frac{5}{2}$

Vậy hệ bất phương trình có nghiệm là $\frac{11}{5} \le x \le \frac{5}{2}$.

Ví dụ 2. Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm.

a) $\begin{cases} 2x-1 \le x+2 \\ m(m+1)x+4m \ge (m-2)x+3m^2+6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} m(mx-1)<2 \\ m(mx-2) \ge 2m+1 \end{cases}$

Lời giải

a) Hệ bất phương trình tương đương với

$$\begin{cases} x \le 3 \\ (m^2+2)x \ge 3m^2-4m+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 3 \\ x \ge \frac{3m^2-4m+6}{m^2+2} \end{cases}$$

Suy ra hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$\frac{3m^2-4m+6}{m^2+2} \le 3 \Leftrightarrow m \ge 0$.

Vậy $m \ge 0$ là giá trị cần tìm.

b) Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} m^2x < m+2 \\ m^2x \ge 4m+1 \end{cases}$

Với $m=0$ ta có hệ bất phương trình trở thành $\begin{cases} 0x<2 \\ 0x \ge 1 \end{cases}$ suy ra hệ bất phương trình vô nghiệm

Với $m \ne 0$ ta có hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} x < \frac{m+2}{m^2} \\ x \ge \frac{4m+1}{m^2} \end{cases}$

Suy ra hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\frac{m+2}{m^2} > \frac{4m+1}{m^2} \Leftrightarrow m < \frac{1}{3}$

Vậy $m < \frac{1}{3}$ là giá trị cần tìm.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 4.69: Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm.

a) $\begin{cases} 4(x-3)+1 \le 3(x-3) \\ x+m>1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2(x+5)<3(x+4) \\ -3x-8 \ge 5(x-8) \\ m(x+2)<(m+1)x+m-2 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} x \le 2 \\ x > 1-m \end{cases}$

Suy ra hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $2 > 1-m \Leftrightarrow m > -1$

Vậy $m > -1$ là giá trị cần tìm.

b) Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} x > -2 \\ x \le 4 \\ x > m+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x \le 4 \\ x > m+2 \end{cases}$

Suy ra hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi

$m+2 \le 4 \Leftrightarrow m \le 2$

Vậy $m \le 2$ là giá trị cần tìm.

Bài 4.70: Tìm m để hệ bất phương trình sau vô nghiệm.

a) $\begin{cases} 2x+7 \ge 8x+1 \\ m+5<2x \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+5 \ge x-1 \\ (x+2)^2 \le (x-1)^2+9 \\ mx+1>(m-2)x+m \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a) Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} x \le 1 \\ x > \frac{m+5}{2} \end{cases}$

Suy ra hệ bất phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow 1 \le \frac{m+5}{2} \Leftrightarrow m \ge -3$

Vậy $m \ge -3$ là giá trị cần tìm.

b) Hệ bất phương trình tương đương với $\begin{cases} x \ge -3 \\ x \le 1 \\ x > \frac{m-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le x \le 1 \\ x > \frac{m-1}{2} \end{cases}$

Suy ra hệ bất phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow \frac{m-1}{2} \ge 1 \Leftrightarrow m \ge 3$

Vậy $m \ge 3$ là giá trị cần tìm.

Bài 4.71: Tìm m để phương trình $15x^2-11xy+2y^2=-7$ có nghiệm thỏa mãn $\begin{cases}x<y\\2m^2x+3my<0\end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Ta thấy nếu $y=0$ thì phương trình vô nghiệm

Với $y\neq 0$. Đặt $x=ty$ khi đó: $15x^2-11xy+2y^2=-7\Leftrightarrow y^2\left(15t^2-11t+2\right)=-7$

$$\begin{cases}x<y\\2m^2x+3my<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y(t-1)<0\\y(2m^2t+3m)<0\end{cases}\quad(*)$$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 15t^2-11t+2<0\Leftrightarrow(3t-1)(5t-2)<0\Leftrightarrow\frac{1}{3}<t<\frac{2}{5}$

Do đó $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}y>0\\2m^2t+3m<0\end{cases}$

Như vậy ta cần tìm m để hệ bất phương trình $\begin{cases}\frac{1}{3}<t<\frac{2}{5}\\2m^2t+3m<0\end{cases}$ (**) có nghiệm với ẩn t.

Với $m=0$ thì hệ bất phương trình (**) có nghiệm

Với $m\neq 0$ $(**)\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{3}<t<\frac{2}{5}\\t<-\frac{3}{2m}\end{cases}$ do đó

Hệ bất phương trình (**) có nghiệm $\Leftrightarrow -\frac{3}{2m}>\frac{1}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m>0\\m<-\frac{9}{2}\end{cases}\\\begin{cases}m<0\\m>\frac{9}{2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow -\frac{9}{2}<m<0.$

Vậy $-\frac{9}{2}<m<0$ là những giá trị cần tìm.

DẠNG TOÁN 3: *BẤT PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH, HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN.*

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Giải và biện luận bất phương trình $\frac{mx-m+1}{x-1}>0$

Lời giải

ĐKXĐ: $x\neq 1$

Bất phương trình tương đương với

$\begin{cases}x>1\\mx-m+1>0\end{cases}$ (3) hoặc $\begin{cases}x<1\\mx-m+1<0\end{cases}$ (4)

+ TH1: $m>0$ ta có (3) $\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x>\frac{1-m}{m}\end{cases}$ và (4) $\Leftrightarrow\begin{cases}x<1\\x<\frac{1-m}{m}\end{cases}$

Nếu $\frac{1-m}{m}>1\Leftrightarrow m<\frac{1}{2}$ khi đó (3) $\Leftrightarrow x>\frac{1-m}{m}$ và (4) $\Leftrightarrow x<1$

Suy ra nghiệm của bất phương trình là $x\in(-\infty;1)\cup\left(\frac{1-m}{m};+\infty\right)$

Nếu $\frac{1-m}{m}=1\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$ khi đó (3) $\Leftrightarrow x>1$ và (4) $\Leftrightarrow x<1$

Suy ra nghiệm của bất phương trình là $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Nếu $\frac{1-m}{m}<1\Leftrightarrow m>\frac{1}{2}$ khi đó (3) $\Leftrightarrow x>1$ và (4) $\Leftrightarrow x<\frac{1-m}{m}$

Suy ra nghiệm của bất phương trình là $x\in\left(-\infty;\frac{1-m}{m}\right)\cup(1;+\infty)$

+ TH2: $m=0$ ta có (3) trở thành $\begin{cases}x>1\\0x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow x>1$,

(4) trở thành $\begin{cases}x<1\\0x+1<0\end{cases}$ (vô nghiệm)

Suy ra nghiệm của bất phương trình là $x\in(1;+\infty)$

+ TH3: $m<0$ ta có (3) $\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x<\frac{1-m}{m}\end{cases}$ và (4) $\Leftrightarrow\begin{cases}x<1\\x>\frac{1-m}{m}\end{cases}$

Nếu $\frac{1-m}{m}>1\Leftrightarrow m<\frac{1}{2}$ khi đó (3) $\Leftrightarrow x\in\left(1;\frac{1-m}{m}\right)$

và (4) $\Leftrightarrow x\in(-\infty;1)\cup\left(\frac{1-m}{m};+\infty\right)$

Suy ra với $m<0$ nghiệm của bất phương trình là $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{1;\frac{1-m}{m}\right\}$

Kết luận

$0<m<\frac{1}{2}$ tập nghiệm bất phương trình là $S=(-\infty;1)\cup\left(\frac{1-m}{m};+\infty\right)$

$m=\frac{1}{2}$ tập nghiệm bất phương trình là $S=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$m>\frac{1}{2}$ tập nghiệm bất phương trình là $S=\left(-\infty;\frac{1-m}{m}\right)\cup(1;+\infty)$

$m=0$ tập nghiệm bất phương trình là $S=(1;+\infty)$

$m<0$ tập nghiệm bất phương trình là $S=\mathbb{R}\setminus\left\{1;\frac{1-m}{m}\right\}$

Ví dụ 2: Tìm tất cả các giá trị của m để

a) Bất phương trình $mx+4>0$ (1) nghiệm đúng với mọi $|x|<8$

b) Bất phương trình $\frac{mx}{x^2+1}-2m-3<0$ (2) nghiệm đúng với mọi $x\in(0;+\infty)$

Lời giải

a) *Cách 1:* Ta có $|x|<8\Leftrightarrow -8<x<8\Leftrightarrow x\in(-8;8)$

+ TH1: $m>0$ ta có $(1)\Leftrightarrow mx>-4\Leftrightarrow x>-\frac{4}{m}$

Suy ra tập phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $|x|<8$ khi và chỉ khi

$(-8;8)\subset S\Leftrightarrow -\frac{4}{m}\le -8\Leftrightarrow m\le\frac{1}{2}$ nghiệm bất phương trình (1) là $S=\left(\frac{-4}{m};+\infty\right)$

Suy ra $0<m\le\frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ TH2: $m=0$ khi đó bất phương trình (1) trở thành $0.x+4>0$ (đúng với mọi x)
Do đó $m=0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

+ TH3: $m<0$ ta có $(1)\Leftrightarrow mx>-4\Leftrightarrow x<-\frac{4}{m}$

Suy ra tập nghiệm bất phương trình (1) là $S=\left(-\infty;-\frac{4}{m}\right)$

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $|x|<8$ khi và chỉ khi

$$(-8;8)\subset S\Leftrightarrow -\frac{4}{m}\ge 8\Leftrightarrow m\ge-\frac{1}{2}$$

Suy ra $-\frac{1}{2}\le m<0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $-\frac{1}{2}\le m\le\frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Cách 2: Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $|x|<8$ khi và chỉ khi $mx+4>0,\ \forall x\in(-8;8)$

Xét hàm số $f(x)=mx+4$. Ta biết đồ thị là một đường thẳng do đó

$$f(x)=mx+4>0,\ \forall x\in(-8;8)\Leftrightarrow\begin{cases}f(-8)\ge 0\\ f(8)\ge 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-8m+4\ge 0\\ 8m+4\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le\frac{1}{2}\\ m\ge-\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le m\le\frac{1}{2}$$

Vậy $-\frac{1}{2}\le m\le\frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

b) Đặt $t=\frac{x}{x^2+1}$ bất phương trình trở thành $mt-2m-3<0$

Với $x>0$ ta có $\frac{x}{x^2+1}\le\frac{x}{2\sqrt{x^2}}=\frac{1}{2}$ khi đó $0<t\le\frac{1}{2}$

Bất phương trình (2) nghiệm đúng với mọi $x\in(0;+\infty)$ khi và chỉ khi bất phương trình $mt-2m-3<0$ đúng với mọi

$$t\in\left[0;\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}-2m-3\le 0\\ \frac{1}{2}m-2m-3<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge-\frac{3}{2}\\ m>-2\end{cases}\Leftrightarrow m\ge-\frac{3}{2}$$

Vậy $m\ge-\frac{3}{2}$ là giá trị cần tìm.

Nhận xét: Bất phương trình $f(x)=ax+b>0,\ \forall x\in[\alpha;\beta]\Leftrightarrow\begin{cases}f(\alpha)>0\\ f(\beta)>0\end{cases}$

Bất phương trình $f(x)=ax+b>0,\ \forall x\in(\alpha;\beta)\Leftrightarrow\begin{cases}f(\alpha)\ge 0\\ f(\beta)\ge 0\end{cases}$. Các trường hợp khác tương tự.

Ví dụ 3: Cho phương trình $(m+1)x^2-(4m+3)x+4m+1=0$ (1). Tìm m để phương trình (1)

a) Có một nghiệm lớn hơn 2 và một nghiệm nhỏ hơn 2.

b) Có ít nhất một nghiệm lớn hơn 2

Lời giải

Đặt $y=x-2\Rightarrow x=y+2$ khi đó phương trình (1) trở thành

$$(m+1)(y+2)^2-(4m+3)(y+2)+4m+1=0$$

$$\Leftrightarrow(m+1)y^2+4(m+1)y+4(m+1)-(4m+3)y-2(4m+3)+4m+1=0$$

$$\Leftrightarrow(m+1)y^2+y-1=0\ (2)$$

a) Phương trình (1) có một nghiệm lớn hơn 2 một nghiệm nhỏ hơn 2 khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm trái

+ TH1: Với $m=-1$ phương trình (2) trở thành $y-1=0\Leftrightarrow y=1$ suy ra $m=-1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán

+ TH2: Với $m\neq -1$ phương trình (2) là phương trình bậc hai do đó nó có hai nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow P<0\Leftrightarrow \frac{-1}{m+1}<0\Leftrightarrow m+1>0\Leftrightarrow m>-1$$

Vậy với $m>-1$ thì phương trình (1)

b) Ta có phương trình (1) có ít nhất một nghiệm lớn hơn hoặc bằng 2 khi và chỉ khi phương trình (2) có ít nhất một nghiệm dương.

• Với $m=-1$ phương trình (2) trở thành $y-1=0\Leftrightarrow y=1$ suy ra $m=-1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

• Với $m\neq -1$ phương trình (2) là phương trình bậc hai

+ TH1: Phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\S>0\\P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+4(m+1)>0\\-\dfrac{1}{m+1}>0\\-\dfrac{1}{m+1}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-\dfrac{5}{4}\\m<-1\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{5}{4}<m<-1$$

+ TH2: Phương trình (2) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow m>-1$ (theo câu a)

+ TH3: Phương trình (2) có nghiệm kép dương

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=0\\S>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+4(m+1)=0\\-\dfrac{1}{m+1}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-\dfrac{5}{4}\\m<-1\end{cases}\Leftrightarrow m=-\frac{5}{4}$$

+ TH4: Phương trình (2) có một nghiệm dương và một nghiệm bằng không

$$\Leftrightarrow\begin{cases}S>0\\P=0\\\Delta>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{1}{m+1}>0\\-\dfrac{1}{m+1}=0\\1+4(m+1)>0\end{cases}$$ (không tồn tại giá trị nào của m)

Vậy $m\geq -\frac{5}{4}$ là giá trị cần tìm.

Nhận xét: Để so sánh nghiệm phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ với số thực α ta đặt $y=x-\alpha$ và quy về việc xét dấu nghiệm của phương trình bậc hai

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 4.72: Giải và biện luận bất phương trình $\frac{2x+m-1}{x+1}>0$

Hướng dẫn giải

ĐKXĐ: $x\neq -1$

Bất phương trình tương đương với $\begin{cases}x>-1\\2x+m-1>0\end{cases}$ (1) hoặc $\begin{cases}x<-1\\2x+m-1<0\end{cases}$ (2)

Ta có $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\x>\dfrac{1-m}{2}\end{cases}$, $(2)\Leftrightarrow\begin{cases}x<-1\\x<\dfrac{1-m}{2}\end{cases}$

Nếu $\frac{1-m}{2}>-1\Leftrightarrow m<3$ thì $(1)\Leftrightarrow x>\frac{1-m}{2}$, $(2)\Leftrightarrow x<-1$

Suy ra bất phương trình có nghiệm là $x\in(-\infty;-1)\cup\left(\frac{1-m}{2};+\infty\right)$

Nếu $\frac{1-m}{2}=-1\Leftrightarrow m=3$ thì $(1)\Leftrightarrow x>-1$, $(2)\Leftrightarrow x<-1$

Suy ra bất phương trình có nghiệm là $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Nếu $\frac{1-m}{2}<-1\Leftrightarrow m>3$ thì $(1)\Leftrightarrow x>-1$, $(2)\Leftrightarrow x<\frac{1-m}{2}$

Suy ra nghiệm của bất phương trình là $x\in\left(-\infty;\frac{1-m}{2}\right)\cup(-1;+\infty)$

Kết luận

$m<3$ tập nghiệm bất phương trình là $S=(-\infty;-1)\cup\left(\frac{1-m}{2};+\infty\right)$

$m=3$ tập nghiệm bất phương trình là $S=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$m>3$ tập nghiệm bất phương trình là $S=\left(-\infty;\frac{1-m}{2}\right)\cup(-1;+\infty)$.

Bài 4.73: Tìm điều kiện của m để phương trình $2x^2+(2m-1)x+m-1=0$

a) Có hai nghiệm khác dấu

b) Có hai nghiệm phân biệt đều âm

c) Có hai nghiệm phân biệt đều dương

d) Có hai nghiệm bằng nhau về giá trị tuyệt đối và trái dấu nhau

Hướng dẫn giải

a) Phương trình có hai nghiệm khác dấu khi $P<0$ hay $m-1<0\Leftrightarrow m<1$.

b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt đều âm khi

$$\begin{cases}\Delta>0\\S<0\\P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2m-3)^2>0\\1-2m<0\\m-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>1\\m\neq\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

c) Phương trình có hai nghiệm phân biệt đều dương khi

$$\begin{cases}\Delta>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2m-3)^2>0\\ 1-2m>0\\ m-1>0\end{cases}\Leftrightarrow \text{không có giá trị nào của m thoả mãn}$$

d) Phương trình có hai nghiệm bằng nhau về giá trị tuyệt đối và trái dấu nhau hay phương trình có hai nghiệm đối nhau.

Phương trình có hai nghiệm đối nhau khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\Delta\ge 0\\ S=0\end{cases}\Leftrightarrow 1-2m=0\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}.$$

Bài 4.74: Giải và biện luận bất phương trình $\sqrt{4-x}\left[\left(m^2+1\right)x-5m^2\right]\le 0$

Hướng dẫn giải

Ta có bpt $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\ \begin{cases}x<4\\ \left(m^2+1\right)x-5m^2\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\ \begin{cases}x<4\\ x\le\dfrac{5m^2}{m^2+1}\end{cases}\end{array}\right.$ (*)

- Nếu $\frac{5m^2}{m^2+1}<4\Leftrightarrow m^2<4\Leftrightarrow -2<m<2$ ta có (*) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\ x\le\dfrac{5m^2}{m^2+1}\end{array}\right.$
- Nếu $\frac{5m^2}{m^2+1}\ge 4\Leftrightarrow m^2\ge 4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\ge 2\\ m\le -2\end{array}\right.$: (*) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\ x<4\end{array}\right.\Leftrightarrow x\le 4$

Bài 4.75: Tìm m để phương trình $\left(x^2-2x\right)^2-2m\left(x^2-2x\right)+m+3=0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=x^2-2x+1$ khi đó $t\ge 0$, suy ra $x^2-2x=t-1$. Thay vào phương trình (1) ta được phương trình sau: $t^2-2(m+1)t+m+4=0$ (*)

Để phương trình ban đầu có 2 nghiệm phân biệt thì pt (*) có 2 nghiệm thỏa $t_1<0<t_2$, hoặc phương trình (*) có 2 nghiệm thỏa $0<t_1=t_2$.

- Phương trình (2) có nghiệm $t_1<0<t_2\Leftrightarrow P<0\Leftrightarrow m+4<0\Leftrightarrow m<-4$.
- Phương trình (2) có nghiệm

$$0<t_1=t_2\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=0\\ S>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+m-3=0\\ m+1>0\end{cases}\Leftrightarrow m=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}.$$

Kết luận: với $m\in(-\infty;-4)\cup\left\{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right\}$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

§5. DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Nhị thức bậc nhất và dấu của nó.

a) Định nghĩa nhị thức bậc nhất:

Nhị thức bậc nhất (đối với x) là biểu thức dạng $ax+b$, trong đó a và b là hai số cho trước với $a\ne 0$.

$x_0=-\frac{b}{a}$ được gọi là nghiệm của nhị thức bậc nhất $f(x)=ax+b$.

b) Dấu của nhị thức bậc nhất

Định lí: Nhị thức bậc nhất $f(x)=ax+b$ cùng dấu với hệ số a khi x lớn hơn nghiệm và trái dấu với hệ số a x nhỏ hơn nghiệm của nó.

2. Một số ứng dụng.

a) Giải bất phương trình tích

- Dạng $P(x)>0$ (1) (trong đó $P(x)$ là tích các nhị thức bậc nhất.)
- Cách giải: Lập bảng xét dấu của $P(x)$. Từ đó suy ra tập nghiệm của (1).

b) Giải bất phương trình chứa ẩn ở mẫu

- Dạng $\frac{P(x)}{Q(x)}>0$ (2) (trong đó $P(x)$, $Q(x)$ là tích những nhị thức bậc nhất.)
- Cách giải: Lập bảng xét dấu của $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Từ đó suy ra tập nghiệm của (2).

Chú ý: 1) Không nên qui đồng và khử mẫu.

2) Rút gọn bớt các nhị thức có lũy thừa bậc chẵn (cần lưu ý trong việc rút gọn để tránh làm mất nghiệm).

c) Giải bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối(GTTĐ)

- Tương tự như giải phương trình chứa ẩn trong dấu GTTĐ, ta thường sử dụng định nghĩa hoặc tính chất của GTTĐ để khử dấu GTTĐ.

Chú ý: Với $B>0$ ta có $|A|<B\Leftrightarrow -B<A<B$; $|A|>B\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}A<-B\\ A>B\end{array}\right.$.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: *LẬP BẢNG XÉT DẤU BIỂU THỨC CHỨA NHỊ THỨC BẬC NHẤT HAI ẨN.*

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Lập bảng xét dấu các biểu thức sau

a) $-2x+3$ b) $4x-12$ c) x^2-4 d) $-2x^2+5x-2$

Lời giải

a) Ta có $-2x+3=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$, $a=-2<0$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x+3$		+	0	−	

b) Ta có $4x-12=0 \Leftrightarrow x=3$, $a=4>0$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$4x-12$		−	0	+	

c) Ta có $x^2-4=(x-2)(x+2)$, $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$, $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x+2$		−	0	+	|	+	
$x-2$		−	|	−	0	+	
x^2-4		+	0	−	0	+	

d) Ta có $-2x^2+5x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Suy ra $-2x^2+5x-2=-2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)=(x-2)(1-2x)$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$1-2x$		+	0	−	|	−	
$x-2$		−	|	−	0	+	
$-2x^2+5x-2$		−	0	+	0	−	

Ví dụ 2: Lập bảng xét dấu các biểu thức sau

a) $\frac{-2x+3}{x-2}$ b) $\frac{4x-12}{x^2-4x}$ c) $x\left(4-x^2\right)(x+2)$ d) $1-\frac{4x^2}{(x+1)^2}$

Lời giải

a) Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$-2x+3$		+	0	−	|	−	
$x-2$		−	|	−	0	+	
$\frac{-2x+3}{x-2}$		−	0	+	||	−	

b) Ta có $\frac{4x-12}{x^2-4x}=\frac{4x-12}{x(x-4)}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		3		4		$+\infty$
$4x-12$		−	|	−	0	+	|	+	
x		−	0	+	|	+	|	+	
$x-4$		−	|	−	|	−	0	+	
$\frac{4x-12}{x^2-4x}$		−	||	+	0	−	||	+	

c) Ta có $x\left(4-x^2\right)(x+2)=x(2-x)(x+2)^2$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
x		−	|	−	0	+	|	+	
$2-x$		+	|	+	|	+	0	−	
$x+2$		−	0	+	|	+	|	+	
$x\left(4-x^2\right)(x+2)$		−	0	−	0	+	0	−	

d) Ta có $1-\frac{4x^2}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^2-4x^2}{(x+1)^2}=\frac{(3x+1)(1-x)}{(x+1)^2}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$3x+1$		−	|	−	0	+	|	+	
$1-x$		+	|	+	|	+	0	−	
$x+1$		−	0	+	|	+	|	+	
$1-\frac{4x^2}{(x+1)^2}$		−	||	−	0	+	0	−	

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 4.76: Lập bảng xét dấu các biểu thức sau

a) $-4x+8$ b) $3x+9$

c) x^2+4x+3 d) $-3x^2+10x-3$

Hướng dẫn giải

a) Ta có $-4x+8=0 \Leftrightarrow x=2$, $a=-4<0$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$-4x+8$		+	0	−	

b) Ta có $3x+9=0 \Leftrightarrow x=-3$, $a=4>0$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$3x+9$		−	0	+	

c) Ta có $x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$, $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$, $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$x+1$		−	‖	−	0	+	
$x+3$		−	0	+	|	+	
x^2+4x+3		+	0	−	0	+	

d) Ta có $-3x^2+10x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$

Suy ra $-3x^2+10x-3=(x-3)(1-3x)$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$1-3x$		+	0	−	|	−	
$x-3$		−	|	−	0	+	
$-3x^2+10x-3$		−	0	+	0	−	

Bài 4.77: Lập bảng xét dấu các biểu thức sau

a) $\dfrac{-2x+4}{x-3}$ b) $\dfrac{4x-8}{x^2-3x}$ c) $x\left(9-x^2\right)(x+3)$ d) $\dfrac{x^2}{(x+1)^2}-1$

Hướng dẫn giải

a) Bảng xét dấu

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$-2x+4$		+	0	−	|	−	
$x-3$		−	|	−	0	+	
$\dfrac{-2x+4}{x-3}$		−	0	+	‖	−	

b) Ta có $\dfrac{4x-8}{x^2-3x}=\dfrac{4x-8}{x(x-3)}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$4x-8$		−	|	−	0	+	|	+	
x		−	0	+	|	+	|	+	
$x-3$		−	|	−	|	−	0	+	
$\dfrac{4x-8}{x^2-3x}$		−	‖	+	0	−	‖	+	

c) Ta có $x\left(9-x^2\right)(x+3)=x(3-x)(x+3)^2$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
x		−	|	−	0	+	|	+	
$3-x$		+	|	+	|	+	0	−	
$x+3$		−	0	+	|	+	|	+	
$x\left(9-x^2\right)(x+3)$		−	0	−	0	+	0	−	

d) Ta có $\dfrac{x^2}{(x+1)^2}-1=\dfrac{(x+1)^2-x^2}{(x+1)^2}=\dfrac{2x+1}{(x+1)^2}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x+1$		−	|	−	0	+	
$x+1$		−	0	+	|	+	
$\dfrac{x^2}{(x+1)^2}-1$		−	‖	−	0	+	

DẠNG TOÁN 2: *ỨNG DỤNG XÉT DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT HAI ẨN VÀO GIẢI TOÁN.*

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Giải các bất phương trình sau

a) $(x-1)(2-3x)\ge 0$ b) $(x-2)\left(x^2-5x+4\right)<0$

c) $(2x-1)\left(x^3-1\right)\le 0$ d) $x\left(\sqrt{3}x-3\right)\left(3-x^2\right)\le 0$

Lời giải

a) Ta có $(x-1)(2-3x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$x-1$		−	|	−	0	+	
$2-3x$		+	0	−	|	−	
$(x-1)(2-3x)$		−	0	+	0	−	

Suy ra bất phương trình có tập nghiệm là $S=\left[\dfrac{2}{3};1\right]$.

b) Ta có $(x-2)\left(x^2-5x+4\right)=(x-2)(x-1)(x-4)$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		2		4		$+\infty$
$x-1$		−	0	+	|	+	|	+	
$x-2$		−	|	−	0	+	|	+	
$x-4$		−	|	−	|	−	0	+	
$(x-2)\left(x^2-5x+4\right)$		−	0	+	0	−	0	+	

Suy ra bất phương trình có tập nghiệm là $S=(-\infty;1)\cup(2;4)$.

c) Ta có $(2x-1)\left(x^3-1\right)\le 0\Leftrightarrow(2x-1)(x-1)\left(x^2+x+1\right)\le 0$

$\Leftrightarrow(2x-1)(x-1)\le 0$ (vì $x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$)

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$x-1$		−	|	−	0	+	
$2x-1$		−	0	+	|	+	
$(x-1)(2-3x)$		+	0	−	0	+	

Suy ra bất phương trình có tập nghiệm là $S=\left[\dfrac{1}{2};1\right]$.

d) Ta có $x\left(\sqrt{3}x-3\right)\left(3-x^2\right)\le 0\Leftrightarrow x\sqrt{3}\left(x-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+x\right)\le 0$

$\Leftrightarrow-\sqrt{3}x\left(x-\sqrt{3}\right)^2\left(x+\sqrt{3}\right)\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{3}\\x\left(x+\sqrt{3}\right)\ge 0\end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$+\infty$
x		−	|	−	0	+	
$x+\sqrt{3}$		−	0	+	|	+	
$(x-1)(2-3x)$		+	0	−	0	+	

Suy ra $x\left(x+\sqrt{3}\right)\ge 0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-\sqrt{3}]\cup[0;+\infty)$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;-\sqrt{3}]\cup[0;+\infty)$

Ví dụ 2: Giải các bất phương trình sau:

a) $|2x+1|<3x$ b) $\||2x-1|-4|>3$ c) $|x+1|-|x-2|\ge 3$

Lời giải

a) Với $x\ge-\dfrac{1}{2}$ ta có bất phương trình tương đương với $2x+1<3x\Leftrightarrow x>1$

Kết hợp với điều kiện $x\ge-\dfrac{1}{2}$ suy ra bất phương trình có tập nghiệm là $(1;+\infty)$

Với $x<-\dfrac{1}{2}$ ta có bất phương trình tương đương với $-2x-1<3x\Leftrightarrow x>-\dfrac{1}{5}$

Kết hợp với điều kiện $x<-\dfrac{1}{2}$ suy ra bất phương trình vô nghiệm

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(1;+\infty)$.

b) Ta có $\||2x-1|-4|>3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|2x-1|-4>3\\|2x-1|-4<-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|2x-1|>7\\|2x-1|<1\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-1>7\\2x-1<-7\\-1<2x-1<1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>4\\x<-3\\0<x<1\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;-3)\cup(0;1)\cup(4;+\infty)$.

c) Bảng xét dấu

x	$-\infty$		−1		2		$+\infty$
$x+1$		−	0	+	|	+	
$x-2$		−	|	−	0	+	

Từ bảng xét dấu đó ta chia ra các trường hợp sau

Với $x<-1$ ta có bất phương trình tương đương với

$$-(x+1)+(x-2)\geq 3 \Leftrightarrow -3\geq 3 \text{ (vô nghiệm)}$$

Với $-1\leq x<2$ ta có bất phương trình tương đương với

$$(x+1)+(x-2)\geq 3 \Leftrightarrow x\geq 2$$

Kết hợp với điều kiện $-1\leq x<2$ suy ra bất phương trình vô nghiệm

Với $x\geq 2$ ta có bất phương trình tương đương với

$$(x+1)-(x-2)\geq 3 \Leftrightarrow 3\geq 3$$

Kết hợp với điều kiện $x\geq 2$ suy ra bất phương trình có nghiệm là $x\geq 2$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=[2;+\infty)$.

Ví dụ 3: Giải các bất phương trình sau:

a) $\dfrac{|x-2|-x}{x}<1$ b) $\dfrac{|x-1|-1}{x^4-x^2}\geq 0$

Lời giải

a) Với $x\geq 2$ ta có bất phương trình tương đương với

$$\frac{x-2-x}{x}<1 \Leftrightarrow \frac{-2}{x}<1 \Leftrightarrow x>-2$$

Kết hợp điều kiện $x\geq 2$ suy ra tập nghiệm bất phương trình là $S_1=[2;+\infty)$

Với $x<2$ ta có bất phương trình tương đương với

$$\frac{2-x-x}{x}<1 \Leftrightarrow \frac{2-2x}{x}<1 \Leftrightarrow 1-\frac{2-2x}{x}>0 \Leftrightarrow \frac{3x-2}{x}>0$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$3x-2$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$\frac{3x-2}{x}$		$+$	$\vert\vert$	$-$	0	$+$	

Kết hợp điều kiện $x<2$ suy ra tập nghiệm bất phương trình là

$$S_2=(-\infty;0)\cup\left(\frac{2}{3};2\right).$$

Vậy tập nghiệm bất phương trình là $S=S_1\cup S_2=(-\infty;0)\cup(\frac{2}{3};+\infty)$

b) ĐKXĐ: $x^4-x^2\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq \pm 1 \end{cases}$

Ta có $\dfrac{|x-1|-1}{x^4-x^2}\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{(|x-1|+1)(|x-1|-1)}{x^4-x^2}\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{|x-1|^2-1}{x^4-x^2}\geq 0$

$$\frac{x^2-x}{x^4-x^2}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{x^2(x-1)(x+1)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x(x+1)}\geq 0$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
x		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$\frac{1}{x(x+1)}$		$+$	$\vert\vert$	$-$	$\vert\vert$	$+$	

Kết hợp điều kiện xác đinh suy ra tập nghiệm bất phương trình là

$$S=(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)\setminus\{1\}.$$

Nhận xét:

* Đối với bất phương trình phức tạp chúng ta nên đặt điều kiện xác định sau đó rồi rút gọn cho biểu thức chung hoặc rút gọn biểu thức luôn xác định một dấu.
* Nhiều khi chúng ta cần phải nhân hay chia với một biểu thức luôn xác định một dấu nhằm khử đi căn thức hay dấu giá trị tuyệt đối thì bài toán trở nên đơn giản hơn.

Ví dụ 4: Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} \dfrac{(x-\sqrt{2})(2-2x)}{(2x-1)(x+2)}\geq 0 \ (1) \\ mx>2 \qquad (2) \end{cases}$

a) Giải hệ bất phương trình khi $m=-1$

b) Tìm m để hệ bất phương trình có nghiệm

Lời giải

ĐKXĐ: $\begin{cases} x\neq -2 \\ x\neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Ta có $(1) \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}(x-\sqrt{2})(\sqrt{2}-x)}{(2x-1)(x+2)}\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2} \\ \dfrac{1}{(2x-1)(x+2)}\leq 0 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$2x-1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$\frac{1}{(2x-1)(x+2)}$		$+$	$\vert\vert$	$-$	$\vert\vert$	$+$	

Kết hợp với điều kiện suy ra tập nghiệm bất phương trình (1) là

$$S_1 = \left(-2;\frac{1}{2}\right) \cup \left\{\sqrt{2}\right\}.$$

a) Khi $m = -1$ ta có bất phương trình (2) trở thành $-x > 2 \Leftrightarrow x < -2$

Kết hợp với điều kiện suy ra tập nghiệm bất phương trình (2) là $S_2 = (-\infty;-2)$

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình là $S = S_1 \cap S_2 = \varnothing$.

b) Với $m = 0$ bất phương trình (2) trở thành $0.x > 2$ suy ra bất phương trình vô nghiệm do đó hệ bất phương trình vô nghiệm

- Với $m > 0$ bất phương trình $(2) \Leftrightarrow x > \dfrac{2}{m}$

Đối chiếu với điều kiện ta có

Nếu $\dfrac{2}{m} \geq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m \leq 4$ thì tập nghiệm bất phương trình (2) là $S_2 = \left(\dfrac{2}{m};+\infty\right)$

Hệ bất phương trình có nghiệm

$$\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m \leq 4 \\ \dfrac{2}{m} < \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m \leq 4 \\ m > \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2} < m \leq 4$$

Nếu $\dfrac{2}{m} < \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow m > 4$ thì tập nghiệm bất phương trình (2) là $S_2 = \left(\dfrac{2}{m};+\infty\right) \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

Hệ bất phương trình có nghiệm

$$\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ \dfrac{2}{m} < \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m > \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow m > 4$$

- Với $m < 0$ bất phương trình $(2) \Leftrightarrow x < \dfrac{2}{m}$

Đối chiếu với điều kiện ta có

Nếu $\dfrac{2}{m} > -2 \Leftrightarrow m > -1$ thì tập nghiệm bất phương trình (2) là

$$S_2 = \left(-\infty;\frac{2}{m}\right) \setminus \{-2\}$$

Hệ bất phương trình có nghiệm

$$\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 0 \\ \dfrac{2}{m} > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 0 \\ m > -1 \end{cases} \Rightarrow -1 < m < 0$$

Nếu $\dfrac{2}{m} \leq -2 \Leftrightarrow m \leq -1$ thì tập nghiệm bất phương trình (2) là $S_2 = \left(-\infty;\dfrac{2}{m}\right)$

Hệ bất phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ \dfrac{2}{m} > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m > -1 \end{cases}$ (loại)

Vậy hệ bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-1 < m < 0$ và $m > 4$.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 4.78: Giải các bất phương trình sau:

a) $3x^2 - 10x + 3 \geq 0$

b) $\dfrac{1}{x+9} - \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{2}$

c) $\dfrac{2}{1-2x} \leq \dfrac{3}{x+1}$

d) $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt[3]{3x-1} + \sqrt[3]{4-5x}} \geq 0$

Hướng dẫn giải

a) BXD :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
VT		+	0	−	0	+	

Tập nghiệm : $T = (-\infty;\frac{1}{3}] \cup [3;+\infty)$.

b) $\text{Bpt} \Leftrightarrow \dfrac{(x+3)(x+6)}{x(x+9)} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -9 < x < -6 \\ -3 < x < 0 \end{array}\right.$.

c) $\text{Bpt} \Leftrightarrow \dfrac{8x-1}{(2x-1)(x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \dfrac{1}{2} \\ -1 < x \leq \dfrac{1}{8} \end{array}\right.$.

d) $\sqrt[3]{3x-1} + \sqrt[3]{4-5x} > 0 \Leftrightarrow 3 - 2x > 0$

Suy ra $\sqrt[3]{3x-1} + \sqrt[3]{4-5x}$ cùng dấu với $3-2x$

$$\frac{x^2-2x-3}{\sqrt[3]{3x-1}+\sqrt[3]{4-5x}} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-3)}{3-2x} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{3}{2} < x \leq 3 \\ x \leq -1 \end{array}\right.$$

§6. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Tam thức bậc hai

Tam thức bậc hai (đối với x) là biểu thức dạng ax^2+bx+c. Trong đó a,b,c là những số cho trước với $a\neq 0$.

Nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c=0$ được gọi là *nghiệm của tam thức bậc hai* $f(x)=ax^2+bx+c$; $\Delta=b^2-4ac$ và $\Delta'=b'^2-ac$ theo thứ tự được gọi là biệt thức và biệt thức thu gọn của tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c$.

2. Dấu của tam thức bậc hai

Dấu của tam thức bậc hai được thể hiện trong bảng sau

$f(x)=ax^2+bx+c,\ (a\neq 0)$	
$\Delta<0$	$a.f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$
$\Delta=0$	$a.f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$
$\Delta>0$	$a.f(x)>0,\ \forall x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$
	$a.f(x)<0,\ \forall x\in(x_1;x_2)$

Nhận xét: Cho tam thức bậc hai ax^2+bx+c

- $ax^2+bx+c>0,\forall x\in R\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}$
- $ax^2+bx+c\geq 0,\forall x\in R\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta\leq 0\end{cases}$
- $ax^2+bx+c<0,\forall x\in R\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta<0\end{cases}$
- $ax^2+bx+c\leq 0,\forall x\in R\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta\leq 0\end{cases}$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: *XÉT DẤU CỦA BIỂU THỨC CHỨA TAM THỨC BẬC HAI.*

Phương pháp giải.

Dựa vào định lí về dấu của tam thức bậc hai để xét dấu của biểu thức chứa nó.

* Đối với đa thức bậc cao $P(x)$ ta làm như sau

- Phân tích đa thức $P(x)$ thành tích các tam thức bậc hai (hoặc có cả nhị thức bậc nhất)
- Lập bảng xét dấu của $P(x)$. Từ đó suy ra dấu của nó.

* Đối với phân thức $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (trong đó $P(x),Q(x)$ là các đa thức) ta làm như sau

- Phân tích đa thức $P(x),Q(x)$ thành tích các tam thức bậc hai (hoặc có cả nhị thức bậc nhất)
- Lập bảng xét dấu của $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Từ đó suy ra dấu của nó.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Xét dấu của các tam thức sau

a) $-x^2+4x+5$ b) $3x^2-2x-8$ c) $-2x^2+6x-5$

Lời giải

a) Ta có $-x^2+4x+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=5\end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$-x^2+4x+5$		$-$	0	$+$	$\vert$	$-$	

Suy ra $-x^2+4x+5>0\Leftrightarrow x\in(-1;5)$ và $-x^2+4x+5<0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(5;+\infty)$

b) Ta có $3x^2-2x-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-\frac{4}{3}\end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		2		$+\infty$
$3x^2-2x-8$		$+$	0	$-$	$\vert$	$+$	

Suy ra

$3x^2-2x-8>0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right)\cup(2;+\infty)$ và $3x^2-2x-8<0\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{4}{3};2\right)$

c) Ta có $\Delta'=-1<0,\ a<0$ suy ra $-2x^2+6x-5<0\ \forall x\in\mathbb{R}$

Nhận xét:

Cho tam thức bậc hai ax^2+bx+c. Xét nghiệm của tam thức, nếu:

* Vô nghiệm khi đó tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c$ cùng dấu với a với mọi x

* Nghiệm kép khi đó tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c$ cùng dấu với a với mọi $x\neq-\frac{b}{2a}$

* Có hai nghiệm $f(x)$ cùng dấu với a khi và chỉ khi $x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$ (ngoài hai nghiệm) và $f(x)$ trái dấu với a khi và chỉ khi $x\in(x_1;x_2)$ (trong hai nghiệm)(ta có thể nhớ câu là trong trái ngoài cùng)

Ví dụ 2: Tùy theo giá trị của tham số m, hãy xét dấu của các biểu thức
$f(x) = x^2 + 2mx + 3m - 2$

Lời giải

Tam thức f(x) có $a = 1 > 0$ và $\Delta' = m^2 - 3m + 2$.

* Nếu $1 < m < 2 \Rightarrow \Delta' < 0 \Rightarrow f(x) > 0 \ \forall x \in R$.

* Nếu $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \Delta' = 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \ \forall x \in R$ và $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -m$

* Nếu $\left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < 1 \end{array}\right. \Rightarrow \Delta' > 0 \Rightarrow f(x)$ có hai nghiệm

$x_1 = -m - \sqrt{m^2 - 3m + 2}$ và $x_2 = -m + \sqrt{m^2 - 3m + 2}$. Khi đó:

+) $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$

+) $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (x_1; x_2)$.

Ví dụ 3: Xét dấu của các biểu thức sau

a) $\left(-x^2 + x - 1\right)\left(6x^2 - 5x + 1\right)$ b) $\dfrac{x^2 - x - 2}{-x^2 + 3x + 4}$

Lời giải

a) Ta có $-x^2 + x - 1 = 0$ vô nghiệm, $6x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ hoặc $x = \dfrac{1}{3}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$-x^2 + x - 1$		−	0	−	|	−	
$6x^2 - 5x + 1$		+	|	−	0	+	
$\left(-x^2 + x - 1\right)\left(6x^2 - 5x + 1\right)$		−	0	+	0	−	

Suy ra $\left(-x^2 + x - 1\right)\left(6x^2 - 5x + 1\right)$ dương khi và chỉ khi $x \in \left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{2}\right)$

$\left(-x^2 + x - 1\right)\left(6x^2 - 5x + 1\right)$ âm khi và chỉ khi $x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{3}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$

b) Ta có $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$, $-x^2 + 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 4 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
$x^2 - x - 2$		+	0	−	0	+	|	+	
$-x^2 + 3x + 4$		−	0	+	|	+	0	−	
$\dfrac{x^2 - x - 2}{-x^2 + 3x + 4}$		−	||	−	0	+	||	−	

Suy ra $\dfrac{x^2 - x - 2}{-x^2 + 3x + 4}$ dương khi và chỉ khi $x \in (2; 4)$,

$\dfrac{x^2 - x - 2}{-x^2 + 3x + 4}$ âm khi và chỉ khi $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup (4; +\infty)$.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 4.79: Xét dấu các tam thức sau

a) $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$ b) $g(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - x + 1$ c) $h(x) = -2x^2 + x - 1$.

Hướng dẫn giải

a) Tam thức f(x) có $a = -2 < 0$, có hai nghiệm $x_1 = \dfrac{1}{2}$; $x_2 = 1$

* $f(x) > 0$ (trái dấu với a) $\Leftrightarrow x \in (\dfrac{1}{2}; 1)$

* $f(x) < 0$ (cùng dấu với a) $\Leftrightarrow x \in (-\infty; \dfrac{1}{2}) \cup (1; +\infty)$.

b) Tam thức g(x) có $a = \dfrac{1}{4} > 0$, có $\Delta = 0 \Rightarrow g(x) > 0$ (cùng dấu với a) $\forall x \neq \dfrac{1}{2}$ và $g(\dfrac{1}{2}) = 0$.

c) Tam thức g(x) có $a = -2 > 0$, có $\Delta = -7 < 0 \Rightarrow g(x) < 0$ (cùng dấu với a) $\forall x \in R$.

Bài 4.80: Xét dấu các biểu thức sau

a) $f(x) = (x^2 - 5x + 4)(2 - 5x + 2x^2)$ b) $f(x) = x^2 - 3x - 2 - \dfrac{8}{x^2 - 3x}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = 4$

$2 - 5x + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2; x = \dfrac{1}{2}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		2		4		$+\infty$
$x^2 - 5x + 4$		+	|	+	0	−	|	−	0	+	
$2x^2 - 5x + 2$		+	0	−	|	−	0	+	|	+	
f(x)		+	0	−	0	+	0	−	0	+	

b) Ta có: $f(x)=\dfrac{(x^2-3x)^2-2(x^2-3x)-8}{x^2-3x}=\dfrac{(x^2-3x+2)(x^2-3x-4)}{x^2-3x}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	0	1	2	3	4	$+\infty$
x^2-3x	+	|	+	0	−	|	−	0	+	|	+
x^2-3x-4	+	0	−	|	−	|	−	|	−	0	+
x^2-3x+2	+	|	+	|	+	0	−	0	+	|	+	|	+
f(x)	+	||	−	0	+	||	−	||	+	0	−	||	+

Bài 4.81: Xét dấu các biểu thức sau

a) $\dfrac{1}{x+9}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}$ b) x^4-4x+1.

c) $\dfrac{3x+7}{x^2-x-2}+5$ d) x^3-3x+2

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $f(x)=\dfrac{2x-2(x+9)-x(x+9)}{2x(x+9)}=\dfrac{-x^2-9x-18}{2x(x+2)}$

$\Rightarrow f(x)>0\Leftrightarrow x\in(-6;-3)\cup(2;0)$

$f(x)<0\Leftrightarrow(-\infty;-6)\cup(-3;2)\cup(0;+\infty)$

b) Ta có: $f(x)=x^4+2x^2+1-2(x^2+2x+1)=(x^2+1)^2-\left[\sqrt{2}(x+1)\right]^2$

$\Rightarrow f(x)=\left(x^2-\sqrt{2}x+1-\sqrt{2}\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1+\sqrt{2}\right)$

$\Rightarrow f(x)>0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2};+\infty\right)$

$f(x)<0\Leftrightarrow\left(\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}\right)$

c) $\dfrac{5x^2-2x-3}{x^2-x-2}>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup\left(-\dfrac{3}{5};1\right)\cup(2;+\infty)$

Và $\dfrac{5x^2-2x-3}{x^2-x-2}<0\Leftrightarrow x\in\left(-1;-\dfrac{3}{5}\right)\cup(1;2)$

d) $f(x)=(x-1)^2(x+2)\Rightarrow f(x)>0\Leftrightarrow x\in(-2;+\infty)\setminus\{1\}$

$f(x)<0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-2)$

Bài 4.82: Tùy theo giá trị của tham số m, hãy xét dấu của biểu thức

$$g(x)=(m-1)x^2+2(m-1)+m-3$$

Hướng dẫn giải

Nếu $m=1\Rightarrow g(x)=-2<0\ \forall x\in R$

Nếu $m\neq 1$, khi đó $g(x)$ là tam thức bậc hai có $a=m-1$ và $\Delta'=2(m-1)$, do đó ta có các trường hợp sau:

* $m>1$ có hai nghiệm phân biệt

$x_1=\dfrac{m-1-\sqrt{2(m-1)}}{m-1}$ và $x_2=\dfrac{m-1+\sqrt{2(m-1)}}{m-1}$.

$\Rightarrow g(x)>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$; $g(x)<0\Leftrightarrow x\in(x_1;x_2)$.

* $m<1\Rightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta'<0\end{cases}\Rightarrow g(x)<0\ \forall x\in R$.

DẠNG TOÁN 2: *BÀI TOÁN CHỨA THAM SỐ LIÊN QUAN ĐẾN TAM THỨC BẬC HAI LUÔN MANG MỘT DẤU.*

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì

a) Phương trình $mx^2-(3m+2)x+1=0$ luôn có nghiệm

b) Phương trình $\left(m^2+5\right)x^2-\left(\sqrt{3}m-2\right)x+1=0$ luôn vô nghiệm

Lời giải

a) Với $m=0$ phương trình trở thành $-2x+1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ suy ra phương trình có nghiệm

Với $m\neq 0$, ta có $\Delta=(3m+2)^2-4m=9m^2+8m+4$

Vì tam thức $9m^2+8m+4$ có $a_m=9>0$, $\Delta'_m=-20<0$

nên $9m^2+8m+4>0$ với mọi m

Do đó phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi m.

b) Ta có $\Delta=\left(\sqrt{3}m-2\right)^2-4\left(m^2+5\right)=-m^2-4\sqrt{3}m-16$

Vì tam thức $-m^2-4\sqrt{3}m-16$ có $a_m=-1<0$, $\Delta'_m=-8<0$

nên $-m^2-4\sqrt{3}m-16<0$ với mọi m

Do đó phương trình đã cho luôn vô nghiệm với mọi m.

Ví dụ 2: Tìm các giá trị của m để biểu thức sau luôn âm

a) $f(x)=mx^2-x-1$ b) $g(x)=(m-4)x^2+(2m-8)x+m-5$

Lời giải

a) Với $m=0$ thì $f(x)=-x-1$ lấy cả giá trị dương(chẳng hạn $f(-2)=1$) nên $m=0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán

Với $m\neq 0$ thì $f(x)=mx^2-x-1$ là tam thức bậc hai dó đó

$$f(x)<0,\forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a=m<0 \\ \Delta=1+4m<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ m<-\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m<-\frac{1}{4}$$

Vậy với $m<-\dfrac{1}{4}$ thì biểu thức $f(x)$ luôn âm.

b) Với $m=4$ thì $g(x)=-1<0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Với $m\neq 4$ thì $g(x)=(m-4)x^2+(2m-8)x+m-5$ là tam thức bậc hai dó đó $g(x)<0,\forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a=m-4<0 \\ \Delta'=(m-4)^2-(m-4)(m-5)<0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m<4 \\ m-4<0 \end{cases} \Leftrightarrow m<4$$

Vậy với $m\leq 4$ thì biểu thức $g(x)$ luôn âm.

Ví dụ 3: Tìm các giá trị của m để biểu thức sau luôn dương

a) $h(x)=\dfrac{-x^2+4(m+1)x+1-4m^2}{-4x^2+5x-2}$ b) $k(x)=\sqrt{x^2-x+m}-1$

Lời giải

a) Tam thức $-4x^2+5x-2$ có $a=-4<0, \Delta=-7<0$ suy ra $-4x^2+5x-2<0\ \forall x$

Do đó $h(x)$ luôn dương khi và chỉ khi $h'(x)=-x^2+4(m+1)x+1-4m^2$ luôn âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1<0 \\ \Delta'=4(m+1)^2+\left(1-4m^2\right)<0 \end{cases} \Leftrightarrow 8m+5<0 \Leftrightarrow m<-\frac{5}{8}$$

Vậy với $m<-\dfrac{5}{8}$ thì biểu thức $h(x)$ luôn dương.

b) Biểu thức $k(x)$ luôn dương $\Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+m}-1>0,\forall x$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+m}>1,\forall x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x+m>0 \\ x^2-x+m-1>0 \end{cases},\forall x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1>0 \\ \Delta_1=1-4m<0 \\ \Delta_2=1-4(m-1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>\dfrac{1}{4} \\ m>\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m>\frac{5}{4}$$

Vậy với $m>\dfrac{5}{4}$ thì biểu thức $k(x)$ luôn dương.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 4.83: Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì

a) Phương trình $x^2-2(m+2)x-(m+3)=0$ luôn có nghiệm

b) Phương trình $\left(m^2+1\right)x^2+\left(\sqrt{3}m-2\right)x+2=0$ luôn vô nghiệm

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\Delta=(m+2)^2+m+3=m^2+5m+7$

Vì tam thức m^2+5m+7 có $a_m=1>0, \Delta'_m=-2<0$ nên $x=-4, x=0$ với mọi m

Do đó phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi m.

b) Ta có $\Delta=\left(\sqrt{3}m-2\right)^2-8\left(m^2+1\right)=-5m^2-4\sqrt{3}m-4$

Vì tam thức $-5m^2-4\sqrt{3}m-4$ có $a_m=-5<0, \Delta'_m<0$ nên $-5m^2-4\sqrt{3}m-4<0$ với mọi m. Do đó phương trình đã cho luôn vô nghiệm với mọi m.

Bài 4.84: Tìm các giá trị của m để biểu thức sau luôn âm

a) $f(x)=-x^2-2x-m$ b) $g(x)=4mx^2-4(m-1)x+m-3$

Hướng dẫn giải

a) $f(x)<0,\forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1<0 \\ \Delta'=1-4m<0 \end{cases} \Leftrightarrow m>\dfrac{1}{4}$

Vậy với $m>\dfrac{1}{4}$ thì biểu thức $f(x)$ luôn âm.

b) Với $m=0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán

Với $m\neq 0$ thì $g(x)=4mx^2-4(m-1)x+m-3$ là tam thức bậc hai dó đó

$$g(x)<0,\forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a=4m<0 \\ \Delta'=4(m-1)^2-4m(m-3)<0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ 4m+4<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ m<-1 \end{cases} \Leftrightarrow m<-1$$

Vậy với $m<-1$ thì biểu thức $g(x)$ luôn âm.

Bài 4.85: Chứng minh rằng hàm số sau có tập xác định là $\mathbb{R}$ với mọi giá trị của m.

a) $y=\sqrt{m^2x^2-4mx+m^2-2m+5}$ b) $y=\dfrac{2x+3m}{\sqrt{x^2+2(1-m)x+2m^2+3}}$

Hướng dẫn giải

a) ĐKXĐ: $m^2x^2-4mx+m^2-2m+5\ge 0$ (*)

Với $m=0$ thì điều kiện (*) đúng với mọi x

Với $m\ne 0$ xét tam thức bậc hai $f(x)=m^2x^2-4mx+m^2-2m+5$

Ta có $a=m^2>0$

$\Delta'=4m^2-m^2\left(m^2-2m+5\right)=-m^2\left(m^2-2m+1\right)=-m^2(m-1)^2<0$

Suy ra $f(x)=m^2x^2-4mx+m^2-2m+5\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}$

Do đó với mọi m ta có $m^2x^2-4mx+m^2-2m+5\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

b) ĐKXĐ: $x^2+2(1-m)x+2m^2+3>0$

Xét tam thức bậc hai $f(x)=x^2+2(1-m)x+2m^2+3$

Ta có $a=1>0,\ \Delta'=(1-m)^2-\left(2m^2+3\right)=-m^2-2m-2<0$

(Vì tam thức bậc hai $f(m)=-m^2-2m-2$ có $a_m=-1<0,\ \Delta'_m=-1<0$)

Suy ra với mọi m ta có $x^2+2(1-m)x+2m^2+3>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

Bài 4.86: Tìm m để

a) $3x^2-2(m+1)x-2m^2+3m-2\ge 0\ \ \forall x\in R$

b) Hàm số $y=\sqrt{(m+1)x^2-2(m-1)x+3m-3}$ có nghĩa với mọi x.

c) $\left|\dfrac{x+m}{x^2+x+1}\right|\le 1\quad \forall x\in R$

Hướng dẫn giải

a) $3x^2-2(m+1)x-2m^2+3m-2\ge 0\ \ \forall x\in R$

$\Leftrightarrow \Delta'=(m+1)^2+3(2m^2-3m+2)\le 0\ \ 7m^2-7m+7\le 0$ bpt vô nghiệm

Vậy không có m thỏa mãn yêu cầu bài toán

b) Hàm số có nghĩa với mọi x

$\Leftrightarrow (m+1)x^2-2(m-1)x+3m-3\ge 0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$ (1)

* $m=-1$ không thỏa mãn

* $m\ne -1\Rightarrow (1)\Leftrightarrow \begin{cases} m+1>0 \\ \Delta'=(m-1)(-2m-4)\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow m\ge 1$

c) Ta có $x^2+x+1>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \left|\dfrac{x+m}{x^2+x+1}\right|\le 1\Leftrightarrow -1\le\dfrac{x+m}{x^2+x+1}\le 1\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1-m\ge 0 & (1) \\ x^2+2x+m+1\ge 0 & (2) \end{cases}$

(1) đúng $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow 1-m\ge 0\Leftrightarrow m\le 1$

(2) đúng $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \Delta'=-m\le 0\Leftrightarrow m\ge 0$

Vậy $0\le m\le 1$ là những giá trị cần tìm.

§7. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa và cách giải

Bất phương trình bậc hai (ẩn x) là bất phương trình có một trong các dạng $f(x)>0,\ f(x)<0,\ f(x)\ge 0,\ f(x)\le 0$, trong đó $f(x)$ là một tam thức bậc hai.

Cách giải. Để giải bất phương trình bậc hai, ta áp dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai.

2. Ứng dụng

Giải bất phương trình tích, thương chứa các tam thức bậc hai bằng cách lập bảng xét dấu của chúng.

DẠNG TOÁN 1: *GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI*

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Giải các bất phương trình sau:

a) $-3x^2+2x+1<0$ b) $x^2+x-12<0$

c) $5x^2-6\sqrt{5}x+9>0$ d) $-36x^2+12x-1\ge 0$

Lời giải

a) Tam thức $f(x)=-3x^2+2x+1$ có $a=-3<0$ và có hai nghiệm $x_1=-\dfrac{1}{3}$; $x_2=1$ ($f(x)$ cùng dấu với hệ số a).

Suy ra $-3x^2+2x+1<0\Leftrightarrow x<-\dfrac{1}{3}$ hoặc $x>1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S=(-\infty;-\dfrac{1}{3})\cup(1;+\infty)$.

b) Tam thức $f(x)=x^2+x-12$ có $a=1>0$ và có hai nghiệm $x_1=-4;\ x_2=3$

($f(x)$ trái dấu với hệ số a).

Suy ra $x^2+x-12<0\Leftrightarrow -4<x<3$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-4;3)$

c) Tam thức $f(x)=5x^2-6\sqrt{5}x+9$ có $a=5>0$ và $\Delta=0$

($f(x)$ cùng dấu với hệ số a).

Suy ra $5x^2-6\sqrt{5}x+9>0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{3\sqrt{5}}{5}\right\}$

d) Tam thức $f(x)=-36x^2+12x-1$ có $a=-36<0$ và $\Delta=0$

$f(x)$ trái dấu với hệ số a nên $f(x)$ âm với $\forall x\neq\dfrac{1}{6}$ và $f\left(\dfrac{1}{6}\right)=0$

Suy ra $-36x^2+12x-1\geq 0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{6}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left\{\dfrac{1}{6}\right\}$.

Ví dụ 2: Tìm m để mọi $x\in[-1;1]$ đều là nghiệm của bất phương trình

$$3x^2-2(m+5)x-m^2+2m+8\leq 0\ (1)$$

Lời giải

Ta có $3x^2-2(m+5)x-m^2+2m+8=0\Leftrightarrow x=m+2$ hoặc $x=\dfrac{4-m}{3}$

* Với $m+2>\dfrac{4-m}{3}\Leftrightarrow 3m+6>4-m\Leftrightarrow m>-\dfrac{1}{2}$ ta có

Bất phương trình $(1)\Leftrightarrow\dfrac{4-m}{3}\leq x\leq m+2$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình (1) là $\left[\dfrac{4-m}{3};m+2\right]$

Suy ra mọi $x\in[-1;1]$ đều là nghiệm của bất phương trình (1)

khi và chỉ khi $[-1;1]\subset\left[\dfrac{4-m}{3};m+2\right]\Leftrightarrow\begin{cases}-1\geq\dfrac{4-m}{3}\\ 1\leq m+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\geq 7\\ m\geq -1\end{cases}\Leftrightarrow m\geq 7$

Kết hợp với điều kiện $m>-\dfrac{1}{2}$ ta có $m\geq 7$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

* Với $m+2<\dfrac{4-m}{3}\Leftrightarrow m<-\dfrac{1}{2}$ ta có

Bất phương trình $(1)\Leftrightarrow m+2\leq x\leq\dfrac{4-m}{3}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình (1) là $\left[m+2;\dfrac{4-m}{3}\right]$

Suy ra mọi $x\in[-1;1]$ đều là nghiệm của bất phương trình (1)

khi và chỉ khi $[-1;1]\subset\left[m+2;\dfrac{4-m}{3}\right]\Leftrightarrow\begin{cases}-1\geq m+2\\ 1\leq\dfrac{4-m}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\leq -3\\ m\leq 1\end{cases}\Leftrightarrow m\leq -3$

Kết hợp với điều kiện $m<-\dfrac{1}{2}$ ta có $m\leq -3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

* Với $m=-\dfrac{1}{2}$ ta có bất phương trình $(1)\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$ nên $m=-\dfrac{1}{2}$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $m\in(-\infty;-3]\cup[7;+\infty)$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3: Giải và biện luận bất phương trình $(m+1)x^2-2(2m-1)x-4m+2<0$

Lời giải

Với $m=-1$: bất phương trình trở thành $6x+6<0\Leftrightarrow x<-1$

Với $m\neq -1$ ta có $g(x)=(m+1)x^2-2(2m-1)x-4m+2$ là tam thức bậc hai có: $a=m+1;\ \Delta'=8m^2-2m-1$.

Bảng xét dấu

m	$-\infty$		-1		$-\dfrac{1}{4}$		$\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
$m+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$8m^2-2m-1$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

* $-\dfrac{1}{4}\leq m\leq\dfrac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta'\leq 0\end{cases}\Rightarrow g(x)\geq 0\ \ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ bất phương trình vô nghiệm.

* $\begin{cases}m>\dfrac{1}{2}\\ -1<m<-\dfrac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta'>0\end{cases}\Rightarrow S=(x_1;x_2)$, với

$x_1=\dfrac{2m-1-\sqrt{(2m-1)(m+1)}}{m+1};\ x_2=\dfrac{2m-1+\sqrt{(2m-1)(m+1)}}{m+1}$.

* $m<-1\Rightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta'>0\end{cases}\Rightarrow S=(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$

Kết luận

$m=-1$ bất phương trình có tập nghiệm là $S=(-\infty;-1)$

$-\frac{1}{4} \le m \le \frac{1}{2}$ bất phương trình có tập nghiệm là $S = \varnothing$

$\left[\begin{array}{l} m > \frac{1}{2} \\ -1 < m < -\frac{1}{4} \end{array}\right.$ bất phương trình có tập nghiệm là $S = (x_1; x_2)$

$m < -1$ bất phương trình có tập nghiệm là $S = (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 4.87: Tìm m để phương trình sau vô nghiệm

a) $x^2 - 2mx + m + 3 = 0$ b) $(m-1)x^2 - (2m-2)x + 2m = 0$

Hướng dẫn giải

a) Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' < 0$

$\Leftrightarrow m^2 - m - 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$

Vậy với $m \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$ thì phương trình vô nghiệm

b) Với $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Với $m \ne 1$ phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' < 0$

$\Leftrightarrow (m-1)^2 - 2m(m-1) < 0 \Leftrightarrow (m-1)(-m-1) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -1 \end{array}\right.$

Vậy với $\left[\begin{array}{l} m \ge 1 \\ m < -1 \end{array}\right.$ thì phương trình có nghiệm

Bài 4.88: Giải và biện luận bất phương trình $mx^2 - 2mx + m - 1 > 0$

Hướng dẫn giải

Với $m = 0$, bất phương trình trở thành: $-1 > 0 \Rightarrow$ bất phương trình vô nghiệm

Với $m \ne 0 \Rightarrow f(x) = mx^2 - 2mx + m - 1$ là tam thức bậc hai có $a = m$, $\Delta' = m$

* $m > 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow$ bất phương trình có tập nghiệm:

$S = (-\infty; \frac{m-\sqrt{m}}{m}) \cup (\frac{m+\sqrt{m}}{m}; +\infty)$.

* $m < 0 \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Rightarrow$ bất phương trình vô nghiệm.

Kết luận

$m \le 0$ bất phương trình có tập nghiệm là $S = \varnothing$

$m > 0$ bất phương trình có tập nghiệm là $S = (-\infty; \frac{m-\sqrt{m}}{m}) \cup (\frac{m+\sqrt{m}}{m}; +\infty)$

Bài 4.90: Cho hàm số $f(x) = x^2 + bx + 1$ với $b \in \left(3, \frac{7}{2}\right)$.

Giải bất phương trình $f(f(x)) > x$.

Hướng dẫn giải

Ta có $f(f(x)) - x = \left[x^2 + (b+1)x + b + 2\right]\left[x^2 + (b-1)x + 1\right]$

Suy ra $f(f(x)) - x > 0 \Leftrightarrow \left[x^2 + (b+1)x + b + 2\right]\left[x^2 + (b-1)x + 1\right] > 0$

Đặt $g(x) = x^2 + (b-1)x + 1$, $h(x) = x^2 + (b+1)x + b + 2$

Ta có $\Delta_{g(x)} = b^2 - 2b - 3$, $\Delta_{h(x)} = b^2 - 2b - 7$

Vì $b \in \left(3, \frac{7}{2}\right)$ nên $\Delta_{g(x)} > 0$ và $\Delta_{h(x)} < 0$. Phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm $x_1 = \frac{1-b-\sqrt{b^2-2b-3}}{2}$, $x_2 = \frac{1-b+\sqrt{b^2-2b-3}}{2}$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là

$S = \left(-\infty; \frac{1-b-\sqrt{b^2-2b-3}}{2}\right) \cup \left(\frac{1-b+\sqrt{b^2-2b-3}}{2}; +\infty\right)$.

DẠNG TOÁN 1: *GIẢI HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN.*

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Giải các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} 2x^2 + 9x + 7 > 0 \\ x^2 + x - 6 < 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x^2 + x - 6 > 0 \\ 3x^2 - 10x + 3 \ge 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -x^2 + 5x - 4 \ge 0 \\ x^2 + x - 13 \le 0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \ge 0 \\ 2x^2 - x - 10 \le 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0 \end{cases}$

Lời giải

a) Ta có $\begin{cases} 2x^2 + 9x + 7 > 0 \\ x^2 + x - 6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \ge -1 \\ x \le -\frac{7}{2} \end{array}\right. \\ -3 < x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 2$

Vậy tập nghiệm hệ bất phương trình là $S = (-1; 2)$.

b) Ta có $\begin{cases}2x^2+x-6\ge 0\\ 3x^2-10x+3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge\frac{3}{2}\\ x\le -2\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x>3\\ x<\frac{1}{3}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\ x\le -2\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm hệ bất phương trình là $S=(-\infty;-2]\cup(3;+\infty)$.

c) Ta có $\begin{cases}-x^2+5x-4\ge 0\\ x^2+x-13\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1\le x\le 4\\ \frac{-1-\sqrt{53}}{2}\le x\le\frac{-1+\sqrt{53}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow 1\le x\le\frac{-1+\sqrt{53}}{2}$

Vậy tập nghiệm hệ bất phương trình là $S=\left[1;\frac{-1+\sqrt{53}}{2}\right]$.

d) Ta có $\begin{cases}x^2+4x+3\ge 0\\ 2x^2-x-10\le 0\\ 2x^2-5x+3\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge -1\\ x\le -3\end{array}\right.\\ -2\le x\le\frac{5}{2}\\ 1\le x\le\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow 1\le x\le\frac{3}{2}$

Vậy tập nghiệm hệ bất phương trình là $S=\left[1;\frac{3}{2}\right]$.

Ví dụ 2: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases}x^2-3x+2\le 0\\ mx^2-2(2m+1)x+5m+3\ge 0\end{cases}.$$

Lời giải

Ta có bất phương trình $x^2-3x+2\le 0\Leftrightarrow 1\le x\le 2$.

Yêu cầu bài toán tương đương với bất phương trình:

$mx^2-2(2m+1)x+5m+3\le 0$ (1) có nghiệm $x\in S=[1;2]$.

Ta đi giải bài toán phủ định là: tìm m để bất phương trình (1) vô nghiệm trên S

Tức là bất phương trình $f(x)=mx^2-2(2m+1)x+5m+3<0$ (2) đúng với mọi $x\in S$.

- $m=0$ ta có (2) $\Leftrightarrow -2x+3<0\Leftrightarrow x>\frac{3}{2}$ nên (2) không đúng với $\forall x\in S$
- $m\ne 0$ tam thức $f(x)$ có hệ số $a=m$, biệt thức $\Delta'=-m^2+m+1$

Bảng xét dấu

m	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		0		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
m		−	|	−	0	+	|	+	
$-m^2+m+1$		−	0	+	|	+	0	−	

+) $m\ge\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ta có: $\begin{cases}a>0\\ \Delta'\le 0\end{cases}$ nên $f(x)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, suy ra $m\ge\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ không thỏa mãn

+) $m\le\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ta có: $\begin{cases}a<0\\ \Delta'\le 0\end{cases}$ nên $f(x)\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và $f\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)=0$, suy ra $m\le\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn.

+) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<m<0$ ta có: $a<0$ và $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt

$$x_1=\frac{2m+1+\sqrt{\Delta'}}{m},\ x_2=\frac{2m+1-\sqrt{\Delta'}}{m}\ (x_1<x_2)$$

Do đó: $f(x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<x_1\\ x>x_2\end{array}\right.$, suy ra (2) đúng với $\forall x\in S\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1>2\\ x_2<1\end{array}\right.$ (*)

Ta có $x_1=2+\frac{1+\sqrt{\Delta'}}{m}<2$

$$x_2<1\Leftrightarrow\sqrt{\Delta'}<m+1\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1-\sqrt{5}}{2}<m<0\\ \Delta'<m^2+2m+1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1-\sqrt{5}}{2}<m<0\\ 2m^2+m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1-\sqrt{5}}{2}<m<0\\ \left[\begin{array}{l}m>0\\ m<-\frac{1}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\frac{1-\sqrt{5}}{2}<m<-\frac{1}{2}.$$

Suy ra $(*)\Leftrightarrow\frac{1-\sqrt{5}}{2}<m<-\frac{1}{2}$

+) $0<m<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ta có: $a<0$ và $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt

$$x_1=\frac{2m+1+\sqrt{\Delta'}}{m},\ x_2=\frac{2m+1-\sqrt{\Delta'}}{m}\ (x_1>x_2)$$

Suy ra $f(x)<0\Leftrightarrow x\in(x_2;x_1)$

Do đó (2) đúng với $\forall x \in S \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 < 1 \\ x_1 > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\Delta'} + m + 1 < 0 \\ \sqrt{\Delta'} + 1 > 0 \end{cases}$ (**)

Vì $m > 0$ nên (**) vô nghiệm.

Từ đó, ta thấy (2) đúng với $\forall x \in S \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2}$.

Vậy $m \geq -\frac{1}{2}$ là những giá trị cần tìm.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 4.91: Tìm m để bất phương trình $m^2x + m(x+1) - 2(x-1) > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in [-2;1]$

Hướng dẫn giải

Đặt $f(x) = (m^2 + m - 2)x + m + 2$

Bài toán thỏa mãn: $\Leftrightarrow \begin{cases} f(-2) > 0 \\ f(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 + m - 2)(-2) + m + 2 > 0 \\ (m^2 + m - 2)(1) + m + 2 > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2m^2 - m + 6 > 0 \\ m^2 + 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < \frac{3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{3}{2}$.

Bài 4.92: Tìm m để bất phương trình $2x^2 - (2m+1)x + m^2 - 2m + 2 \leq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in \left[\frac{1}{2};2\right]$.

Hướng dẫn giải

Đặt $f(x) = 2x^2 - (2m+1)x + m^2 - 2m + 2$, có $\Delta = -4m^2 + 20m - 15$

- $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq \frac{5-\sqrt{10}}{2} \\ m \geq \frac{5+\sqrt{10}}{2} \end{array}\right.$, suy ra $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên trường hợp này không thỏa yêu cầu bài toán.
- $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in \left(\frac{5-\sqrt{10}}{2}; \frac{5+\sqrt{10}}{2}\right)$, khi đó $f(x)$ có hai nghiệm

$x_1 = \frac{2m+1-\sqrt{\Delta}}{4}, x_2 = \frac{2m+1+\sqrt{\Delta}}{4}$ $(x_1 < x_2)$

Và $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [x_1; x_2]$.

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \leq \frac{1}{2} \\ x_2 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 \leq 2\sqrt{\Delta} \\ 7 - 2m \leq \sqrt{\Delta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m-1)^2 \leq 4\Delta \\ (7-2m)^2 \leq \Delta \\ \frac{1}{2} \leq m \leq \frac{7}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 20m^2 - 84m + 61 \leq 0 \\ m^2 - 6m + 8 \leq 0 \\ \frac{1}{2} \leq m \leq \frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq m \leq \frac{21 + 2\sqrt{34}}{10}$

Vậy $2 \leq m \leq \frac{21+2\sqrt{34}}{10}$ là những giá trị cần tìm.

Bài 4.93: Cho phương trình: $x^2 - 2mx + m^2 - m + 1 = 0$ (1)

a) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm $x \geq 1$.

b) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm $x \leq 1$.

c) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm $x_1 < 1 < x_2$.

d) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm $x_1 < x_2 < 1$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = x - 1 \Rightarrow x = t + 1$, thay vào pt (1) ta được phương trình:

$t^2 + 2(1-m)t + m^2 - 3m + 2 = 0$ (2)

a) Để phương trình (1) có nghiệm $x \geq 1 \Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $t \geq 0$

TH1: Phương trình (2) có nghiệm

$t_1 \leq 0 \leq t_2 \Leftrightarrow P \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 2$.

TH2: Phương trình (2) có nghiệm :

$0 \leq t_1 \leq t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P \geq 0 \\ S \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \geq 0 \\ m^2 - 3m + 2 \geq 0 \\ m - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ \left[\begin{array}{l} m \geq 2 \\ m \leq 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m \geq 2 \end{array}\right.$

Kết luận: với $m \in [1;+\infty)$ thì phương trình (1) có nghiệm $x \geq 1$.

b) Để phương trình (1) có nghiệm $x \leq 1 \Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $t \leq 0$

TH1: Phương trình (2) có nghiệm

$t_1 \leq 0 \leq t_2 \Leftrightarrow P \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 2$.

TH2: Phương trình (2) có nghiệm

$t_1 \leq t_2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P \geq 0 \\ S \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \geq 0 \\ m^2 - 3m + 2 \geq 0 \\ m - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$

Kết luận: với $m \in [1;2]$ thì phương trình (1) có nghiệm $x \leq 1$.

c) Phương trình (1) có 2 nghiệm thỏa $x_1 < 1 < x_2 \Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm: $t_1 < 0 < t_2 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2$.

Kết luận: với $1 < m < 2$ thì phương trình (1) có hai nghiệm $x_1 < 1 < x_2$

d) Phương trình (1) có 2 nghiệm thỏa $x_1 < x_2 < 1 \Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm:

$$t_1 < t_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 > 0 \\ m^2 - 3m + 2 > 0 \text{ (vô nghiệm)} \\ m - 1 < 0 \end{cases}$$

Kết luận: không tồn tại m để phương trình (1) có nghiệm $x_1 < x_2 < 1$.

DẠNG TOÁN 3: *GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH TÍCH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU THỨC.*

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Giải các bất phương trình :

a) $(1-2x)(x^2 - x - 1) > 0$ b) $x^4 - 5x^2 + 2x + 3 \le 0$

Lời giải

a) Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$1-2x$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
x^2-x-1		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
VT		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$$S = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$$

b) Bất phương trình $(x^4 - 4x^2 + 4) - (x^2 - 2x + 1) \le 0$

$\Leftrightarrow (x^2-2)^2 - (x-1)^2 \le 0 \Leftrightarrow (x^2 + x - 3)(x^2 - x - 1) \le 0$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
x^2+x-3		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
x^2-x-1		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
VT		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$$S = \left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right].$$

Ví dụ 2: Giải các bất phương trình :

a) $\dfrac{x^2-1}{(x^2-3)(-3x^2+2x+8)} > 0$ b) $x^2 + 10 \le \dfrac{2x^2+1}{x^2-8}$

Lời giải

a) Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$-\frac{4}{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		2		$+\infty$
x^2-1		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
x^2-3		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$-3x^2+2x+8$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
VT		$-$	$\vert\vert$	$+$	$\vert\vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\vert\vert$	$+$	$\vert\vert$	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$$S = \left(-\sqrt{3}; -\frac{4}{3}\right) \cup (-1;1) \cup \left(\sqrt{3}; 2\right).$$

b) Ta có $x^2 + 10 \le \dfrac{2x^2+1}{x^2-8} \Leftrightarrow \dfrac{2x^2+1}{x^2-8} - (x^2+10) \ge 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2+1-(x^2-8)(x^2+10)}{x^2-8} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{81-x^4}{x^2-8} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(9-x^2)(9+x^2)}{x^2-8} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{9-x^2}{x^2-8} \ge 0$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		$-2\sqrt{2}$		$2\sqrt{2}$		3		$+\infty$
$9-x^2$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
x^2-8		$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
VT		$-$	0	$+$	$\vert\vert$	$-$	$\vert\vert$	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$S = [-3; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; 3].$$

Ví dụ 3: Giải bất phương trình sau

a) $\dfrac{|x^2-x|-2}{x^2-x-1} \ge 0$ b) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{x^2+\sqrt{3}x-6} \le 0$

Lời giải

a) Vì $|x^2-x|+2>0$ nên

$$\frac{|x^2-x|-2}{x^2-x-1}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{(|x^2-x|-2)(|x^2-x|+2)}{x^2-x-1}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2-x-2)(x^2-x+2)}{x^2-x-1}\ge 0$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		2		$+\infty$
x^2-x-2		+	0	−	|	−	|	−	0	+	
x^2-x+2		+	|	+	|	+	|	+	|	+	
x^2-x-1		+	|	+	||	−	||	+	0	+	
$\frac{(x^2-x-2)(x^2-x+2)}{x^2-x-1}$		+	0	−	||	+	|	−	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là

$$S=(-\infty;-1]\cup\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cup[2;+\infty)$$

b) ĐKXĐ: $\begin{cases} x+1\ge 0 \\ x^2+\sqrt{3}x-6\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x\ne \sqrt{3} \\ x\ne -2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x\ne \sqrt{3} \end{cases}$

Vì $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}>0$ nên

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}{x^2+\sqrt{3}x-6}\le 0 \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\right)}{x^2+\sqrt{3}x-6}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-x}{x^2+\sqrt{3}x-6}\le 0$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2-x		+	0	+	0	−	0	+	|	+	
$x^2+\sqrt{3}x-6$		+	0	−	|	−	|	−	0	+	
$\frac{x^2-x}{x^2+\sqrt{3}x-6}$		+	||	−	0	+	0	−	||	+	

Dựa vào bảng xét dấu và đối chiếu điều kiện, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=[-1;0]\cup[1;\sqrt{3})$

Nhận xét: Ở câu b chúng ta phải đặt điều kiện thì khi đó các phép biến đổi trên mới đảm bảo là phép biến đổi tương được

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 4.94: Giải các bất phương trình sau

a) $(4-3x)(-2x^2+3x-1)\le 0$

b) $x^2+x-\frac{3}{x^2+x-2}\le 0$

Hướng dẫn giải

a) BXD :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$4-3x$		+	|	+	|	+	0	−	
$-2x^2+3x-1$		−	0	+	0	−	|	−	
VT		−	0	+	0	−	0	+	

$$T=(-\infty;\frac{1}{2}]\cup\left[1;\frac{4}{3}\right]$$

b) Bpt $\Leftrightarrow \frac{(x^2+x)^2-2(x^2+x)-3}{x^2+x-2}\le 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2+x+1)(x^2+x-3)}{x^2+x-2}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-3}{x^2+x-2}\le 0$$

$$\Rightarrow T=\left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2};-2\right)\cup\left(1;\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right]$$

DẠNG TOÁN 4: *ỨNG DỤNG TAM THỨC BẬC HAI, BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT.*

Phương pháp giải.

- Ta đưa bất đẳng thức về một trong các dạng $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c\ge 0$, $ax^2+bx+c<0$ hoặc $ax^2+bx+c\le 0$ rồi đi chứng minh (theo thứ tự) $\begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases}$, $\begin{cases} a>0 \\ \Delta\le 0 \end{cases}$, $\begin{cases} a<0 \\ \Delta<0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a<0 \\ \Delta\le 0 \end{cases}$.
- Nếu BĐT cần chứng minh có dạng: $A^2\le 4BC$ (hoặc $A^2\le BC$) ta có thể chứng minh tam thức $f(x)=Bx^2+Ax+C$ (hoặc $f(x)=Bx^2+2Ax+C$) luôn cùng dấu với B. Khi đó ta sẽ có $\Delta\le 0$.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho hai số thực x, y. Chứng minh rằng $3x^2 + 5y^2 - 2x - 2xy + 1 > 0$

Lời giải

Viết bất đẳng thức lại dưới dạng $3x^2 - 2(y+1)x + 5y^2 + 1 > 0$

Đặt $f(x) = 3x^2 - 2(y+1)x + 5y^2 + 1$ xem y là tham số khi đó $f(x)$ là tam thức bậc hai ẩn x có hệ số $a_x = 3 > 0$ và $\Delta_x' = (y+1)^2 - 3(5y^2+1) = -14y^2 + 2y - 2$

Xét tam thức $g(y) = -14y^2 + 2y - 2$ có hệ số $a_y = -14 < 0$ và $\Delta'_y = -27 < 0$

Suy ra $\Delta'_x < 0$

Do đó $f(x) < 0$ với mọi x, y.

Nhận xét: * Khi gặp bài toán chứng minh BĐT có dạng: $f(a_1, a_2, ..., a_n) \geq 0$ $\forall a_1, a_2, ..., a_n$ mà $f(a_1, a_2, ..., a_n) = g(a_i)$ là một tam thức bậc hai với ẩn a_i có hệ số $a > 0$, ta có thể sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai để chứng minh. Khi đó $g(a_i) \geq 0 \Leftrightarrow \Delta_{a_i} \leq 0$.

Ví dụ 2: Cho x, y, z là số thực.
Chứng minh rằng $x^2 + y^2 + z^2 + x^2y^2z^2 - 4xyz + y^2z^2 - 2yz + 1 \geq 0$.

Lời giải

Bất đẳng thức viết lại $(1 + y^2z^2)x^2 - 4xyz + y^2 + z^2 + y^2z^2 - 2yz + 1 \geq 0$

Đặt $f(x) = (1 + y^2z^2)x^2 - 4xyz + y^2 + z^2 + y^2z^2 - 2yz + 1$, khi đó $f(x)$ là một tam thức bậc hai ẩn x có hệ số $a = 1 + y^2z^2 > 0$

và $\Delta'_x = 4y^2z^2 - (1 + y^2z^2)(y^2 + z^2 + y^2z^2 - 2yz + 1)$

$\Rightarrow \Delta'_x = -(1 + y^2 - 2yz + z^2 - 2y^2z^2 + y^4z^2 - 2y^3z^3 + y^2z^4 + y^4z^4)$

Áp dụng BĐT $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ta có

$y^4z^2 + y^2z^4 \geq 2y^3z^3$, $y^4z^4 + 1 \geq 2y^2z^2$ và $y^2 + z^2 \geq 2yz$

Cộng vế với vế lại suy ra $\Delta'_x \leq 0$

Do đó $f(x) \geq 0, \forall x, y, z$. ĐPCM.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 4.96: Tìm tất cả các giá trị của y sao cho BĐT sau đúng với $\forall x, z \in R$.

$$x^2 + 9y^2 + 5z^2 + 6xy - 4xz - 12yz - 2z + 1 \geq 0.$$

Hướng dẫn giải

BĐT đã cho đúng với $\forall x, z \in R \Leftrightarrow$ tam thức $f(x) \geq 0$ $\forall x, z$

(Trong đó $f(x) = x^2 + 2(3y - 2z)x + 9y^2 + 5z^2 - 12yz - 2z + 1$)

$\Leftrightarrow \Delta'_x = (3y - 2z)^2 - (9y^2 + 5z^2 - 12yz - 2z + 1) = -z^2 + 2(3y+1)z - 1 \leq 0$ $\forall z$

$\Leftrightarrow \Delta'_z = (3y+1)^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 3y(3y+2) \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq y \leq 0$.

Vậy $-\frac{2}{3} \leq y \leq 0$ là những giá trị cần tìm.

Bài 4.97: Cho $x, y, z \geq 0$ thỏa mãn: $xy + yz + zx + xyz = 4$.
Chứng minh rằng : $x + y + z \geq xy + yz + zx$.

Hướng dẫn giải

Ta giả sử $z = \min\{x, y, z\} \Rightarrow z \leq 1$. Từ giả thiết $\Rightarrow x = \frac{4 - yz}{y + z + yz}$

Nên (1) $\Leftrightarrow \frac{4 - yz}{y + z + yz} + y + z \geq (y + z)\frac{4 - yz}{y + z + yz} + yz$

$\Leftrightarrow f(y) = (1 + z - z^2)y^2 + (z^2 + z - 4)y + (z - 2)^2 \geq 0$.

Tam thức $f(y)$ có hệ số $a = 1 + z - z^2 > 0$ (do $z \leq 1$) và có biệt thức : $\Delta = z(z-1)^2(5z - 8) \leq 0 \Rightarrow f(y) \geq 0$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$ hoặc $(x; y; z) = (2; 2; 0)$ và các hoán vị.

Bài 4.98: Cho các số thực dương x,y,z. Chứng minh rằng:
$xzy + 2(x^2 + y^2 + z^2) + 8 \geq 5(x + y + z)$ (*THTT*).

Hướng dẫn giải

Trong ba số x,y,z luôn tồn tại hai số cùng không nhỏ hơn 1 hoặc cùng không lớn hơn 1. Ta giả sử hai số đó là x và y. Khi đó ta có:

$(x-1)(y-1) \geq 0 \Leftrightarrow xy \geq x + y - 1 \Rightarrow xyz \geq xz + yz - z$.

$\Rightarrow xyz + 2(x^2 + y^2 + z^2) + 8 \geq xz + yz - z + 2(x^2 + y^2 + z^2) + 8$.

Nên ta chứng minh: $xz + yz - z + 2(x^2 + y^2 + z^2) + 8 \geq 5(x + y + z)$

$\Leftrightarrow f(z) = 2z^2 + (x + y - 6)z + 2(x^2 + y^2) - 5(x + y) + 8 \geq 0$.

Tam thức $f(z)$ có $a = 2 > 0$ và $\Delta_z = -15x^2 + 2(y + 14)x - 15y^2 + 28y - 28$

Δ_z là tam thức bậc hai ẩn x, có $a = -15 < 0$ và $\Delta_x = -224(y-1)^2 \leq 0$

$\Rightarrow \Delta_z \leq 0 \Rightarrow f(z) \geq 0$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Bài 4.99: Cho các số thực x, y thỏa mãn bất phương trình $5x^2 + 5y^2 - 5x - 15y + 8 \leq 0$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x + 3y$.

Hướng dẫn giải

Do $S = x + 3y \Rightarrow x = S - 3y$, thay vào giả thiết $5x^2 + 5y^2 - 5x - 15y + 8 \leq 0$ và viết theo hệ số của biến y ta thu được

$$50y^2 - 30Sy + 5S^2 - 5S + 8 \leq 0 (*)$$

Vì bất đẳng thức trên đúng với mọi y nên ta có $\Delta \geq 0$, tức là

$900S^2 - 4.50.(5S^2 - 5S + 8) \ge 0$

Biến đổi tương đương ta thu được $-100S^2 + 1000S - 1600 \le 0$

hay $100S^2 - 1000S + 1600 \le 0 \Leftrightarrow 2 \le S \le 8$

Khi $S = 2$ thay vào (*) được $50y^2 - 60y + 18 \le 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{5}$

nên $x = S - 3y = 2 - \frac{9}{5} = \frac{1}{5}$

Khi $S = 8$ thay vào (*) được

$50y^2 - 240y + 288 \le 0 \Leftrightarrow y = \frac{12}{5} \Rightarrow x = S - 3y = 8 - \frac{36}{5} = \frac{4}{5}$

$\max S = 8, \min S = 2$

Bài 4.100: Cho a,b là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 = 4a - 3b$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = 2a + 3b$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $P = 2a + 3b \Rightarrow b = \frac{P - 2a}{3}$

Thay vào biểu thức phía trên ta được:

$a^2 + (\frac{P - 2a}{3})^2 = 4a - 3(\frac{P - 2a}{3}) \Leftrightarrow 13a^2 - 2(27 + 2P)a + 9P + P^2 = 0$

Ta cần tìm P để phương trình trên tồn tại a. Tức là ta phải có:

$\Delta^i = -9P^2 - 9P + 729 \ge 0 \Leftrightarrow \frac{-9 - 45\sqrt{13}}{18} \le P \le \frac{-9 + 45\sqrt{13}}{18}$

Bài 4.101: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ và $x - y + z = 3$.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x + y - 2}{z + 2}$

Hướng dẫn giải

Từ điều kiện ta có

$x^2 + y^2 = \frac{(x + y)^2 + (x - y)^2}{2} = 5 - z^2 \Rightarrow (x + y)^2 = 10 - 2z^2 - (3 - z)^2$

Do đó $(x + y)^2 = 1 + 6z - 3z^2$

Dễ thấy $z \ne -2$. Ta có $P(z + 2) + 2 = x + y$

Do đó $[P(z + 2) + 2]^2 = 1 + 6z - 3z^2$

$\Leftrightarrow (z + 2)^2 P^2 + 4(z + 2)P + 4 = 1 + 6z - 3z^2$

$\Leftrightarrow (P^2 + 3)z^2 + (4P^2 + 4P - 6)z + 4P^2 + 8P + 3 = 0$

Phương trình có nghiệm ẩn z khi và chỉ khi

$\Delta_z' \ge 0 \Leftrightarrow (2P^2 + 2P - 3)^2 - (P^2 + 3)(4P^2 + 8P + 3) \ge 0$

$\Leftrightarrow -\frac{36}{23} \le P \le 0$

Ta có $P = 0$ khi $x = 2, y = 0, z = 1$

$P = -\frac{36}{23}$ khi $x = \frac{20}{31}, y = -\frac{66}{31}, z = \frac{7}{31}$

Bài 4.102: Cho a,b,c là số thực.

Chứng minh rằng $2(a + b + c - ab - bc - ca + 1)^2 + (ab + bc + ca - 2)^2 \ge 3$

Hướng dẫn giải

Nếu $\left[\begin{array}{l} ab + bc + ca \le 2 - \sqrt{3} \\ ab + bc + ca \ge 2 + \sqrt{3} \end{array}\right.$ thì bất đẳng thức dễ dàng được chứng minh.

Xét trường hợp ngược lại $2 - \sqrt{3} \le ab + bc + ca \le 2 + \sqrt{3}$.

Ta đặt $x = a + b + c, y = ab + bc + ca$.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$2(x - y + 1)^2 + (y - 2)^2 \ge 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x(y - 1) + 3y^2 - 8y + 3 \ge 0$.

Đặt $f(x) = 2x^2 - 4x(y - 1) + 3y^2 - 8y + 3$. Ta dễ dàng tính được

$\Delta'_{f(x)} = 4(y - 1)^2 - 2(3y^2 - 8y + 3) = -2y^2 + 8y - 2$

$= -2[y - (2 - \sqrt{3})][y - (2 + \sqrt{3})] \le 0.$

Theo định lí về dấu của tam thức bậc hai thì bài toán được chứng minh.

Bài 4.103: Cho a và b là các số thực thỏa mãn $9a^2 + 8ab + 7b^2 \le 6$.

Chứng minh rằng $7a + 5b + 12ab \le 9$.

Hướng dẫn giải

Xét tam thức bậc hai $f(a) = 9a^2 - (4b + 7)a + 7b^2 - 5b + 3$ với b là tham số

Ta có $\Delta_f = (4b + 7)^2 - 36(7b^2 - 5b + 3) = -59(2b - 1)^2 \le 0$

Suy ra $f(a) \ge 0 \Leftrightarrow 9a^2 - (4b + 7)a + 7b^2 - 5b + 3 \ge 0$

$\Leftrightarrow 7a + 5b + 12ab - 9 \le 9a^2 + 8ab + 7b^2 - 6$

Theo giả thiết ta có $9a^2 + 8ab + 7b^2 \le 6$ nên $7a + 5b + 12ab \le 9$.

§8. PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẬC HAI

DẠNG TOÁN 1: *PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN TRONG DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI*

Phương pháp giải

Để giải phương trình, bất phương trình chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối(GTTĐ) ta cần khử dấu GTTĐ. Sau đây là một số cách thường dùng để khử dấu GTTĐ.

+ Sử dụng định nghĩa hoặc tính chất của GTTĐ để khử dấu GTTĐ.
+ Đặt ẩn phụ là biểu thức chứa dấu GTTĐ để khử dấu GTTĐ

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

***Loại 1:* Sử dụng định nghĩa và tính chất của dấu giá trị tuyệt đối.**

* ***Lưu ý:*** Sau đây là một số loại toán phương trình, bất phương trình cơ bản có thể thực hiện bằng phép biến đổi tương đương.

- $|f(x)|=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}f(x)=g(x)\\ f(x)=-g(x)\end{array}\right.\end{cases}$
- $|f(x)|=|g(x)|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=g(x)\\ f(x)=-g(x)\end{array}\right.$
- $|f(x)|<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)>0\\ -g(x)<f(x)<g(x)\end{cases}$
- $|f(x)|>g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)<0\\ f(x)\end{cases}\\ \begin{cases}g(x)\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}f(x)<-g(x)\\ f(x)>g(x)\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$ có nghĩa

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau:

a) $\left|2x^2-3x-1\right|=-x^2+2x+1$ b) $\left|x^2-5x+4\right|=x^3-3x+4$

c) $\left|x^2-5x+4\right|-|x+1|=x^2+x$ d) $\left|x^2-3x+1\right|+|x-1|=12(x-3)$

Lời giải

a) Ta có phương trình

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-x^2+2x+1\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}2x^2-3x-1=-x^2+2x+1\\ 2x^2-3x-1=-(-x^2+2x+1)\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x-1\le 0\\ \left[\begin{array}{l}3x^2-5x-2=0\\ x^2-x=0\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1-\sqrt{2}\le x\le 1+\sqrt{2}\\ \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-\dfrac{1}{3}\\ x=0\\ x=1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-\dfrac{1}{3}\\ x=0\\ x=1\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x\in\left\{0;1;2;-\dfrac{1}{3}\right\}$

b) Với $1\le x\le 4\Rightarrow x^2-5x+4\ge 0$ ta có

Phương trình $\Leftrightarrow-\left(x^2-5x+4\right)=x^3-3x+4\Leftrightarrow x^3+x^2-8x+8=0$

Áp dụng BĐT côsi ta có $x^3+4+2\ge 3\sqrt[3]{8x^3}=6x$, $x^2+2\ge 2\sqrt{2}x$

Suy ra $x^3+x^2-8x+8\ge 6x+2\sqrt{2}x-8x=\left(2\sqrt{2}-2\right)x>0$

Do đó phương trình vô nghiệm.

Với $\left[\begin{array}{l}x>4\\ x<1\end{array}\right.\Rightarrow x^2-5x+4>0$ ta có

Phương trình $\Leftrightarrow x^2-5x+4=x^3-3x+4$

$\Leftrightarrow x^3-x^2+2x=0\Leftrightarrow x=0$ (thỏa mãn)

Vậy nghiệm của phương trình là $x=0$

c) Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	$\|$	$+$	
x^2-5x+4		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ đó ta có các trường hợp sau

- Với $x\le -1$, ta có phương trình $\Leftrightarrow\left(x^2-5x+4\right)+(x+1)=x^2+x\Leftrightarrow x=1$ (loại)
- Với $-1<x\le 1$, ta có phương trình

$\Leftrightarrow\left(x^2-5x+4\right)-(x+1)=x^2+x\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{7}$ (thỏa mãn)

- Với $1<x\le 4$, ta có phương trình $-\left(x^2-5x+4\right)-(x+1)=x^2+x$

$\Leftrightarrow 2x^2-3x+5=0$ phương trình này vô nghiệm.

- Với $x>4$, ta có phương trình $\Leftrightarrow x^2-5x+4-(x+1)=x^2+x\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{7}$ (loại)

Vậy phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x=\dfrac{3}{7}$.

d) Ta có phương trình $\begin{cases} x \ge 3 \\ |x^2-3x+1|+|x-1| = 12(x-3) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ x^2-3x+1+x-1 = 12(x-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ x^2-14x+36 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ x = 7 \pm \sqrt{13} \end{cases} \Leftrightarrow x = 7 \pm \sqrt{13}$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 7 \pm \sqrt{13}$.

Ví dụ 2: Giải các bất phương trình sau

a) $|x^2-x-1| \ge x-1$ b) $|-x^2+3x+2| < x^2-3x+2$

Lời giải

a) Với $x<1$ ta có $VT \ge 0$, $VP < 0$ suy bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x<1$

Với $x \ge 1$ ta có bất phương trình tương đương với

$\begin{cases} x \ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-x-1 \ge x-1 \\ x^2-x-1 \le 1-x \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-2x \ge 0 \\ x^2-2 \le 0 \end{array}\right. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 2 \\ x \le 0 \end{array}\right. \\ -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 2 \\ x \le \sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 2 \\ 1 \le x \le \sqrt{2} \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \in \left[1;\sqrt{2}\right] \cup \left[2;+\infty\right)$

b) Với $x^2-3x+2<0 \Leftrightarrow 1<x<2$ ta có $VT \ge 0$, $VP < 0$ suy ra bất phương trình vô nghiệm

Với ta có $x^2-3x+2 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 2 \\ x \le 1 \end{array}\right.$

Bất phương trình tương đương với $-\left(x^2-3x+2\right) < -x^2+3x+2 < x^2-3x+2$

$\Leftrightarrow 2x^2-6x>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<0 \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện $\left[\begin{array}{l} x \ge 2 \\ x \le 1 \end{array}\right.$ suy ra nghiệm bất phương trình là $\left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<0 \end{array}\right.$

Vậy bất phương trình có nghiệm $x \in (-\infty;0) \cup (3;+\infty)$.

Ví dụ 3: Tìm m để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt

$$|-x^2-x+6| = 4x+m.$$

Lời giải

Ta có $|-x^2-x+6| = 4x+m \Leftrightarrow |-x^2-x+6| - 4x = m$

Xét hàm số $f(x) = |-x^2-x+6| - 4x$

Ta có $f(x) = \begin{cases} -x^2-5x+6 & \text{khi } x \in [-3;2] \\ x^2-3x-6 & \text{khi } x \in (-\infty;-3) \cup (2;+\infty) \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		$-\frac{5}{2}$		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	12	$\nearrow$		$\nearrow$	$\frac{99}{4}$	$\searrow$		$\searrow$	$+\infty$
									-4	$\nearrow$	

Từ bảng biến thiên ta có

Phương trình ban đầu có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đồ thị hàm số f cắt đường thẳng $y = m$ tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow 12 < m < \frac{99}{4}$.

Vậy $12 < m < \frac{99}{4}$ là giá trị cần tìm.

Nhận xét: Nghiệm của phương trình $f(x) = g(m)$ là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = g(m)$. Từ đó suy ra

- Phương trình $f(x) = g(m)$ có nghiệm $\Leftrightarrow$ đường thẳng $y = g(m)$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$
- Số nghiệm phương trình $f(x) = g(m) \Leftrightarrow$ số giao điểm của đường thẳng $y = g(m)$ và đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Do đó khi gặp bài toán liên quan đến phương trình $f(x,m) = 0$ mà ta có thể cô lập được m thì ta sử dụng đồ thị (hoặc bảng biến thiên) để giải.

Loại 2: Đặt ẩn phụ

Ví dụ 4: Giải các phương trình và bất phương trình sau

a) $3\left(x^2-4x\right) - |x-2| > 12$ b) $\frac{\left(x^2+1\right)^2}{x^2} \le 3\left|x+\frac{1}{x}\right| - 2$

Lời giải

a) Đặt $t=|x-2|, t\ge 0 \Rightarrow t^2=x^2-4x+4$

Bất phương trình trở thành $3\left(t^2-4\right)-t>12 \Leftrightarrow 3t^2-t-24>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t>3 \\ t<-\frac{8}{3} \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện $t\ge 0$ ta có $t>3$ suy ra

$$|x-2|>3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2>3 \\ x-2<-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>5 \\ x<-1 \end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình có nghiệm là $x\in(-\infty;-1)\cup(5;+\infty)$.

b) ĐKXĐ: $x\ne 0$

Bất phương trình $\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}+4\le 3\left|x+\frac{1}{x}\right|$

Đặt $t=\left|x+\frac{1}{x}\right| \Rightarrow t^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$

Ta có $t=\left|x+\frac{1}{x}\right|=|x|+\left|\frac{1}{x}\right|\ge 2\sqrt{|x|.\left|\frac{1}{x}\right|}=2 \Rightarrow t\ge 2$

Bất phương trình trở thành $t^2+2\le 3t \Leftrightarrow t^2-3t+2\le 0 \Leftrightarrow 1\le t\le 2$

Kết hợp với $t\ge 2$ suy ra $t=2$

Do đó $2=\left|x+\frac{1}{x}\right| \Rightarrow 2|x|=\left|x^2+1\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+1=2x \\ x^2+1=-2x \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm 1$ (thỏa mãn)

Vậy bất phương trình có nghiệm là $x=\pm 1$.

Ví dụ 5. Tìm m để phương trình $\left|x^2-2x+m\right|=x-1$ có nghiệm.

Lời giải

Phương trình tương đương với

$$\left\{\begin{array}{l} \left(x^2-2x+m\right)^2=(x-1)^2 \\ x\ge 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(x^2-2x\right)^2+2m\left(x^2-2x\right)+m^2=x^2-2x+1 \\ x\ge 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(x^2-2x\right)^2+(2m-1)\left(x^2-2x\right)+m^2-1=0 \ (*) \\ x\ge 1 \end{array}\right.$$

Đặt $t=x^2-2x$, vì $x\ge 1 \Rightarrow t=(x-1)^2-1\ge -1$

Phương trình (*) trở thành $t^2-(2m-1)t+m^2-1=0$ (**)

Phương trình ban đầu có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (**) có nghiệm $t\ge -1$

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $f(t)=t^2-(2m-1)t+m^2-1$ trên $[-1;+\infty)$ cắt trục hoành.

Ta có $-\frac{b}{2a}=\frac{2m-1}{2}$

+ TH1: Nếu $\frac{2m-1}{2}>-1 \Leftrightarrow m>-\frac{1}{2}$ ta có

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$\frac{2m-1}{2}$		$+\infty$
f(x)			$f(-1)$	$\searrow$	$f\left(\frac{2m-1}{2}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra phương trình đã cho có nghiệm

$$\Leftrightarrow f\left(\frac{2m-1}{2}\right)\le 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2m-1}{2}\right)^2-(2m-1)\left(\frac{2m-1}{2}\right)+m^2-1\le 0 \Leftrightarrow m<\frac{5}{4}$$

Kết hợp với điều kiện $m>-\frac{1}{2}$ suy ra $-\frac{1}{2}<m<\frac{5}{4}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

+ TH2: Nếu $\frac{2m-1}{2}=-1 \Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}$ phương trình (**) trở thành

$t^2+2t-\frac{3}{4}=0 \Leftrightarrow t=\frac{-2\pm\sqrt{7}}{2}$ có $t=\frac{-2+\sqrt{7}}{2}>-1$ suy ra $m=-\frac{1}{2}$ thảo mãn yêu cầu bài toán

+ TH3: Nếu $\frac{2m-1}{2}<-1 \Leftrightarrow m<-\frac{1}{2}$ ta có

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f(x)			$f(-1)$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow f(-1)\le 0$

$$\Leftrightarrow 1+2m-1+m^2-1\le 0 \Leftrightarrow m^2+2m-1\le 0 \Leftrightarrow -1-\sqrt{2}\le m\le -1+\sqrt{2}$$

Kết hợp với điều kiện $m<-\frac{1}{2}$ suy ra $-1-\sqrt{2}\le m<-\frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Vậy $-1-\sqrt{2}\le m<\frac{5}{4}$ là giá trị cần tìm.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 4.104: Giải các phương trình sau

a) $|2x^2-7x+2|=x+2$ b) $\left|\frac{2x}{x+1}\right|=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$

Hướng dẫn giải

a) Phương trình $\Leftrightarrow\begin{cases}x+2\ge 0\\ \left[\begin{array}{l}2x^2-7x+2=x+2\\ 2x^2-7x+2=-x-2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -2\\ \left[\begin{array}{l}2x^2-8x=0\\ 2x^2-6x+4=0\end{array}\right.\end{cases}$

Phương trình đã cho có bốn nghiệm $x=0;\ x=1;\ x=2;\ x=4$.

b) ĐKXĐ: $x\ne\pm 1$. Với ĐK đó:

$PT\Leftrightarrow\left|\frac{2x}{x+1}\right|=\frac{2x}{x^2-1}\Leftrightarrow\left|\frac{2x}{x+1}\right|=\frac{2x}{x+1}.\frac{1}{x-1}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{2x}{x-1}\left(1-\frac{1}{x-1}\right)=0\\ \frac{2x}{x+1}\ge 0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}\frac{2x}{x-1}\left(1+\frac{1}{x-1}\right)=0\\ \frac{2x}{x+1}<0\end{cases}$

Giải ra ta có nghiệm của phương trình là $x=0$ và $x=2$.

Bài 4.105: Giải các bất phương trình sau

a) $\left|x^2-5x+4\right|>x-2$ b) $\left|x^2-x-6\right|<x$

Hướng dẫn giải

a) * Nếu $x-2<0\Leftrightarrow x<2\Rightarrow$ bpt luôn đúng.

* Nếu $x\ge 2\Rightarrow$ bpt $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-5x+4>x-2\\ x^2-5x+4<-x+2\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-6x+6>0\\ x^2-4x+2<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<3-\sqrt{3}\ \vee\ x>3+\sqrt{3}\\ 2-\sqrt{2}<x<2+\sqrt{2}\end{array}\right.$.

Kết hợp với $x\ge 2$ ta có: $2\le x<2+\sqrt{2}$ hoặc $x>3+\sqrt{3}$.

Vậy nghiệm của bất phương trình: $\left[\begin{array}{l}2\le x<2+\sqrt{2}\\ x>3+\sqrt{3}\end{array}\right.$.

b) Bất phương trình

$\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ -x<x^2-x-6<x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x^2-2x-6<0\\ x^2-6>0\end{cases}\Leftrightarrow\sqrt{6}<x<1+\sqrt{7}$.

Vậy nghiệm bất phương trình: $\sqrt{6}<x<1+\sqrt{7}$.

Bài 4.106: Biện luận số nghiệm của phương trình: $|x-1|-\left|x^2-3x+2\right|=5m-3$.

Hướng dẫn giải

Số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của đường thẳng $y=5m-3$ và đồ thị $(C): y=|x-1|-\left|x^2-3x+2\right|$

Ta có: $y=\begin{cases}-x^2+4x-3 & \text{khi } x\ge 2\\ x^2-2x+1 & \text{khi } 1\le x<2\\ -x^2+2x-1 & \text{khi } x\le 1\end{cases}$

Lập bảng biến thiên ta có

- Nếu $5m-3>1\Leftrightarrow m>\frac{4}{5}\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.
- Nếu $m=\frac{4}{5}\Rightarrow$ phương trình có một nghiệm.
- Nếu $m<\frac{4}{5}\Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Bài 4.107: Tìm m để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt:

$\left|-2x^2+10x-8\right|=m-5x+x^2$.

Hướng dẫn giải

$PT\Leftrightarrow\left|2x^2-10x+8\right|-x^2+5x=m$

Xét hàm số

$f(x)=\left|2x^2-10x+8\right|-x^2+5x=\begin{cases}x^2-5x+8 \text{ khi } x\in(-\infty;1]\cup[4;+\infty)\\ -3x^2+15x-8 \text{ khi } x\in(1;4)\end{cases}$

Phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $f(x)=\left|2x^2-10x+8\right|-x^2+5x$ cắt đường thẳng $y=m$ tại 4 điểm phân biệt

$\Leftrightarrow 4<m<\frac{43}{4}$.

Bài 4.108: Tìm m để bất phương trình $\left|2x^2-3x-2\right|\ge 5m-8x-2x^2$ nghiệm đúng với mọi x.

Hướng dẫn giải

Bất phương trình $\Leftrightarrow\left|2x^2-3x-2\right|+8x+2x^2\ge 5m$.

Xét hàm số $y=f(x)=\begin{cases}4x^2+5x-2 \text{ khi } x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup[2;+\infty)\\ 11x+2 \text{ khi } x\in\left(-\frac{1}{2};2\right)\end{cases}$.

Lập bảng biến thiên của hàm số

$$y=f(x)=\begin{cases}4x^2+5x-2 \text{ khi } x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup[2;+\infty)\\ 11x+2 \text{ khi } x\in\left(-\frac{1}{2};2\right)\end{cases}$$

Ta có $\min y=-\frac{57}{16}$ suy ra yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 5m\le-\frac{57}{16}\Leftrightarrow m\le-\frac{57}{80}$.

Bài 4.109: Cho bất phương trình $x^2-4x-3|x-2|+2m-2=0$

a) Giải phương trình khi $m=1$

b) Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=|x-2|, t\ge 0$ ta có phương trình: $t^2-3t+2m-6=0$ (*)

a) $x=-2, x=6$

b) Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=27-8m>0\\ 2m-6>0\end{cases}\Leftrightarrow 3<m<\frac{27}{8}.$$

DẠNG TOÁN 2: *PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN*

Phương pháp giải.

Để giải phương trình, bất phương trình chứa ẩn trong dấu căn mục đích chúng ta phải khử căn thức đi. Sau đây là một số phương pháp thường dùng.

+ Biến đổi tương đương(Bình phương hai vế, phân tích thành nhân tử)

Lưu ý: Đối với bất phương trình, bình phương hai vế không âm thì mới thu về bất phương trình tương đương cùng chiều

+ Đặt ẩn phụ
+ Đánh giá

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Loại 1: Sử dụng phép biến đổi tương đương

Lưu ý một số phương trình, bất phương trình cơ bản sử dụng phép biến đổi tương đương như sau

Phương trình:

- $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\ge 0 \text{ hoặc } g(x)\ge 0\\ f(x)=g(x)\end{cases}$
- $\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\ge 0\\ f(x)=[g(x)]^2\end{cases}$

Bất phương trình:

- $\sqrt{f(x)}>\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>g(x)\\ g(x)\ge 0\end{cases}$
- $\sqrt{f(x)}<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\ge 0\\ g(x)>0\\ f(x)<[g(x)]^2\end{cases}$
- $\sqrt{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{cases}g(x)<0\\ f(x)\ge 0\end{cases}\right.\left.\begin{cases}g(x)\ge 0\\ f(x)>[g(x)]^2\end{cases}\right.$

Ví dụ 1: Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{x^3-x+1}=\sqrt{-2x^2-x+2}$ b) $\sqrt{2x^2+3x-1}=3-x^2$

Lời giải

a) Ta có phương trình $\Leftrightarrow\begin{cases}-2x^2-x+2\ge 0\\ x^3-x+1=-2x^2-x+2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{-1-\sqrt{17}}{4}\le x\le\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\\ x^3+2x^2-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{-1-\sqrt{17}}{4}\le x\le\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\\ \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x\in\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2};-1;\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

b) Phương trình $\Leftrightarrow\begin{cases}3-x^2\ge 0\\ 2x^2+3x-1=\left(3-x^2\right)^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}\\ x^4-8x^2-3x+10=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}\\ (x-1)(x+2)\left(x^2-x-5\right)=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}\\ \left[\begin{array}{l}x=-2\\ x=1\\ x=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=1$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x=1$.

Ví dụ 2: Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{-5x^2+8x-3}+\sqrt{5x-3}=\sqrt{1-x}+1$

b) $x^2+(3-x)\sqrt{2x-1}=x\left(3+\sqrt{2x^2-5x+2}-\sqrt{x-2}\right)$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $\begin{cases}-5x^2+8x-3\ge 0\\ 5x-3\ge 0\\ 1-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow \frac{3}{5}\le x\le 1$

Phương trình $\sqrt{(5x-3)(1-x)}+\sqrt{5x-3}=\sqrt{1-x}+1$

$\Leftrightarrow(\sqrt{5x-3}-1)(\sqrt{1-x}+1)=0$

$\Leftrightarrow\sqrt{5x-3}=1\Leftrightarrow x=\frac{4}{5}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có nghiệm $x=\frac{4}{5}$.

b) ĐKXĐ: $\begin{cases}2x^2-5x+2\ge 0\\ 2x-1\ge 0\\ x-2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 2$

Phương trình

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x-2}\sqrt{2x-1}-x\sqrt{x-2}\right)+3x-x^2-3\sqrt{2x-1}+x\sqrt{2x-1}=0$

$\Leftrightarrow\sqrt{x-2}\left(\sqrt{2x-1}-x\right)+x(3-x)+\sqrt{2x-1}(x-3)=0$

$\Leftrightarrow(\sqrt{2x-1}-x)(\sqrt{x-2}-3+x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2x-1}=x\\ \sqrt{x-2}=3-x\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-1=x^2\\ \begin{cases}3-x\ge 0\\ x-2=(3-x)^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x+1=0\\ \begin{cases}x\le 3\\ x^2-7x+11=0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ \begin{cases}x\le 3\\ x=\frac{7\pm\sqrt{5}}{2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\frac{7-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện $x\ge 2$ suy ra $x=\frac{7-\sqrt{5}}{2}$ thỏa mãn

Vậy phương trình có nghiệm là $x=\frac{7-\sqrt{5}}{2}$.

Ví dụ 3: Giải các bất phương trình sau

a) $x+1\ge\sqrt{2(x^2-1)}$ b) $\sqrt{(x+5)(3x+4)}>4(x-1)$

Lời giải

a) Bất phương trình

$\Leftrightarrow\begin{cases}2(x^2-1)\ge 0\\ x+1\ge 0\\ 2(x^2-1)\le(x+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\ x\le -1\end{array}\right.\\ x\ge -1\\ x^2-2x-3\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\ x\le -1\end{array}\right.\\ x\ge -1\\ 1\le x\le 3\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ 1\le x\le 3\end{array}\right.$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S=\{-1\}\cup[1;3]$.

b) Bất phương trình

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4(x-1)<0\\ (x+5)(3x+4)\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x-1\ge 0\\ (x+5)(3x+4)>16(x-1)^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<1\\ \left[\begin{array}{l}x\ge -\frac{4}{3}\\ x\le -5\end{array}\right.\end{array}\right.\\ \begin{cases}x\ge 1\\ 13x^2-51x-4<0\end{cases}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x\le -5\\ -\frac{4}{3}\le x<1\end{array}\right.\\ \begin{cases}x\ge 1\\ -\frac{1}{13}<x<4\end{cases}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le -5\\ -\frac{4}{3}\le x<1\\ 1\le x<4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le -5\\ -\frac{4}{3}\le x<4\end{array}\right.$

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S=(-\infty;-5]\cup[-\frac{4}{3};4)$.

Loại 2: Đặt ẩn phụ

Ví dụ 4: Giải các bất phương trình sau

a) $\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}+2\sqrt{49x^2+7x-42}<181-14x$

b) $3\sqrt{x}+\frac{3}{2\sqrt{x}}<2x+\frac{1}{2x}-7$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $\begin{cases}7x+7\ge 0\\ 7x-6\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge\frac{6}{7}$:

Đặt : $t=\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}, t\ge 0$

$\Rightarrow t^2=7x+7+7x-6+2\sqrt{(7x+7)(7x-6)}\Rightarrow 14x+2\sqrt{(7x+7)(7x-6)}=t^2-1$

Bất phương trình trở thành $t^2+t-1<181\Leftrightarrow t^2+t-182<0\Leftrightarrow -14<t<13$

Ta có $\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}<13$

$\Leftrightarrow\sqrt{49x^2+7x-42}<84-7x\Leftrightarrow\begin{cases}x<12\\ 49x^2+7x-42<(84-7x)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<12\\ x<6\end{cases}\Leftrightarrow x<6$

Đối chiếu với điều kiện xác định suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left[\frac{6}{7};6\right)$

b) ĐKXĐ: $x>0$.

Bất phương trình $\Leftrightarrow 3\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)<2\left(x+\frac{1}{4x}\right)-7$

Đặt $t=\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}, t>0 \Rightarrow t^2=x+\frac{1}{4x}+1 \Rightarrow x+\frac{1}{4x}=t^2-1$

Bất phương trình trở thành $3t<2\left(t^2-1\right)-7$

$$\Leftrightarrow 2t^2-3t-9>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t>3 \\ t<-\frac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow t>3 \,(\text{do } t>0)$$

Ta có $\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}>3 \Leftrightarrow x+1+\frac{1}{4x}>9 \Leftrightarrow 4x^2-36x+1>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>\frac{8+3\sqrt{7}}{2} \\ x<\frac{8-3\sqrt{7}}{2} \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện xác định suy ra tập nghiệm bất phương trình là

$$S=\left(0;\frac{8-3\sqrt{7}}{2}\right)\cup\left(\frac{8+3\sqrt{7}}{2};+\infty\right).$$

Ví dụ 5: Giải các bất phương trình

a) $x+1+\sqrt{x^2-4x+1}\geq 3\sqrt{x}$ b) $1>\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{x^2-1}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $\left\{\begin{array}{l} x^2-4x+1\geq 0 \\ x\geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\left[\begin{array}{l} x\geq 2+\sqrt{3} \\ x\leq 2-\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 2+\sqrt{3} \\ 0\leq x\leq 2-\sqrt{3} \end{array}\right.$

Dễ thấy $x=0$ là nghiệm của bất phương trình.

Với $x>0$, bất phương trình tương đương với $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x+\frac{1}{x}-4}\geq 3$

Đặt $t=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}, t>0 \Rightarrow t^2-2=x+\frac{1}{x}$, bất phương trình trở thành

$$\sqrt{t^2-6}\geq 3-t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-t<0 \\ \left\{\begin{array}{l} 3-t\geq 0 \\ t^2-6\geq (3-t)^2 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t>3 \\ \left\{\begin{array}{l} t\leq 3 \\ t\geq \frac{5}{2} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow t\geq \frac{5}{2}$$

Từ đó ta có $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\geq\frac{5}{2} \Leftrightarrow x+\frac{1}{x}+2\geq\frac{25}{4} \Leftrightarrow 4x^2-17x+4\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq 4 \\ x\leq\frac{1}{4} \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện suy ra tập nghiệm bất phương trình đã cho là

$$S=\left[0;\frac{1}{4}\right]\cup[4;+\infty)$$

b) ĐKXĐ: $1-x^2>0 \Leftrightarrow -1<x<1$

Bất phương trình $\Leftrightarrow \frac{1}{1-x^2}-1+2>\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \Leftrightarrow \frac{x^2}{1-x^2}-3\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+2>0$.

Đặt $t=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ta có bất phương trình: $t^2-3t+2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<1 \\ t>2 \end{array}\right.$

* $t<1 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}<1 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}>x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x<0 \\ \left\{\begin{array}{l} 0\leq x<1 \\ 1-x^2>x^2 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x<0 \\ 0\leq x<\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \Leftrightarrow -1<x<\frac{1}{\sqrt{2}}$.

* $t>2 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}>2 \Leftrightarrow x>2\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0<x<1 \\ x^2>4(1-x^2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{5}}<x<1$.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $T=\left(-1;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup\left(\frac{2}{\sqrt{5}};1\right)$.

Ví dụ 6: Cho phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+\sqrt{x-x^2}=m$

a) Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất

b) Tìm m để phương trình có nghiệm.

Lời giải

ĐKXĐ: $0\leq x\leq 1$

a) Giả sử phương trình có nghiệm duy nhất x_0 tức là ta có

$\sqrt{x_0}+\sqrt{1-x_0}+\sqrt{x_0(1-x_0)}=m$ ta có thể viết lại là

$\sqrt{1-x_0}+\sqrt{x_0}+\sqrt{(1-x_0)x_0}=m$ do đó $1-x_0$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho

Do đó phương trình có nghiệm duy nhất thì $x_0=1-x_0 \Leftrightarrow x_0=\frac{1}{2}$ thay vào

ta có $m=\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$

Với $m=\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$ ta có phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+\sqrt{x-x^2}=\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$ (*)

Áp dụng BĐT côsi ta có $\sqrt{x-x^2}=\sqrt{x(1-x)}\le\frac{x+1-x}{2}=\frac{1}{2}$

Mặt khác $\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\right)^2=1+2\sqrt{x(1-x)}\le 2\Rightarrow\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\le\sqrt{2}$

Suy ra $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+\sqrt{x-x^2}\le\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$, đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Do đó phương trình (*) có nghiệm duy nhất

Vậy $m=\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$ là giá trị cần tìm.

b) Đặt $t=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\Rightarrow t^2=1+2\sqrt{x(1-x)}$

Theo câu a ta có $1\le\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\right)^2=1+2\sqrt{x(1-x)}\le 2$

Suy ra $1\le t\le\sqrt{2}$

Phương trình trở thành $t+\frac{t^2-1}{2}=m\Leftrightarrow t^2+2t-1=2m$ (**)

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (**) có nghiệm thỏa mãn $1\le t\le\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số $y=t^2+2t-1$ trên $\left[1;\sqrt{2}\right]$ cắt đường thẳng $y=2m$.

Xét hàm số $y=t^2+2t-1$ trên $\left[1;\sqrt{2}\right]$

Bảng biến thiên

t	1		$\sqrt{2}$
y			$1+2\sqrt{2}$
	0		

Suy ra phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow 1\le 2m\le 1+2\sqrt{2}$

hay $\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le m\le\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$.

Loại 3: Phương pháp đánh giá

Đối với phương trình ta thường làm như sau

Cách 1: Tìm một nghiệm và chứng minh nó là nghiệm duy nhất.

Cách 2: Biến đổi hằng đẳng thức đưa về bất phương trình $f(x)=0$ trong đó $f(x)$ là tổng các bình phương.

Cách 3: Với phương trình $f(x)=g(x)$ có tập xác định D

Nếu $\begin{cases}f(x)\ge m(x)\\ g(x)\le m(x)\end{cases}$, $\forall x\in D$ thì $f(x)=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=m(x)\\ g(x)=m(x)\end{cases}$.

Ví dụ 7: Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{\frac{6}{3-x}}+\sqrt{\frac{8}{2-x}}=6$ b) $\sqrt[4]{x+8}+\sqrt{x+4}=\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x<2$.

Ta thấy rằng phương trình có một nghiệm là $x=\frac{3}{2}$ và ta chứng minh đó là nghiệm duy nhất.

Thật vậy

* Với $x<\frac{3}{2}$ ta có $\frac{6}{3-x}>4\Rightarrow\sqrt{\frac{6}{3-x}}>2$ và $\sqrt{\frac{8}{2-x}}>\sqrt{\frac{8}{2-\frac{3}{2}}}=4$

$\Rightarrow\sqrt{\frac{6}{3-x}}+\sqrt{\frac{8}{2-x}}>6\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

* Với $\frac{3}{2}<x<2$ ta có $\frac{6}{3-x}<4\Rightarrow\sqrt{\frac{6}{3-x}}<2$ và $\sqrt{\frac{8}{2-x}}<\sqrt{\frac{8}{2-\frac{3}{2}}}=4$

Suy ra $\sqrt{\frac{6}{3-x}}+\sqrt{\frac{8}{2-x}}<6\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{3}{2}$.

b) ĐKXĐ: $x\ge 0$

Phương trình tương đương với $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+4}=\sqrt[4]{x+8}-\sqrt{3x}$

Dễ thấy $x=1$ là nghiệm của phương trình

Với $x>1$ ta có $2x+3>x+4\Leftrightarrow\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+4}>0$

Và $(x-1)(9x+8)>0\Leftrightarrow 9x^2-x-8>0\Leftrightarrow x+8<9x^2\Leftrightarrow\sqrt[4]{x+8}-\sqrt{3x}<0$

Suy ra phương trình vô nghiệm

Với $0\le x<1$ ta có $2x+3<x+4\Leftrightarrow\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+4}<0$

Và $(x-1)(9x+8)>0\Leftrightarrow 9x^2-x-8>0\Leftrightarrow x+8>9x^2\Leftrightarrow\sqrt[4]{x+8}-\sqrt{3x}>0$

Suy ra phương trình vô nghiệm

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Ví dụ 8: Giải các phương trình sau

a) $x^2-9x+28=4\sqrt{x-1}$ b) $\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+2x}=2-x^2$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x\ge 1$

Phương trình tương đương với

$x^2-10x+25+(x-1)-4\sqrt{x-1}+4=0\Leftrightarrow(x-5)^2+(\sqrt{x-1}-2)^2=0$ (*)

Vì $(x-5)^2+(\sqrt{x-1}-2)^2 \ge 0$ với mọi x nên

Phương trình (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x-5=0 \\ \sqrt{x-1}-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=5$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=5$.

b) ĐKXĐ: $\begin{cases} 1-2x \ge 0 \\ 1+2x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}$

Phương trình tương đương với $\left(\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+2x}\right)^2=\left(2-x^2\right)^2$

$\Leftrightarrow 2+2\sqrt{1-4x^2}=4-4x^2+x^4 \Leftrightarrow \left(\sqrt{1-4x^2}-1\right)^2+x^4=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \sqrt{1-4x^2}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=0$.

Ví dụ 9: Giải các phương trình sau

a) $\frac{2x^2+x-1}{1+3\sqrt{x+1}}=\sqrt{x(x-1)}$ b) $\sqrt[3]{x^2-1}+x=\sqrt{x^3-2}$

Lời giải

a) Giả sử phương trình có nghiệm, khi đó nghiệm của nó phải thỏa mãn

$\begin{cases} x+1>0 \\ x(x-1)\ge 0 \\ 2x^2+x-1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-1\} \cup [1;+\infty)$

Rõ ràng $x=-1$ không là nghiệm của phương trình, ta xét $x \ge 1$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 2x^2+x-1=\sqrt{x^2-x}+3\sqrt{x(x^2-1)}$ (*)

Áp dụng BĐT côsi ta có: $\sqrt{x^2-x} \le \frac{x^2-x}{2}$, $3\sqrt{x(x^2-1)} \le \frac{3\left(x+x^2-1\right)}{2}$

Suy ra $VP(*) \le \frac{x^2-x}{2}+\frac{3\left(x+x^2-1\right)}{2}=2x^2+x-1=VT(*)$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x^2-x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

Thử lại phương trình ta thấy $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ là nghiệm của phương trình

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

b) ĐKXĐ: $x^3-2\ge 0 \Leftrightarrow x \ge \sqrt[3]{2}$

Giả sử phương trình có nghiệm

Sử dụng bất đẳng thức côsi, ta được $\sqrt[3]{x^2-1} \le \frac{2(x-1)+(x+1)+4}{6}=\frac{x+1}{2}$.

Kết hợp với phương trình suy ra $\frac{x+1}{2}+x \ge \sqrt{x^3-2}$

$\Leftrightarrow 4(x^3-2) \le (3x+1)^2 \Leftrightarrow (x-3)(4x^2+3x+3) \le 0 \Leftrightarrow x \le 3$

Như vậy ta có $\sqrt[3]{2} \le x \le 3$. (**)

Ta có $\sqrt[3]{x^2-1} \ge x-1 \Leftrightarrow x+1 \ge (x-1)^2 \Leftrightarrow x(3-x) \ge 0$ (đúng với đk (**))

và $\sqrt{x^3-2} \le 2x-1 \Leftrightarrow (x-3)(x^2-x+1) \le 0$ (đúng với đk (**))

Suy ra $\sqrt[3]{x^2-1}+x \ge 2x-1 \ge \sqrt{x^3-2}$

Đẳng thức xảy ra khi $x=3$. Thử lại ta thấy $x=3$ là nghiệm của phương trình đã cho

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=3$.

Nhận xét: Với điều kiện xác định của phương trình thì việc đánh giá của chúng ta khó khăn, đôi khi là không thể đánh giá vì miền của biến lúc đó rộng không đảm bảo cho việc đánh giá. Do đó rằng buộc thêm điều kiện đối với nghiệm của phương trình giúp chúng ta thuận lợi trong đánh giá từ đó giải quyết được bài toán.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 4.110: Giải các bpt sau :

a) $\sqrt{x-3}<2x-1$ b) $\sqrt{x^2-x+1} \le x+3$

c) $\sqrt{3x-2}>4x-3$ d) $\sqrt{3x^2+x-4} \ge x+1$

Hướng dẫn giải

a) Bpt $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1>0 \\ x-3\ge 0 \\ x-3<(2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{2} \\ x\ge 3 \\ 4x^2-5x+4>0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 3$

b) Bpt $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x+1\ge 0 \\ x+3\ge 0 \\ x^2-x+1\le (x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge -\frac{8}{7}$

c) Bpt $\Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3<0 \\ 3x-2\ge 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 4x-3\ge 0 \\ 3x-2>(4x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}\le x<\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4}\le x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3}\le x<1$

d) Bpt $\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+1\le 0 \\ 3x^2+x-4\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1>0 \\ 3x^2+x-4\ge (x+1)^2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -\frac{4}{3} \\ x\ge \frac{1+\sqrt{41}}{4} \end{cases}$

Bài 4.111: Giải các bất phương trình sau.

a) $(x^2-3x)\sqrt{2x^2-3x-2}\ge 0$ b) $x^2+3x+1\le (x+3)\sqrt{x^2+1}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta xét hai trường hợp

TH 1: $2x^2-3x-2=0\Leftrightarrow x=2, x=-\frac{1}{2}$. Khi đó BPT luôn đúng

TH 2: Bpt $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-3-2>0 \\ x^2-3x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-\frac{1}{2} \text{ V } x>2 \\ x\le 0 \text{ V } x\ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow x<-\frac{1}{2} \text{ V } x\ge 3$.

Vậy nghiệm của Bpt đã cho là: $T=\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup\{2\}\cup[3;+\infty)$.

b) Bất phương trình $\Leftrightarrow x(x+3)-(x+3)\sqrt{x^2+1}+1\le 0$

$\Leftrightarrow (x+3)(x-\sqrt{x^2+1})+(\sqrt{x^2+1})^2-x^2\le 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-3\right)\le 0$ (*)

Do $\sqrt{x^2+1}-x>\sqrt{x^2}-x=|x|-x\ge 0$

$\Rightarrow$ (*) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}\le 3\Leftrightarrow x^2\le 8\Leftrightarrow -2\sqrt{2}\le x\le 2\sqrt{2}$.

Vậy $-2\sqrt{2}\le x\le 2\sqrt{2}$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Bài 4.112: Giải các bpt sau :

a) $\sqrt{2x^2-6x+1}-x+2>0$ b) $\sqrt{x+3}\ge\sqrt{2x-8}+\sqrt{7-x}$

c) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}<\sqrt{x}$ d) $\frac{2x^2}{\left(3-\sqrt{9+2x}\right)^2}<x+21$

Hướng dẫn giải

a) Bpt $\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-6x+1}>x-2\Leftrightarrow \begin{cases} x-2<0 \\ 2x^2-6x+1\ge 0 \end{cases}$

hoặc $\begin{cases} x-2\ge 0 \\ (2x^2-6x+1)>(x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ \begin{cases} x\le \frac{3-\sqrt{7}}{2} \\ x\ge \frac{3+\sqrt{7}}{2} \end{cases} \end{cases}$

hoặc $\begin{cases} x\ge 2 \\ x^2-2x-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ x\le \frac{3-\sqrt{7}}{2} \end{cases}$

b) ĐKXĐ: $\begin{cases} x+3\ge 0 \\ 2x-8\ge 0 \\ 7-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4\le x\le 7$

Bpt $\Leftrightarrow x+3\ge\left(\sqrt{2x-8}+\sqrt{7-x}\right)^2\Leftrightarrow 3\ge -1+2\sqrt{(2x-8)(7-x)}$

$\Leftrightarrow 2\ge\sqrt{(2x-8)(7-x)}\Leftrightarrow 4\ge -2x^2+22x-56$

$\Leftrightarrow x^2-11x+30\ge 0\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 5 \\ x\ge 6 \end{cases}$

Đối chiếu điều kiện ta nghiệm bpt là $\begin{cases} 4\le x\le 5 \\ 6\le x\le 7 \end{cases}$

c) ĐKXĐ: $\begin{cases} x+2\ge 0 \\ x+1\ge 0 \\ x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 0$

Bpt $\Leftrightarrow \sqrt{x+2}<\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\Leftrightarrow x+2<2x+1+2\sqrt{(x+1)x}$

$\Leftrightarrow 1-x<2\sqrt{(x+1)x}\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x<0 \\ x\ge 0 \end{cases}$

hoặc $\begin{cases} 1-x\ge 0 \\ (1-x)^2<4x(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-\frac{3+2\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-3+2\sqrt{3}}{3}<x \end{cases}$

Đối chiếu điều kiện ta nghiệm bpt là $x>\frac{-3+2\sqrt{3}}{3}$

d) ĐKXĐ: $\begin{cases} 9+2x\ge 0 \\ 3-\sqrt{9+2x}\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -\frac{9}{2} \\ x\ne 0 \end{cases}$

Bpt $\Leftrightarrow \frac{2x^2\left(3+\sqrt{9+2x}\right)^2}{4x^2}<x+21\Leftrightarrow \sqrt{9+2x}<4\Leftrightarrow x<\frac{7}{2}$

Đối chiếu điều kiện ta nghiệm bpt là $\begin{cases} -\frac{9}{2} \le x < \frac{7}{2} \\ x \ne 0 \end{cases}$

Bài 4.143: Giải các bất phương trình sau:

a) $\frac{\sqrt{-3x^2+x+4}+2}{x} < 2$ b) $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-4x+3} \ge 2\sqrt{x^2-5x+4}$

Hướng dẫn giải

a) ĐKXĐ : $\begin{cases} -1 \le x \le \frac{4}{3} : \\ x \ne 0 \end{cases}$

Với $0 < x \le \frac{4}{3}$: BPT $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{-3x^2+x+4}+2}{x} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{-3x^2+x+4} < 2x-2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2 \ge 0 \\ -3x^2+x+4 < (2x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ 7x^2-9x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{9}{7}$

Suy ra nghiệm của bất phương trình là $\frac{9}{7} < x \le \frac{4}{3}$

Với $-1 \le x < 0$: bpt luôn đúng

Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm bpt là $\begin{bmatrix} -1 \le x < 0 \\ \frac{9}{7} < x \le \frac{4}{3} \end{bmatrix}$

b) ĐKXĐ: $\begin{cases} x^2-3x+2 \ge 0 \\ x^2-4x+3 \ge 0 \\ x^2-5x+4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \ge 4 \\ x \le 1 \end{bmatrix}$

Bpt $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(x-2)}+\sqrt{(x-1)(x-3)} \ge 2\sqrt{(x-1)(x-4)}$

Dễ thấy $x = 1$ là nghiệm của bpt.

+ Với $x < 1$: Bpt $\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(2-x)}+\sqrt{(1-x)(3-x)} \ge 2\sqrt{(1-x)(4-x)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2-x}+\sqrt{3-x} \ge 2\sqrt{4-x}$

Ta có : $\sqrt{2-x}+\sqrt{3-x} < \sqrt{4-x}+\sqrt{4-x} = 2\sqrt{4-x}$

Suy ra $x < 1$ bpt vô nghiệm .

+) Với $x \ge 4$: bpt $\Leftrightarrow \sqrt{x-2}+\sqrt{x-3} \ge 2\sqrt{x-4}$

Ta có : $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3} \ge \sqrt{x-4}+\sqrt{x-4} = 2\sqrt{x-4}, \forall x, x \ge 4$

Suy ra : $x \ge 4$ bất pt luôn đúng .

Vậy nghiệm của bpt là : $\begin{bmatrix} x = 1 \\ x \ge 4 \end{bmatrix}$

Bài 4.114: Giải các bất phương trình sau:

a) $\sqrt{3x^2+6x+4} < 2-2x-x^2$ b) $2x^2+4x+3\sqrt{3-2x-x^2} > 1$

c) $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2} \ge 1$ d) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} > \frac{3}{2}$

e) $5\sqrt{x}+\frac{5}{2\sqrt{x}} < 2x+\frac{1}{2x}+4$ f) $\frac{x}{x+1}-2\sqrt{\frac{x+1}{x}} > 3$ g) $x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} > \frac{35}{12}$

Hướng dẫn giải

a) Đặt : $t = \sqrt{3x^2+6x+4}, t \ge 0 \Rightarrow x^2+2x = \frac{t^2-4}{3}$

Bất phương trình trở thành

$t < 2-\frac{t^2-4}{3} \Leftrightarrow t^2+3t-10 < 0 \Leftrightarrow 0 \le t < 2 (t \ge 0)$

Ta có $\sqrt{3x^2+6x+4} < 2 \Leftrightarrow 3x^2+6x+4 < 4 \Leftrightarrow 3x^2+6x < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 0$

Vậy nghiệm bpt là $-2 < x < 0$.

b) ĐKXĐ: $-3 \le x \le 1$

Đặt : $t = \sqrt{3-2x-x^2}, t \ge 0 \Rightarrow t^2 = 3-2x-x^2 \Rightarrow 2x+x^2 = 3-t^2$

Bất phương trình trở thành

$2(3-t^2)+3t > 1 \Leftrightarrow 2t^2-3t-5 < 0 \Leftrightarrow 0 \le t < \frac{5}{2} (\text{do } t \ge 0)$

Ta có $\sqrt{3-2x-x^2} < \frac{5}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le x \le 1 \\ 3-2x-x^2 < \frac{25}{4} \end{cases} \Leftrightarrow -3 \le x \le 1$

Vậy nghiệm bpt là $-3 \le x \le 1$.

c) ĐKXĐ: $\begin{bmatrix} x \ge -\frac{2}{3} \\ x \le -1 \end{bmatrix}$

Đặt $t = \sqrt{3x^2+5x+2}, t \ge 0 \Rightarrow 3x^2+5x = t^2-2$

Bất phương trình trở thành $\sqrt{t^2+5}-t \ge 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{t^2+5} \ge t+1 \Leftrightarrow t^2+5 \ge (t+1)^2 \Leftrightarrow t \le 2$

Ta có $\sqrt{3x^2+5x+2} \le 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+5x+2 \ge 0 \\ 3x^2+5x+2 \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} x \ge -\frac{2}{3} \\ x \le -1 \end{bmatrix} \\ -2 \le x \le \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 \le x \le -1 \\ -\frac{2}{3} \le x \le \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

d) ĐKXĐ: $x \ge 1$

Bpt $\Leftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2} > \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \left|\sqrt{x-1}+1\right|+\left|\sqrt{x-1}-1\right| > \frac{3}{2}$

Đặt $t=\sqrt{x-1}, t \ge 0$

Bất phương trình trở thành $t+1+|t-1| > \frac{3}{2}$ (*)

+) Với $t \ge 1$ ta có (*) $\Leftrightarrow 2t > \frac{3}{2} \Leftrightarrow t > \frac{3}{4}$

Suy ra nghiệm bpt(*) là $t \ge 1$ do đó $\sqrt{x-1} \ge 1 \Leftrightarrow x \ge 2$

+) Với $0 \le t < 1$ ta có (*) $\Leftrightarrow 2 > \frac{3}{2}$ đúng mọi t

Do đó $0 \le \sqrt{x-1} \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x \le 2 \end{cases}$

Vậy nghiệm bpt là $x \ge 1$

e) ĐKXĐ : $x > 0$

Bpt $\Leftrightarrow 5\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) < 2x+\frac{1}{2x}+4$

Đặt $t=\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}} \ge 2\sqrt{\sqrt{x}.\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\sqrt{2}, t \ge \sqrt{2} \Rightarrow x+\frac{1}{4x}=t^2-1$

Bất phương trình trở thành $5t < 2\left(t^2-1\right)+4 \Leftrightarrow 2t^2-5t+2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<\frac{1}{2} \\ t>2 \end{array}\right.$

Vì $t \ge \sqrt{2} \Rightarrow t > 2$ ta có $\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}} > 2 \Leftrightarrow 2x-4\sqrt{x}+1>0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<\sqrt{x}<\frac{2-\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{x}>\frac{2+\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<\frac{3-2\sqrt{2}}{2} \\ x>\frac{3+2\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$

Vậy nghiệm bpt là $0<x<\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$ và $x>\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$.

f) ĐKXĐ: $x<-1, x>0$

Đặt: $t=\sqrt{\frac{x+1}{x}}, t>0 \Rightarrow \frac{x}{x+1}=\frac{1}{t^2}$

Ta được : $\frac{1}{t^2}-2t>3 \Leftrightarrow 2t^3+3t^2-1<0 \Leftrightarrow (t+1)\left(2t^2+t-1\right)<0$

$\Leftrightarrow 0<t<\frac{1}{2}$ (vì $t>0$)

Ta có $0<\sqrt{\frac{x+1}{x}}<\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{4}{3}<x<-1$

Vậy nghiệm bpt là $-\frac{4}{3}<x<-1$.

g) ĐKXĐ: $x^2-1>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>1 \end{array}\right.$.

+) Với $x<-1$: bpt VN

+) Với $x>1$: bpt $\Leftrightarrow x^2+\frac{x^2}{x^2-1}+2.\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} > \frac{1225}{144}$

$\Leftrightarrow \frac{x^4}{x^2-1}+2.\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1225}{144}>0$

Đặt : $t=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}, t>0$, bất phương trình trở thành

$\Leftrightarrow t^2+2t-\frac{1225}{144}>0 \Leftrightarrow t>\frac{25}{12}$ (do $t>0$)

Do đó ta có $\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} > \frac{25}{12} \Leftrightarrow 144x^4>625x^2-625$

$\Leftrightarrow 144x^4-625x^2+625>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le x^2 < \frac{25}{16} \\ x^2>\frac{25}{9} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1<x<\frac{5}{4} \\ x>\frac{5}{3} \end{array}\right.$ (do $x>1$)

Bài 4.115: Giải các phương trình sau:

a) $x+2\sqrt{7-x}=2\sqrt{x-1}+\sqrt{-x^2+8x-7}+1$

b) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}=\frac{(2x-1)^2}{2}$

c) $\sqrt{10x+1}+\sqrt{3x-5}=\sqrt{9x+4}+\sqrt{2x-2}$

d) $\sqrt{x-1}-(x-1)^2=8-x^3$

Hướng dẫn giải

a) ĐKXĐ: $1 \le x \le 7$.

Ta có: PT $\Leftrightarrow x-1+2\sqrt{7-x}-2\sqrt{x-1}-\sqrt{(7-x)(x-1)}=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1}-2\right)-\sqrt{7-x}\left(\sqrt{x-1}-2\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x-1}=2\\ \sqrt{x-1}=\sqrt{7-x}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=5\\ x=4\end{array}\right..$$

b) ĐKXĐ: $\frac{-1}{2}\le x\le \frac{3}{2}$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}\right)^2=\frac{(4x^2-4x+1)^2}{4}$

$$\Leftrightarrow 4+2\sqrt{-4x^2+4x+3}=\frac{(4x^2-4x+1)^2}{4}.$$

Đặt $t=\sqrt{-4x^2+4x+3}=\sqrt{4-(2x-1)^2}\Rightarrow 0\le t\le 2$. Ta có phương trình :

$16+8t=(4-t^2)^2\Leftrightarrow t^4-8t^2-8t=0\Leftrightarrow t(t^3-8t-8)=0$

$\Leftrightarrow t(t+2)(t^2-2t-4)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=0\ \ (n)\\ t=1+\sqrt{5}\ \ (l)\end{array}\right.$.

$t=0\Leftrightarrow \sqrt{-4x^2+4x+3}=0\Leftrightarrow 4x^2-4x-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\frac{1}{2}\\ x=\frac{3}{2}\end{array}\right.$.

Vậy $x=-\frac{1}{2}; x=\frac{3}{2}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

c) ĐKXĐ: $x\ge\frac{5}{3}$.

Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{10x+1}-\sqrt{9x+4}+\sqrt{3x-5}-\sqrt{2x-2}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{\sqrt{10x+1}+\sqrt{9x+4}}+\frac{x-3}{\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x-2}}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{1}{\sqrt{10x+1}+\sqrt{9x+4}}+\frac{1}{\sqrt{3x-5}+\sqrt{2x-2}}\right)=0$$

$\Leftrightarrow x=3$

(thỏa điều kiện).

Vậy $x=3$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

d) PT $\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+x^3-x^2+2x-9=0$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}+(x-2)(x^2+x+4)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}+x^2+x+4\right)=0\Leftrightarrow x=2$$

Bài 4.116: Giải các phương trình sau

a) $x^2-2x+3=\sqrt{2x^2-x}+\sqrt{1+3x-3x^2}$

b) $\sqrt[3]{14-x^3}=2\sqrt{x^2-2x-1}+2-x$

c) $2\sqrt{1+3x}-\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}=5$

Hướng dẫn giải

a) Theo côsi ta có:

$$\sqrt{2x^2-x}\le\frac{2x^2-x+1}{2};\ \sqrt{1+3x-3x^2}\le\frac{2+3x-3x^2}{2}$$

Suy ra $\sqrt{2x^2-x}+\sqrt{1+3x-3x^2}\le\frac{-x^2+2x+3}{2}$

Mà $\frac{-x^2+2x+3}{2}\le 2.$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x=1$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy pt đã cho có nghiệm duy nhất x=1.

b) ĐKXĐ: $x^2-2x-1\ge 0$.

Do $\sqrt{x^2-2x-1}\ge 0$ nên $\sqrt[3]{14-x^3}\ge 2-x$

$\Leftrightarrow 14-x^3\ge 8-12x+6x^2-x^3\Leftrightarrow x^2-2x-1\le 0$

Suy ra phương trình có nghiệm thì $x^2-2x-1=0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2}$

Thử lại ta thấy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1-\sqrt{2}$.

c) ĐK: $x>0$. Áp dụng BĐT **Bunhiacopxky** ta có:

$(1+3x)(1+3)\ge\left(1+3\sqrt{x}\right)^2\Rightarrow 2\sqrt{1+3x}\ge 1+3\sqrt{x}$

Suy ra $2\sqrt{1+3x}-\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\ge 2\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}+1\ge 5$.

Đẳng thức xảy ra khi $x=1$ và đó cũng là nghiệm của phương trình.

Bài 4.117: Giải phương trình $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-11x+33}+\sqrt{3x-5}$

Hướng dẫn giải

ĐKXĐ: $\left\{\begin{array}{l}2x+3\ge 0\\ x+1\ge 0\\ x^2-11x+33\ge 0\\ 3x-5\ge 0\end{array}\right.\Leftrightarrow x\ge\frac{5}{3}$

Phương trình tương đương với

$$2\sqrt{(2x+3)(x+1)}=x^2-11x+24+2\sqrt{\left(x^2-11x+33\right)(3x-5)}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{(2x+3)(x+1)}-\sqrt{\left(x^2-11x+33\right)(3x-5)}\right)=x^2-11x+24$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{-3x^3+40x-149x+168}{\sqrt{(2x+3)(x+1)}+\sqrt{\left(x^2-11x+33\right)(3x-5)}}=x^2-11x+24$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{(3x-7)\left(-x^2+11x-24\right)}{\sqrt{(2x+3)(x+1)}+\sqrt{\left(x^2-11x+33\right)(3x-5)}}=x^2-11x+24$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-11x+24\right)\left(\frac{2(3x-7)}{\sqrt{(2x+3)(x+1)}+\sqrt{\left(x^2-11x+33\right)(3x-5)}}+1\right)=0$$

$\Leftrightarrow x^2-11x+24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=8 \end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy phương trình có nghiệm là $x=3$ và $x=8$.

Bài 4.118: Cho phương trình: $\sqrt{2x^2-2(m+1)x+m^2+m}=x-1\,(1)$

a) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm.

b) Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

c) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

Hướng dẫn giải

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x-1\ge 0 \\ x^2-2(m+1)x+m^2+m=(x-1)^2\,(2) \end{cases}$

Đặt $t=x-1$, vì $x-1\ge 0$ nên ta có điều kiện $t\ge 0$, thay vào phương trình (2) ta được phương trình: $t^2-2(m-1)t+m^2-m=0\,(3)$

a) Để phương trình (1) có nghiệm thì phương trình (3) có nghiệm $t\ge 0$

TH1: Phương trình (3) có nghiệm $t_1\le 0\le t_2 \Leftrightarrow P\le 0\Leftrightarrow m^2-m\le 0\Leftrightarrow 0\le m\le 1$

TH2: Phương trình (3) có nghiệm $0\le t_1\le t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'\ge 0 \\ P\ge 0 \\ S\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m\ge 0 \\ m^2-m\ge 0 \\ m-1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=1.$

Kết luận: Với $m\in[0;1]$ thì phương trình (1) có nghiệm.

b) Để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt thì phương trình (3) có 2 nghiệm

$$0\le t_1<t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ P\ge 0 \\ S>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m>0 \\ m^2-m\ge 0 \\ m-1>0 \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}$$

Kết luận: Không tồn tại m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

c) Để phương trình (1) có nghiệm duy nhất thì phương trình (3) có đúng 1 nghiệm $t\ge 0$

TH1: Phương trình (3) có nghiệm

$t_1<0<t_2 \Leftrightarrow P<0\Leftrightarrow m^2-m<0\Leftrightarrow 0<m<1.$

TH2: Phương trình (3) có nghiệm

$$t_1<0=t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ P=0 \\ S<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m>0 \\ m^2-m=0 \\ m-1<0 \end{cases} \Leftrightarrow m=0.$$

TH3: Phương trình (3) có nghiệm $0\le t_1=t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=0 \\ S\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m=0 \\ m-1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=1.$

Kết luận: Với $m\in[0;1]$ thì phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

Bài 4.119: Cho phương trình $x^2-m\sqrt{x^2+1}+3m+2=0\,(1)$.

a) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm.

b) Tìm m để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt.

c) Tìm m để phương trình (1) có nghiệm duy nhất.

Hướng dẫn giải

ĐK $x\in R$. Đặt $t=\sqrt{x^2+1}-1\ (t\ge 0)$ suy ra $x^2=(t+1)^2-1$, thay vào phương trình (1) ta được phương trình: $t^2-(m-2)t+3m+2=0\ (2)$

a) Để phương trình (1) có nghiệm thì phương trình (2) có nghiệm $t\ge 0$

TH1: Phương trình (2) có nghiệm $t_1\le 0\le t_2 \Leftrightarrow P\le 0\Leftrightarrow 3m+2\le 0\Leftrightarrow m\le \frac{-2}{3}$

TH2: Phương trình (2) có nghiệm

$$0\le t_1\le t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta\ge 0 \\ P\ge 0 \\ S\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-16m-4\ge 0 \\ 3m+2\ge 0 \\ m-2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\ge 8+\sqrt{68}$$

Kết luận: với $m\in\left(-\infty;\frac{-2}{3}\right]\cup\left[8+\sqrt{68};+\infty\right)$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

b) Để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt thì phương trình (2) có 2 nghiệm thỏa:

$$0<t_1<t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ P>0 \\ S>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-16m-4>0 \\ 3m+2>0 \\ m-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow m>8+\sqrt{68}$$

Kết luận: Với $m\in\left(8+\sqrt{68};+\infty\right)$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

c) Để pt (1) có nghiệm duy nhất ta xét 2 trường hợp sau:

TH1: Phương trình (2) có nghiệm

$$t_1 < 0 = t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P = 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 16m - 4 > 0 \\ 3m + 2 = 0 \\ m - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{-2}{3}.$$

TH2: Phương trình (2) có nghiệm $0 = t_1 = t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ S = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 16m - 4 = 0 \\ m - 2 = 0 \end{cases}$

(vô nghiệm)

Kết luận: với $m = \frac{-2}{3}$ thì pt (1) có nghiệm duy nhất.

ÔN TẬP CHƯƠNG IV

Bài 4.120: Cho các số thực a, b, c là số thực. Chứng minh rằng:

a) $a^4 + b^4 + c^2 + 1 \geq 2a(ab^2 - a + c + 1)$ b) $\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 \geq ab - ac + 2bc$

c) $(a^5 + b^5)(a + b) \geq (a^4 + b^4)(a^2 + b^2)$, với $ab > 0$.

Hướng dẫn giải

a) BĐT $\Leftrightarrow .(a^2 - b^2)^2 + (a - c)^2 + (a - 1)^2 \geq 0$.

b) BĐT $\Leftrightarrow \left(\frac{a}{2} - (b - c)\right)^2 \geq 0$

c) BĐT $\Leftrightarrow ab(a - b)(a^3 - b^3) \geq 0$

Bài 4.121: Cho a, b, c là số dương thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

a) $\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right) \geq 8$

b) $\sqrt{\frac{a+b}{b^2 + 4bc + c^2}} + \sqrt{\frac{b+c}{c^2 + 4ca + a^2}} + \sqrt{\frac{c+a}{a^2 + 4ab + b^2}} \geq 3$

Hướng dẫn giải

a) BĐT tương đương với $\frac{1-a}{a} \cdot \frac{1-b}{b} \cdot \frac{1-c}{c} \geq 8 \Leftrightarrow \frac{b+c}{a} \cdot \frac{c+a}{b} \cdot \frac{a+b}{c} \geq 8$

Áp dụng BĐT côsi ta có

$\frac{b+c}{a} \cdot \frac{c+a}{b} \cdot \frac{a+b}{c} \geq \frac{2\sqrt{bc}}{a} \cdot \frac{2\sqrt{ca}}{b} \cdot \frac{2\sqrt{ab}}{c} = 8$. ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

b) Áp dụng BĐT côsi ta có

$$\sqrt{\frac{a+b}{b^2 + 4bc + c^2}} + \sqrt{\frac{b+c}{c^2 + 4ca + a^2}} + \sqrt{\frac{c+a}{a^2 + 4ab + b^2}} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{a+b}{b^2 + 4bc + c^2} \cdot \frac{b+c}{c^2 + 4ca + a^2} \cdot \frac{c+a}{a^2 + 4ab + b^2}}}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{a+b}{b^2 + 4bc + c^2} \cdot \frac{b+c}{c^2 + 4ca + a^2} \cdot \frac{c+a}{a^2 + 4ab + b^2} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow (a + b)(b + c)(c + a) \geq \left(b^2 + 4bc + c^2\right)\left(c^2 + 4ca + a^2\right)\left(a^2 + 4ab + b^2\right) \quad (*)$$

Ta có $b^2 + 4bc + c^2 = (b + c)^2 + 2bc \leq (b + c)^2 + 2.\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = \frac{3(b+c)^2}{2}$

Tương tự ta có $c^2 + 4ca + a^2 \leq \frac{3(c+a)^2}{2}$ và $a^2 + 4ab + b^2 \leq \frac{3(a+b)^2}{2}$

Suy ra

$$\left(b^2 + 4bc + c^2\right)\left(c^2 + 4ca + a^2\right)\left(a^2 + 4ab + b^2\right) \leq \frac{27}{8}(a + b)^2 (b + c)^2 (c + a)^2 \quad (1)$$

Mặt khác $(a + b)(b + c)(c + a) \leq \left(\frac{2a + 2b + 2c}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra BĐT (*) đúng nên BĐT ban đầu đúng. ĐPCM.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài 4.122: Cho a, b, c là số dương và $abc = 1$. Chứng minh rằng :

a) $\frac{a^3}{(a+1)(b+1)} + \frac{b^3}{(c+1)(b+1)} + \frac{c^3}{(a+1)(c+1)} \geq \frac{3}{4}$

b) $\frac{1}{a + 2b + 3} + \frac{1}{b + 2c + 3} + \frac{1}{c + 2a + 3} \leq \frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

a) $\frac{a}{1 + b + ab} + \frac{b}{1 + c + bc} + \frac{c}{1 + c + ca} = \frac{ac}{c + bc + 1} + \frac{ba}{1 + ab + 1} + \frac{c}{1 + a + ab}$

Đặt $P = \frac{a^3}{(a+1)(b+1)} + \frac{b^3}{(c+1)(b+1)} + \frac{c^3}{(a+1)(c+1)}$

Áp dụng BĐT Côsi cho ba số thực dương ta có:

$$\frac{a^3}{(a+1)(b+1)} + \frac{a+1}{8} + \frac{b+1}{8} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{(a+1)(b+1)} \cdot \frac{a+1}{8} \cdot \frac{b+1}{8}} = \frac{3}{4}a.$$

Tương tự ta có

$\frac{b^3}{(c+1)(b+1)}+\frac{c+1}{8}+\frac{b+1}{8}\ge\frac{3}{4}b$; $\frac{c^3}{(c+1)(a+1)}+\frac{c+1}{8}+\frac{a+1}{8}\ge\frac{3}{4}c$

Cộng ba BĐT trên lại với nhau ta được:

$$P+\frac{a+b+c+3}{4}\ge\frac{3}{4}(a+b+c)\Rightarrow P\ge\frac{2(a+b+c)-3}{4}\ge\frac{2.3\sqrt[3]{abc}-3}{4}=\frac{3}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

b) Áp dụng BĐT côsi ta có $a+2b+3=(a+b)+(b+1)+2\ge2\sqrt{ab}+2\sqrt{b}+2$

Suy ra $\frac{1}{a+2b+3}\le\frac{1}{2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{b}+1\right)}$

Tương tự ta có : $\frac{1}{b+2c+3}\le\frac{1}{2\left(\sqrt{bc}+\sqrt{b}+1\right)}$, $\frac{1}{c+2a+3}\le\frac{1}{2\left(\sqrt{ca}+\sqrt{c}+1\right)}$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$$\frac{1}{a+2b+3}+\frac{1}{b+2c+3}+\frac{1}{c+2a+3}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{ab}+\sqrt{b}+1}+\frac{1}{\sqrt{bc}+\sqrt{c}+1}+\frac{1}{\sqrt{ca}+\sqrt{a}+1}\right)$$

Mặt khác $abc=1$ suy ra

$$\frac{1}{\sqrt{ab}+\sqrt{b}+1}+\frac{1}{\sqrt{bc}+\sqrt{c}+1}+\frac{1}{\sqrt{ca}+\sqrt{a}+1}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{ab}+\sqrt{b}+1}+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a}}+\sqrt{\frac{1}{ab}}+1}+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{b}}+\sqrt{a}+1}\le1$$

Suy ra $\frac{1}{a+2b+3}+\frac{1}{b+2c+3}+\frac{1}{c+2a+3}\le\frac{1}{2}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

Bài 4.123: Giải các bất phương trình sau

a) $x^2-3x-4\le0$ b) $(1-x)(x^2-5x+6)>0$.

Hướng dẫn giải

a) BXD :

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
VT		$+$	0	$-$	0	$+$	

Tập nghiệm : $T=[-1;4]$

b) BXD :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	$\|$	$-$	
x^2-5x+6		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	
VT		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$T=(-\infty;1)\cup(2;3)$.

Bài 4.124: Cho tam thức $f(x)=x^2+2(m-3)x+m+3$. Tìm m để

a) Phương trình $f(x)=0$ có nghiệm b) $f(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

a) $f(x)=0\Leftrightarrow x^2+2(m-3)x+m+3=0$ (*)

Phương trình (*) có nghiệm

$\Leftrightarrow\Delta'=(m-3)^2-(m+3)\ge0\Leftrightarrow m^2-7m+6\ge0\Leftrightarrow m\le1\cup m\ge6$.

Vậy $m\in(-\infty;1]\cup[6;+\infty)$ là những giá trị cần tìm.

b) $f(x)>0\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\Delta<0\Leftrightarrow m^2-7m+6<0\Leftrightarrow1<m<6$

Vậy $1<m<6$ là những giá trị cần tìm.

Bài 4.125: Cho tam thức: $f(x)=(m-1)x^2-4(m-1)x+2m+3$. Tìm m để

a) Phương trình $f(x)=0$ có nghiệm

b) Hàm số $y=\sqrt{f(x)}$ xác định $\forall x\in\mathbb{R}$

Hướng dẫn giải

a) $f(x)=0\Leftrightarrow(m-1)x^2-4(m-1)x+2m+3=0$ (*)

- $m=1\Rightarrow$ (*) $\Leftrightarrow5=0$ pt vô nghiệm $\Rightarrow m=1$ loại.
- $m\ne1$ (*) có nghiệm $\Leftrightarrow\Delta'=4(m-1)^2-(m-1)(2m+3)=(m-1)(2m-7)\ge0$

$\Leftrightarrow m<1\cup m\ge\frac{7}{2}$.

Vậy $m\in(-\infty;1)\cup[\frac{7}{2};+\infty)$ là những giá trị cần tìm.

b) Hàm số $y=\sqrt{f(x)}$ xác định $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f(x)\ge0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

- $m=1\Rightarrow f(x)=5>0\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow m=1$ thỏa mãn
- $m\ne1\Rightarrow f(x)\ge0\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}m-1>0\\\Delta=(m-1)(2m-7)\le0\end{cases}\Leftrightarrow1<m\le\frac{7}{2}$

Vậy $1\le m\le\frac{7}{2}$ là những giá trị cần tìm.

Bài 4.126: Xác định miền nghiệm của các bất phương trình và hệ bất phương trình sau:

a) $\frac{x+2y}{-2}>\frac{2x+y}{-3}$

b) $\begin{cases}2x+y>-3\\2(3x-y+3)<3(2x-y+2)\\x+y+1<0\end{cases}$

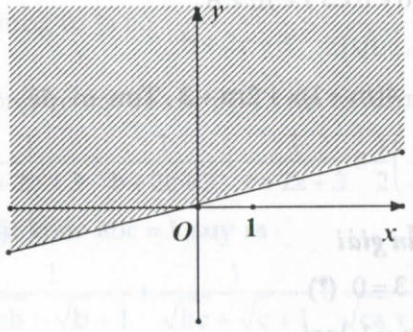
Hướng dẫn giải

a) Bpt $\Rightarrow 3(x+2y)<2(2x+y)\Leftrightarrow x-4y>0$

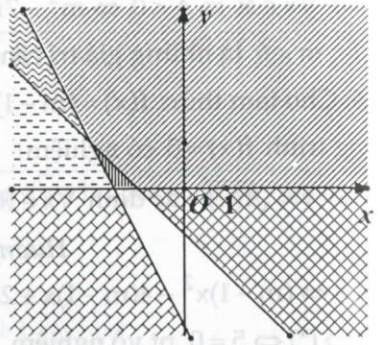
Vẽ đường thẳng $d: x-4y=0$

Dễ thấy $(1;0)$ là nghiệm của bất phương trình $x-4y>0$ nên miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ d (không kể bờ) chứa điểm $M(1;0)$ (hình a)

b) Hbpt $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+3>0 \\ y<0 \\ x+y+1<0 \end{cases}$ (hình b)



Hình a



Hình b

Bài 4.127: Giải bất phương trình:

a) $\sqrt{x}+\sqrt{9-x}\le\sqrt{-x^2+9x+6}$ b) $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-4x+3}\ge 2\sqrt{x^2-5x+4}$

Hướng dẫn giải

a) ĐKXĐ: $0\le x\le 9$

Bpt $\Leftrightarrow 9+2\sqrt{9x-x^2}\le -x^2+9x+6\Leftrightarrow 9x-x^2-2\sqrt{9x-x^2}-3\ge 0$.

Đặt $t=\sqrt{9x-x^2}$, $t\ge 0$,

Bất phương trình đã cho trở thành: $t^2-2t-3\ge 0\Leftrightarrow t\ge 3$

Ta có $\sqrt{9x-x^2}\ge 3\Leftrightarrow x^2-9x+9\le 0\Leftrightarrow \dfrac{9-3\sqrt{5}}{2}\le x\le\dfrac{9+3\sqrt{5}}{2}$

Kết hợp điều kiện ta có nghiệm của bất phương trình là:

$\dfrac{9-3\sqrt{5}}{2}\le x\le\dfrac{9+3\sqrt{5}}{2}$.

b) * Điều kiện: $\begin{cases} x^2-3x+2\ge 0 \\ x^2-4x+3\ge 0 \\ x^2-5x+4\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x\le 1 \\ x\ge 4 \end{array}\right.$.

$\sqrt{(x-1)(x-2)}+\sqrt{(x-1)(x-3)}\ge 2\sqrt{(x-1)(x-4)}$ (1)

TH1: Nếu $x\le 1$. Khi đó:

(1) $\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(2-x)}+\sqrt{(1-x)(3-x)}\ge 2\sqrt{(1-x)(4-x)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x}(\sqrt{2-x}+\sqrt{3-x}-2\sqrt{4-x})\ge 0$ (2)

+ Với $x=1$ thoả mãn (2) nên $x=1$ là một nghiệm của bpt.
+ Với $x<1$ thì $1-x>0$ nên ta có:

(2) $\Leftrightarrow \sqrt{2-x}+\sqrt{3-x}-2\sqrt{4-x}\ge 0\Leftrightarrow 2\sqrt{2-x}\sqrt{3-x}\ge 11-2x$

$\Leftrightarrow x\ge\dfrac{97}{24}$ không thoả mãn $x<1$

TH2: Nếu $x\ge 4$. Khi đó:

(1) $\Leftrightarrow \sqrt{x-1}\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}\sqrt{x-3}\ge 2\sqrt{x-1}\sqrt{x-4}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}\ge 2\sqrt{x-4}\Leftrightarrow 2\sqrt{(x-2)(x-3)}\ge 2x-11$ (3)

+ Nếu $4\le x\le\dfrac{11}{2}$ hiển nhiên thoả mãn (3) vì VP $\ge 0\ge$ VT
+ Nếu $x>\dfrac{11}{2}$ ta có: (3) $\Leftrightarrow 4(x-2)(x-3)\ge(2x-11)^2\Leftrightarrow x\ge\dfrac{97}{24}$

Kết hợp với điều kiện suy ra bpt có nghiệm $x>\dfrac{11}{2}$.

Tập nghiệm bpt là $S=\{1\}\cup[4;+\infty)$.

Bài 4.128: Cho bất phương trình: $\dfrac{(9m+4)x}{x^2+x+9}-\dfrac{7mx}{x^2-x+9}\ge 2$

a) Giải bất phương trình với $m=28$.

b) Tìm m để bất phương trình (1) có nghiệm.

Hướng dẫn giải

TXD: $D=\mathbb{R}$

+) $x=0$ không là nghiệm của pt.

Bpt $\Leftrightarrow \dfrac{(9m+4)}{x+\dfrac{9}{x}+1}-\dfrac{7m}{x+\dfrac{9}{x}-1}\ge 2$, Đặt $t=x+\dfrac{9}{x}$, $|t|\ge 6$

a) Với $m=28$: (1) trở thành: $t^2-30t+225\le 0\Leftrightarrow t=15$

Ta có $15=x+\dfrac{9}{x}\Leftrightarrow x=15\pm\sqrt{189}$

b) Bpt trở thành: $f(t)=t^2-(m+2)t+8m+1\le 0$ (*)

Bpt đã cho có nghiệm khi và chỉ khi bpt (*) phải có nghiệm $t\in(-\infty;-6]\cup[6,+\infty)$.

Ta có bpt (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow m \in \left(-\frac{49}{14}, 28\right)$

Suy ra bpt đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow m \in \left(-\infty; -\frac{49}{14}\right) \cup [28; +\infty)$

Bài 4.129: Giải các bất phương trình sau:

a) $2\sqrt{x-1} - \sqrt{x+5} > x-3$

b) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} \geq x - \sqrt{x^2+x-2} - \frac{7}{2}$

Hướng dẫn giải

a) ĐKXĐ: $x \geq 1$

Nhân lượng liên hợp: $2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+5} > 0$

$Bpt \Leftrightarrow (2\sqrt{x-1} - \sqrt{x+5})(2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+5}) > (x-3)(2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+5})$

$\Leftrightarrow 4(x-1) - (x+5) > (x-3)(2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+5})$

$\Leftrightarrow 3(x-3) > (x-3)(2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+5})$ (2)

Xét các trường hợp:

TH1: $x > 3$ thì phương trình trở thành: $3 > 2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+5}$

$VP > 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} > 3$ nên bất phương trình vô nghiệm.

TH2: $x = 3$ thì $0 > 0$ (vô lý)

TH3: $1 \leq x < 3$ nên từ bất phương trình ta suy ra:

$3 < (2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+5}) \Leftrightarrow 4\sqrt{(x-1)(x+5)} > 8 - 5x$ (*)

* $\begin{cases} 8-5x < 0 \\ 1 \leq x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{8}{5} < x < 3$ thì (*) luôn đúng

* $\begin{cases} 8-5x \geq 0 \\ 1 \leq x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{8}{5}$

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq \frac{8}{5} \\ 9x^2 - 144x + 144 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq \frac{8}{5} \\ 8 - \sqrt{48} < x < 8 + \sqrt{48} \end{cases} \Leftrightarrow 8 - \sqrt{48} < x \leq \frac{8}{5}$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $8 - \sqrt{48} < x < 3$

b) ĐKXĐ: $x \geq 1$. Đặt $t = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1}$

Suy ra: $t^2 = 2x + 1 - 2\sqrt{x^2+x-2} \Leftrightarrow x - \sqrt{x^2+x-2} - \frac{7}{2} = \frac{t^2}{2} - 4$

Khi đó bất phương trình trở thành: $t^2 - 2t - 8 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq t \leq 4$

Với $t \geq -2$ suy ra: $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} \geq -2 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} + 2 \geq \sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow x + 6 + 4\sqrt{x+2} \geq x - 1 \Leftrightarrow 7 + 4\sqrt{x+2} \geq 0$ (đúng $\forall x \geq 1$)

Với $t \leq 4$ suy ra: $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{x+2} \leq \sqrt{x-1} + 4$

$\Leftrightarrow x + 2 \leq x + 15 + 8\sqrt{x-1} \Leftrightarrow 13 + 8\sqrt{x-1} \geq 0$ (đúng $\forall x \geq 1$)

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[1; +\infty)$.

Bài 4.130: Tìm m để bất phương trình $(x^2 + x - 1)(x^2 + x + m) \geq 0$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$

Hướng dẫn giải

Đặt $t = x^2 + x - 1$ suy ra $t = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \geq \frac{-5}{4}$. Khi đó bất phương trình đã cho trở thành: $t(t + m + 1) \geq 0 \Leftrightarrow t^2 + (m+1)t \geq 0$ (1)

Để bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ thì (1) phải có tập nghiệm là $\left[\frac{-5}{4}; +\infty\right)$

Xét $f(t) = t^2 + (m+1).t$ ta có 2 trường hợp:

- TH_1: $\frac{-(m+1)}{2} < \frac{-5}{4} \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$. Khi đó ta lập bảng biến thiên f(t) trên $\left[\frac{-5}{4}; +\infty\right)$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để $f(t) \geq 0$ với $\forall t \in \left[\frac{-5}{4}; +\infty\right)$ thì:

$f\left(\frac{-5}{4}\right) \geq 0$ hay $\left(\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{5}{4}.(m+1) \geq 0 \Leftrightarrow m + 1 \leq \frac{5}{4} \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{4}$

Kết hợp với ĐK trên ta thấy không có m thỏa mãn

- TH_2: $\frac{-(m+1)}{2} \geq \frac{-5}{4} \Leftrightarrow m \leq \frac{3}{2}$ Khi đó ta lập bảng biến thiên f(t) trên $\left[\frac{-5}{4}; +\infty\right)$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để $f(t) \geq 0$ với $\forall t \in \left[\frac{-5}{4}; +\infty\right)$ thì:

$f\left(\frac{-(m+1)}{2}\right) \geq 0$

Hay $\frac{(m+1)^2}{4} - \frac{(m+1)^2}{2} \geq 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow m = -1$ (thỏa mãn ĐK)

Vậy ĐK để bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ là $m = -1$.

Chương 5 THỐNG KÊ

§1. NHỮNG KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

§2. TRÌNH BÀY MỘT MẪU SỐ LIỆU

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Khái niệm về thống kê

Thống kê là khoa học về các phương pháp thu thập, tổ chức, trình bày, phân tích và xử lý số liệu.

2. Mẫu số liệu

- *Dấu hiệu* là một vấn đề hay hiện tượng nào đó mà người điều tra quan tâm tìm hiểu. Mỗi đối tượng điều tra gọi là một ***đơn vị điều tra***. Mỗi đơn vị điều tra có một số liệu, số liệu đó gọi là giá trị của dấu hiệu trên đơn vị điều tra đó.
- Một tập con hữu hạn các đơn vị điều tra được gọi là một ***mẫu***. Số phần tử của một mẫu được gọi là ***kích thước mẫu***. Các giá trị của dấu hiệu thu được trên mẫu được gọi là một ***mẫu số liệu*** (mỗi giá trị như thế còn gọi là một số liệu của mẫu).
- Nếu thực hiện điều tra trên trên mọi đơn vị điều tra thì đó là điều tra toàn bộ. Nếu chỉ điều tra trên một mẫu thì đó là điều tra mẫu.

3. Bảng phân bố tần số - tần suất. Bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp.

Tần số của giá trị x_i là số lần lặp lại của giá trị x_i trong mẫu số liệu.

Tần suất f_i của giá trị x_i là tỷ số giữa tần số n_i và kích thước mẫu N hay $f_i = \frac{n_i}{N}$.

Người ta thường viết tần suất dưới dạng phần trăm.

- Bảng phân bố tần số (gọi tắt là *bảng tần số*) được trình bày ngang như sau:

Giá trị (x)	x_1	x_2	x_3	. . .	x_m	
Tần số (n)	n_1	n_2	n_3	. . .	n_m	$N=\sum_{i=1}^{m} n_i$

Trên hàng tần số, người ta dành một ô để ghi kích thước mẫu N hàng tổng các tần số (tức $N = \sum_{i=1}^{m} n_i$).

- Bổ sung thêm một hàng tần suất vào bảng trên, ta được *bảng phân bố tần số - tần suất* (gọi tắt là *bảng tần số - tần suất*).

Giá trị (x)	x_1	x_2	x_3	. . .	x_m	
Tần số (n)	n_1	n_2	n_3	. . .	x_m	$N=\sum_{i=1}^{m} n_i$
Tần suất %	f_1	f_2	f_3	. . .	f_m	

Chú ý: Người ta cũng thể hiện bảng phân bố tần số - tần suất dưới dạng bảng dọc.

- Nếu kích thước mẫu số liệu khá lớn, thì người ta thường chia số liệu thành nhiều lớp dưới dạng $[a;b)$ hay $[a;b)$ (thường có độ dài các lớp bằng nhau). Khi đó tần số của lớp $[a;b)$ là số giá trị $x_i \in [a;b)$ (hay $x_i \in [a;b)$) xuất hiện trong lớp đó. Tần suất của lớp $[a;b)$ là $f = \frac{n}{N}$ trong đó n là tần số của lớp $[a;b)$ và N là kích thước mẫu.

- Bảng phân bố tần suất ghép lớp được xác định tương tự như trên.

- Giá trị đại diện của lớp $[a;b)$ là $c = \frac{a+b}{2}$

4. Biểu đồ:

Các loại biểu đồ thường dùng là: biểu đồ hình cột, biểu đồ đường gấp khúc và biểu đồ hình quạt. Số liệu vẽ biểu đồ được lấy từ các bảng tần số - tần suất.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: *XÁC ĐỊNH MẪU SỐ LIỆU.*

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Số học sinh giỏi của 30 lớp ở một trường THPT *A* được thống kê lại như sau.

0	2	1	0	0	3	0	0	1	1	0	1	6	6	0	
1	5	2	4	5	1	0	1	2	4	0	3	3	1	0	

a) Dấu hiệu và đơn vị điều tra ở đây là gì? Kích thước mẫu bao nhiêu?

b) Viết các giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên

Lời giải

a) Dấu hiệu là học sinh giỏi, đơn vị điều tra là mỗi lớp của trường THPT A Kích thước mẫu là 30.

b) Các giá trị khác nhau của mẫu số liệu trên là 0;1;2;3;4;5;6

Ví dụ 2: Để may đồng phục cho khối học sinh lớp năm của trường tiểu học A. Người ta chọn ra một lớp 5A, thống kê chiều cao của 45 học sinh lớp 5A (tính bằng cm) được ghi lại như sau :

102	102	113	138	111	109	98	114	101
103	127	118	111	130	124	115	122	126
107	134	108	118	122	99	109	106	109
104	122	133	124	108	102	130	107	114
147	104	141	103	108	118	113	138	112

a) Dấu hiệu và đơn vị điều tra ở đây là gì? Kích thước mẫu bao nhiêu?

b) Viết các giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên

Lời giải

a) Dấu hiệu là chiều cao của mỗi học sinh, đơn vị điều tra là một học sinh của lớp 5A

Kích thước mẫu là N = 45

b) Các giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên là

102;113;138;109;98;114;101;103;127;118;111;130;124;115;122;126;107;134;108;99;106;104;133;147;141;138;112 .

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 5.0: Thống kê điểm kiểm tra môn Toán của học sinh lớp 10 được cho ở bảng sau:

Điểm thi	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tần số	3	2	1	1	3	7	4	8	9	3	1

Cho biết đơn vị điều tra và kích thước của mẫu số liệu trên?

Hướng dẫn giải

Đơn vị điều tra: một hsinh lớp 10, kích thước của mẫu số liệu: 42

Bài 5.1: Số con của 40 gia đình ở huyện A được thống kê lại như sau

2	4	3	2	0	2	2	3	4	5
2	2	5	2	1	2	2	2	3	2
5	2	7	3	4	2	2	2	3	2
3	5	2	1	2	4	4	3	4	3

a) Dấu hiệu và đơn vị điều tra ở đây là gì? Kích thước mẫu bao nhiêu?

b) Viết các giá trị khác nhau trong mẫu số liệu trên

Hướng dẫn giải

a) Dấu hiệu là số con, đơn vị điều tra là mỗi gia đình ở huyện A

Kích thước mẫu là N = 40

b) Các giá trị khác nhau của mẫu số liệu trên là 1;2;3;4;5;7 .

Bài 5.2: Tiến hành một cuộc thăm dò về số cân nặng của mỗi học sinh nữ lớp 10 trường THPT A, người điều tra chọn ngẫu nhiên 30 học sinh nữ lớp 10 và đề nghị các em cho biết số cân nặng của mình . Kết quả thu được ghi lại trong bảng sau (đơn vị là kg):

43	50	43	48	45	40	38	48	45	50	43	45	48	43	38
40	43	48	40	43	45	43	50	40	50	43	45	50	43	45

Dấu hiệu và đơn vị điều tra ở đây là gì? Kích thước mẫu là bao nhiêu ?

Hướng dẫn giải

Dấu hiệu điều tra: Số cân nặng của mỗi học sinh nữ lớp 10

Đơn vị điều tra: Một học sinh nữ.

Kích thước mẫu: 30

DẠNG TOÁN 2: *TRÌNH BÀY MẪU SỐ LIỆU DƯỚI DẠNG BẢNG VÀ BIỂU ĐỒ.*

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Số lượng khách đến tham quan một điểm du lịch trong 12 tháng được thống kê như ở bảng sau:

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số khách	430	550	430	520	550	515	550	110	520	430	550	880

Lập bảng phân bố tần số - tần suất

Lời giải

a) Bảng phân bố tần số - tần suất

Số lượng khách (người)	Tần số	Tần suất%
110	1	8,3
430	3	24,9
515	1	8,3
520	2	16,8
550	4	33,4
800	1	8,3
Cộng	N= 12	100%

Ví dụ 2: Điểm thi của 32 học sinh trong kì thi Tiếng Anh (thang điểm 100) như sau:

68	79	65	85	52	81	55	65	49	42	68	66	56	57	65	72
69	60	50	63	74	88	78	95	41	87	61	72	59	47	90	74

a) Hãy trình bày số liệu trên dưới dạng bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp với các lớp: [40;50); [50;60); [60;70);[70;80); [80;90); [90;100].

b) Hãy vẽ biểu đồ tần suất hình cột để mô tả bảng phân bố tần suất ghép lớp đã lập ở câu a).

c) Hãy vẽ biểu đồ tần suất hình quạt để mô tả bảng phân bố tần suất ghép lớp đã lập ở câu a).

Lời giải

a) Ta có bảng phân bố là

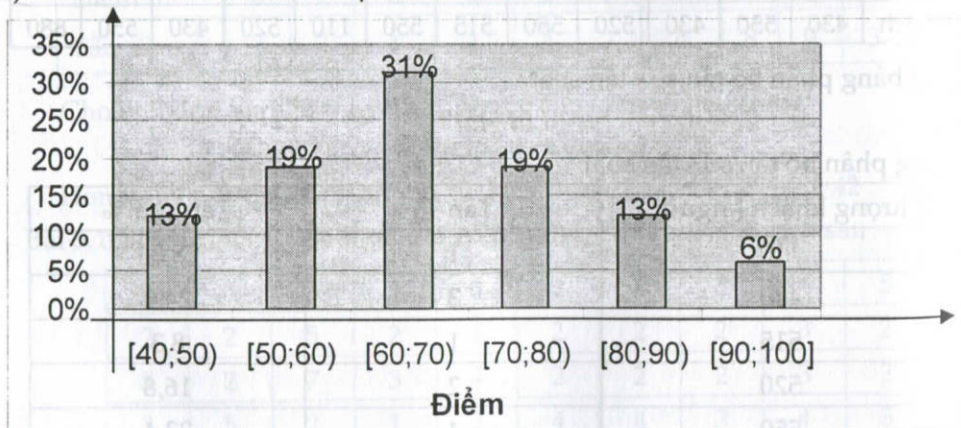
Lớp điểm	Tần số
[40;50)	4
[50;60)	6
[60;70)	10
[70;80)	6
[80;90)	4
[90;100]	2
	32

Bảng phân bố tần số ghép lớp

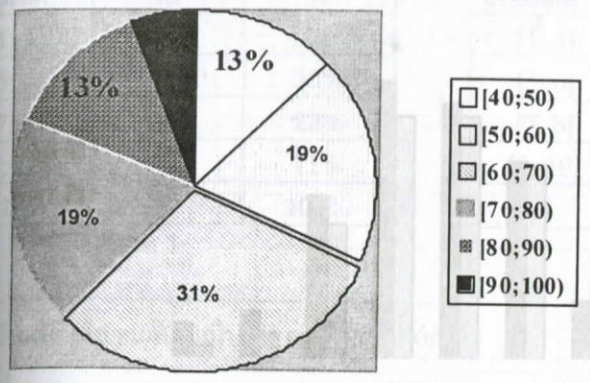
Lớp điểm	Tần suất
[40;50)	13%
[50;60)	19%
[60;70)	31%
[70;80)	19%
[80;90)	13%
[90;100]	6%
	100%

Bảng phân bố tần suất ghép lớp

b) Biểu đồ đồ tần suất hình cột là



c) Biểu đồ hình quạt là



Lớp điểm	Tần suất	Góc ở tâm
[40;50)	13%	$46,8^0$
[50;60)	19%	$68,4^0$
[60;70)	31%	$111,6^0$
[70;80)	19%	$68,4^0$
[80;90)	13%	$46,8^0$
[90;100]	6%	$21,6^0$
N	**100%**	

Nhận xét: Để vẽ đồ biểu đồ hình quạt ta xác định góc ở tâm hình quạt dựa vào công thức $Đo = f_i.360^0$.

Ví dụ 3: Để đánh giá kết quả của một đề tài sau khi áp dụng vào thực tiễn dạy học người ta thực nghiệm bằng cách ra đề kiểm tra một tiết cho hai lớp (gần tương đương về trình độ kiến thức). Trong đó lớp $12A_3$ đã được dạy áp dụng đề tài (lớp thực nghiệm), lớp $12A_4$ (lớp đối chứng). Kết quả điểm của học sinh hai lớp như sau:

Lớp	Số HS	Số bài KT	Số bài kiểm tra đạt điểm Xi									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ĐC $12A_3$	43	86	1	3	6	8	15	20	20	12	2	1
TN $12A_4$	46	92	0	1	4	5	16	21	23	15	3	3

a) Hãy lập bảng phân bố tần suất của hai lớp trên

b) Hãy lập biểu đồ tần suất hình cột của hai lớp(trong cùng một biểu đồ)

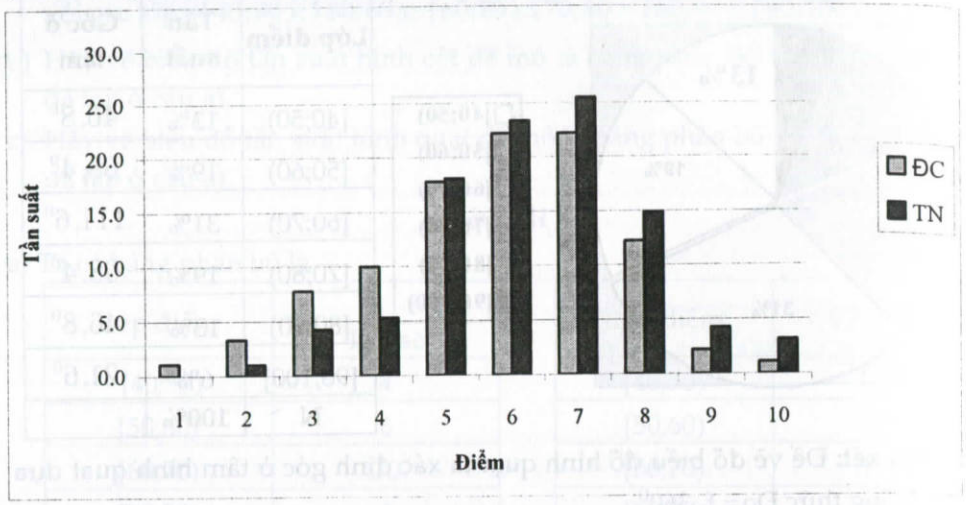
c) Hãy lập biểu đồ tần suất hình cột của hai lớp (trong cùng một biểu đồ)

Lời giải

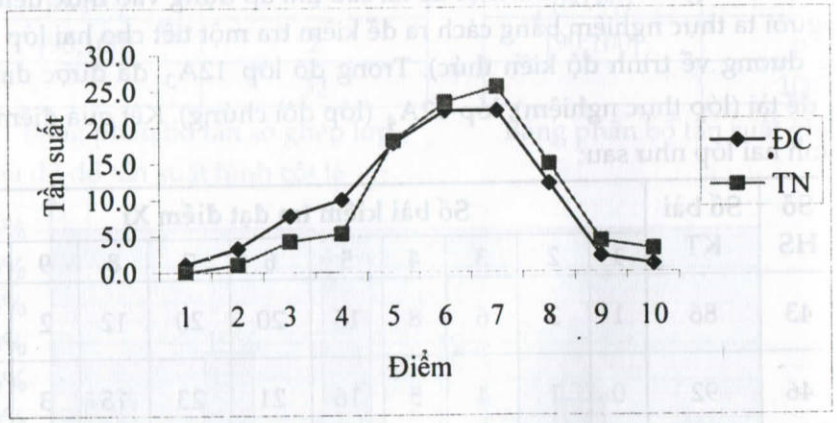
a) Bảng phân bố tần suất

Lớp	Số HS	Số bài KT	Số % bài kiểm tra đạt điểm Xi									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ĐC $12A_3$	43	86	1,1	3,1	7,6	10,2	17,6	22,3	22,1	12,3	2,3	1,2
TN $12A_4$	46	92	0,0	1,2	4,1	5,3	18,5	22,8	25,9	14,5	4,4	3,0

b) Biểu đồ phân bố tần suất của hai lớp



c) Đường gấp khúc tần suất của hai lớp



2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 5.3: Điểm kiểm tra của 2 nhóm học sinh lớp 10 được cho như sau:

Nhóm 1: (9 học sinh) 1, 2, 3, 5, 6, 6, 7, 8, 9

Nhóm 2: (11 học sinh) 1, 3, 3, 4, 4, 6, 7, 7, 7, 8, 10

a) Hãy lập các bảng phân bố tần số và tuần suất ghép lớp với các lớp [1, 4]; [5, 6]; [7, 8]; [9, 10] của 2 nhóm.

b) Vẽ biểu đồ tần suất hình cột của 2 nhóm.

Hướng dẫn giải

a) Bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp là

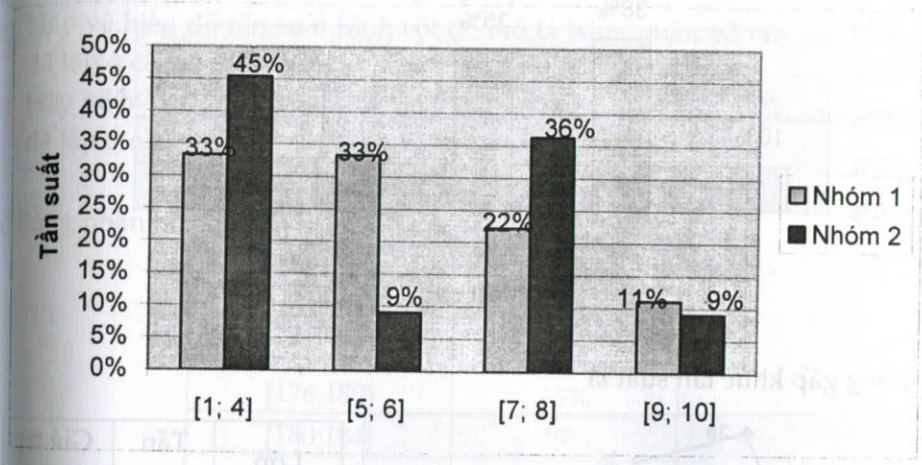
Lớp điểm	Tần số *ni*	Tần suất *fi*
[1; 4]	3	33%
[5; 6]	3	33%
[7; 8]	2	22%
[9; 10]	1	11%
N	**9**	**100%**

Nhóm 1

Lớp điểm	Tần số *ni*	Tần suất *fi*
[1; 4]	5	45%
[5; 6]	1	9%
[7; 8]	4	36%
[9; 10]	1	9%
N	**11**	**100%**

Nhóm 2

b) Biểu đồ tần suất hình cột của hai nhóm là



Bài 5.4: Sau một tháng gieo trồng một giống hoa, người ta thu được số liệu sau về chiều cao (đơn vị là milimét) của các cây hoa được trồng:

Nhóm	Chiều cao	Số cây đạt được
1	Từ 100 đến 199	20
2	Từ 200 đến 299	75
3	Từ 300 đến 399	70
4	Từ 400 đến 499	25
5	Từ 500 đến 599	10

a) Lập bảng phân bố tần suất ghép lớp của mẫu số liệu trên.

b) Vẽ biểu đồ tần suất hình cột .

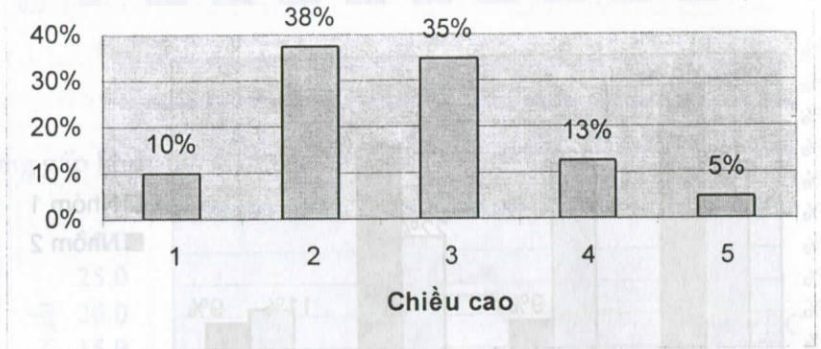
c) Vẽ đường gấp khúc tần suất

Hướng dẫn giải

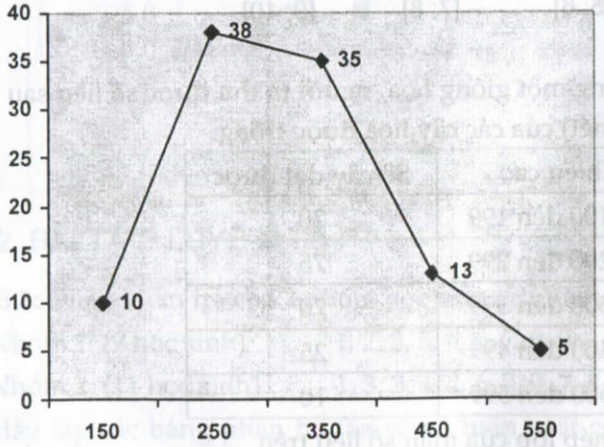
a) Bảng phân bố tần suất

Lớp chiều cao	Tần suất
[100;199)	10%
[200;299)	38%
[300;399)	35%
[400;499)	13%
[500;599)	5%
N	100%

b) Biểu đồ tần suất hình cột là



c) Đường gấp khúc tần suất là



Lớp chiều cao	Tần suất fi	Giá trị đại diện ci
[100;199)	10%	150
[200;299)	38%	250
[300;399)	35%	350
[400;499)	13%	450
[500;599)	5%	550

Bài 5.5: Chiều cao của 40 vận động viên bóng chuyền được cho trong bảng sau:

Lớp chiều cao (cm)	Tần số
[168 ; 172)	4
[172 ; 176)	4
[176 ; 180)	6
[180 ; 184)	14
[184 ; 188)	8
[188 ; 192]	4
Cộng	40

a) Hãy lập bảng phân bố tần suất ghép lớp ?

b) Hãy vẽ biểu đồ tần suất hình cột để mô tả bảng phân bố tần suất ghép lớp đã lập ở câu a).

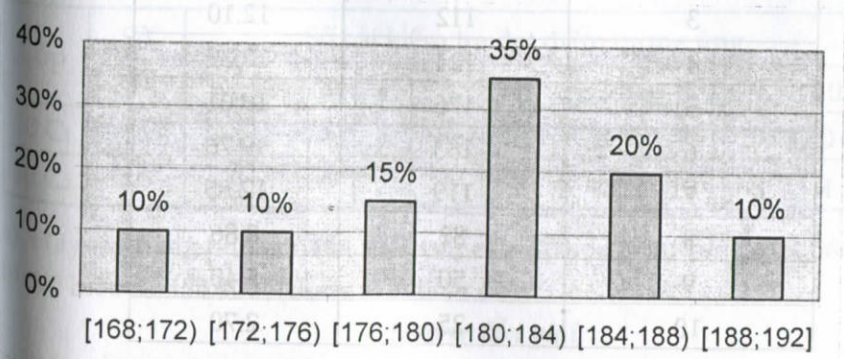
c) Hãy vẽ biểu đồ tần suất hình quạt để mô tả bảng phân bố tần suất ghép lớp đã lập ở câu a).

Hướng dẫn giải

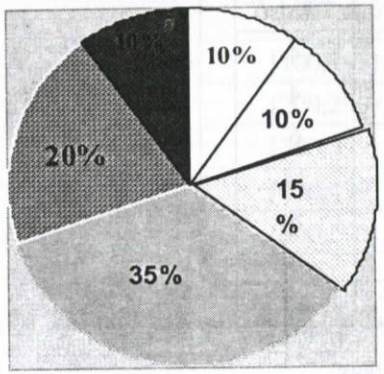
a) Bảng phân bố tần suất là

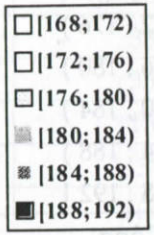
Lớp chiều cao	Tần suất
[168;172)	10%
[172;176)	10%
[176;180)	15%
[180;184)	35%
[184;188)	20%
[188;192]	10%
N	100%

b) Biểu đồ tần số hình cột là



c) Biểu đồ tần suất hình quạt là





Lớp chiều cao	Tần suất	Giá trị đại diện ci
[168;172)	10%	170
[172;176)	10%	174
[176;180)	15%	178
[180;184)	35%	182
[184;188)	20%	186
[188;192]	10%	190
N	100%	

Bài 5.6: Thống kê điểm thi tốt nghiệp môn Toán của 926 em học sinh Trường THPT A cho ta kết quả sau đây:

Điểm bài thi (x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tần số (n)	17	38	...	124	176	183	119	...	50	25
Tần suất %	...	...	12,10	...	...	...	8,63	8,86		

a) Chuyển bảng trên thành dạng cột và điền tiếp vào các ô còn trống.

b) Vẽ biểu đồ hình cột tần số.

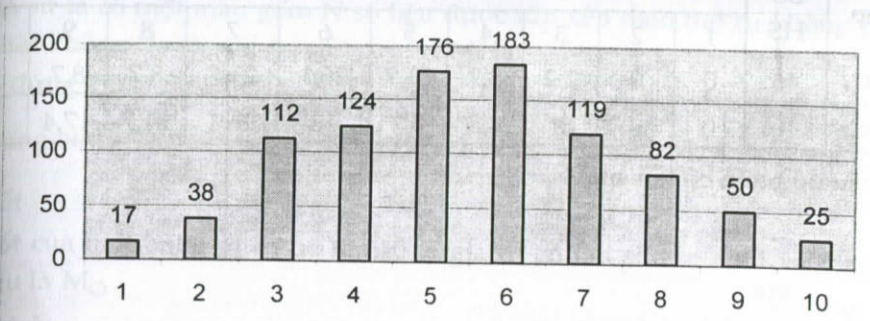
c) Vẽ biểu đồ hình quạt tần suất.

Hướng dẫn giải

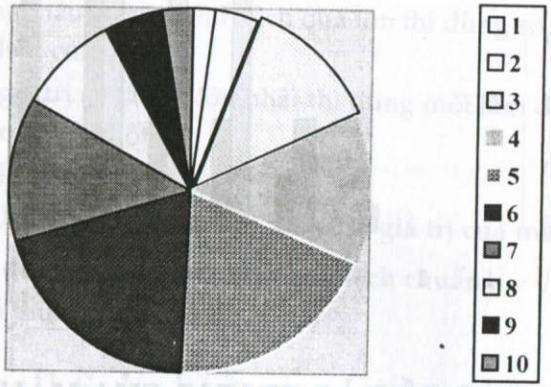
a) Ta có N = 926 do đó ta có kết quả sau

Điểm bài thi(x)	Tần số(n)	Tần suất %
1	17	1.84
2	38	4.10
3	112	12.10
4	124	13.39
5	176	19.01
6	183	19.76
7	119	12.85
8	82	8.86
9	50	5.40
10	25	2.70

b) Vẽ biểu đồ hình cột tần số



c) Biểu đồ tần suất hình quạt là



Bài 5.7: Kết quả làm bài kiểm tra của học sinh hai lớp gồm lớp thực nghiệm (TN) và học sinh lớp đối chứng (ĐC) được thể hiện thông qua Bảng thống kê sau đây:

Lớp	Số HS	Số bài kiểm tra đạt điểm tương ứng										Điểm TB
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
10 C_1	46	0	1	2	6	10	12	8	7	0	0	6.3
10 C_2	46	0	0	0	2	4	6	12	10	8	4	7.4

a) Hãy lập bảng phân bố tần suất của mẫu số liệu trên(trong một bảng)

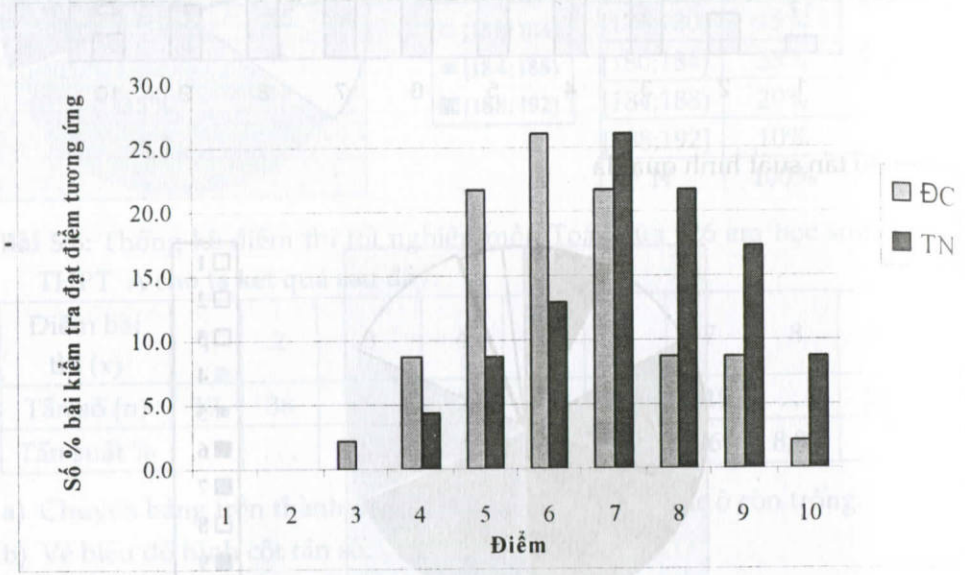
b) Vẽ biểu đồ tần suất (trong một biểu đồ)

Hướng dẫn giải

a) Bảng phân bố tần suất điểm của bài kiểm tra

Lớp	Số HS	Số % bài kiểm tra đạt điểm tương ứng									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10 C_1	46	0	0	2,2	8,7	21,7	26,1	21,7	8,7	8,7	2,2
10 C_2	46	0	0	0	4,3	8,7	13	26,1	21,7	17,4	8,7

b) Biểu đồ phân bố tần suất



§3. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA MẪU SỐ LIỆU

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Số trung bình

- Với mẫu số liệu kích thước N là $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N}$$

- Với mẫu số liệu được cho bởi bảng phân bố tần số:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} n_i x_i}{N} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + ... + n_k x_k}{N}$$

- Với mẫu số liệu được cho bởi bảng phân bố tần số ghép lớp:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} n_i c_i}{N} = \frac{n_1 c_1 + n_2 c_2 + ... + n_k c_k}{N}$$ (c_i là giá trị đại diện của lớp thứ i)

2. Số trung vị

Giả sử ta có một mẫu gồm N số liệu được sắp xếp theo thứ tự không giảm (hoặc không tăng). Khi đó **số trung vị** M_e là:

- Số đứng giữa nếu N lẻ;
- Trung bình cộng của hai số đứng giữa (số thứ $\frac{N}{2}$ và $\frac{N}{2}+1$) nếu N chẵn.

3. Mốt

Mốt của một bảng phân bố tần số là giá trị có tần số lớn nhất và được kí hiệu là M_O.

Chú ý:

- Số trung bình của mẫu số liệu được dùng làm đại diện cho các số liệu của mẫu.
- Nếu các số liệu trong mẫu có sự chênh lệch quá lớn thì dùng số trung vị làm đại diện cho các số liệu của mẫu.
- Nếu quan tâm đến giá trị có tần số lớn nhất thì dùng mốt làm đại diện. Một mẫu số liệu có thể có nhiều mốt.

4. Phương sai và độ lệch chuẩn

Để đo mức độ chênh lệch (**độ phân tán**) giữa các giá trị của mẫu số liệu so với số trung bình ta dùng **phương sai** s^2 và **độ lệch chuẩn** $s = \sqrt{s^2}$.

- Với mẫu số liệu kích thước N là $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$:

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2$$
$$= \overline{x^2} - (\overline{x})^2$$

- Với mẫu số liệu được cho bởi bảng phân bố tần số, tần suất:

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i x_i\right)^2$$
$$= \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} f_i x_i\right)^2$$

- Với mẫu số liệu được cho bởi bảng phân bố tần số, tần suất ghép lớp:

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i(c_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i c_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i c_i\right)^2$$
$$= \sum_{i=1}^{k} f_i(c_i - \overline{x})^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i c_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} f_i c_i\right)^2$$

(c_i, n_i, f_i là giá trị đại diện, tần số, tần suất của lớp thứ i;
N là số các số liệu thống kê $N = n_1 + n_2 + ... + n_k$)

Chú ý: Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì độ phân tán (so với số trung bình) của các số liệu thống kê càng lớn.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: *XÁC ĐỊNH CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA MẪU SỐ LIỆU.*

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho các số liệu thống kê về sản lượng chè thu được trong 1năm (kg/sào) của 20 hộ gia đình

111	112	112	113	114	114	115	114	115	116
112	113	113	114	115	114	116	117	113	115

a) Lập bảng phân bố tần số - tần suất

b) Tìm số trung bình, trung vị, mốt

Lời giải

Bảng phân bố tần số - tần suất:

Giá trị x	Tần số	Tần suất (%)
111	1	5
112	3	15
113	4	20
114	5	25
115	4	20
116	2	10
117	1	5
	N = 20	100

b) * Số trung bình:

$$\bar{x} = \frac{1}{20}(1.111 + 3.112 + 4.113 + 5.114 + 4.115 + 2.116 + 1.117) = 113,9$$

* Số trung vị: Do kích thước mẫu N = 20 là một số chẵn nên số trung vị là trung bình cộng của hai giá trị đứng thứ $\frac{N}{2}=10$ và $\frac{N}{2}+1=11$ đó là 114 và 114.

Vậy $M_e = 114$

* Mốt: Do giá trị 114 có tần số lớn nhất là 5 nên ta có: $M_0 = 114$.

Ví dụ 2: Tiền lãi (nghìn đồng) trong 30 ngày được khảo sát ở một quầy bán báo.

81	37	74	65	31	63	58	82	67	77	63	46	30	53	73
51	44	52	92	93	53	85	77	47	42	57	57	85	55	64

a) Hãy lập bảng phân bố tần số và tần suất theo các lớp như sau:
[29.5; 40.5), [40.5; 51.5), [51.5; 62.5), [62.5; 73.5), [73.5; 84.5), [84.5; 95.5]

b) Tính số trung bình cộng, phương sai, độ lệch chuẩn ?

Lời giải

a) Bảng phân bố tần số và tần suất là

Lớp tiền lãi	Tần số	Tần suất
[29,5;40,5)	3	10%
[40,5;51,5)	5	17%
[51,5;62,5)	7	23%
[62,5;73,5)	6	20%
[73,5;84,5)	5	17%
[84,5;95,5]	4	13%
N	30	100%

Lớp tiền lãi	Tần số	Giá trị đại diện c_i
[29,5;40,5)	3	35
[40,5;51,5)	5	46
[51,5;62,5)	7	57
[62,5;73,5)	6	68
[73,5;84,5)	5	79
[84,5;95,5]	4	90

b) Ta có $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} n_i c_i}{N}$ nên $\bar{x} = \frac{3.35 + 5.46 + 7.57 + 6.68 + 5.79 + 4.90}{30} = 63,23$

Ta có $\sum_{i=1}^{k} n_i c_i^2 = 128347$, $\sum_{i=1}^{k} n_i c_i = 1897$

Suy ra phương sai là: $s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i c_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{k} c_i x_i\right)^2 = \frac{128347}{100} - \left(\frac{1897}{100}\right)^2 \approx 279,78$

Do đó độ lệch chuẩn là $S \approx 16,73$.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 5.8: Đo chiều cao (cm) của 40 học sinh nam ở một trường THPT, người ta thu được mẫu số liệu sau:

176	167	165	164	144	176	162	175	149	144
176	166	166	163	156	170	161	176	148	143
175	174	175	146	157	170	165	176	152	142
163	173	175	147	160	170	169	176	168	141

a) Lập bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp theo chiều cao của học sinh với các lớp: [141;146], [147;152] , ... , [171;176] .

b) Dựa vào bảng phân bố tần số ghép lớp trên, tính chiều cao trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đã cho.

Hướng dẫn giải

a) Bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp

Lớp	Tần số	Tần suất (%)
[141;146]	6	15.0
[147;152]	4	10.0
[153;158]	2	5.0
[159;164]	6	15.0
[165;170]	10	25.0
[171;176]	12	30.0
	N = 40	

b) Chiều cao trung bình: $\bar{x} = 162,4$, phương sai: $s^2 = 116,19$, độ lệch chuẩn: $s = 10,78$.

Bài 5.10: Có tài liệu về tuổi nghề của công nhân hai tổ trong một xí nghiệp cơ khí như sau:

Tổ I	2	2	5	7	9	9	9	10	10	11	12
Tổ II	2	3	4	4	4	5	5	7	7	8	

Trong mỗi tổ, tính tuổi nghề bình quân, số mốt và số trung vị?

Hướng dẫn giải

* Tổ I: - Tuổi nghề bình quân:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{2+2+5+7+9+9+9+10+10+11+12}{11} = 7,81$$

- Số mốt: $M_O = 9$
- Số trung vị: $M_e = 9$

* Tổ II: - Tuổi nghề bình quân:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{2+3+4+4+4+5+5+7+7+8}{10} = 4,9$$

- Số mốt : $M_O = 4$
- Số trung vị $M_e = 4,5$

Bài 5.11: Thống kê điểm kiểm tra toán của lớp 10C , giáo viên bộ môn thu được số liệu:

Điểm	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Tần số	1	1	1	5	6	7	11	5	4	2	2	N = 45

Tính: Số trung bình, số trung vị, phương sai và độ lệch chuẩn (chính xác đến hàng phần chục)

Hướng dẫn giải

Số trung bình: $\bar{x} = \frac{1}{45}\sum_{i=0}^{10} n_i x_i \approx 5,5$.

Số trung vị :

N= 45 là số lẻ ; $\frac{N+1}{2} = \frac{46}{2} = 23$, số liệu thứ 23 là $6 \Rightarrow$ Số trung vị $M_e = 6$.

Phương sai: $s^2 = \frac{1}{45}\sum_{i=0}^{10} n_i x_i^2 - \frac{1}{45^2}\left(\sum_{i=0}^{10} n_i x_i\right)^2 \approx 4,7$.

Độ lệch chuẩn: $s = \sqrt{s^2} \approx 2,2$.

Bài 5.12: Để được cấp chứng chỉ Anh văn của một trung tâm ngoại ngữ , học viên phải trải qua 6 lần kiểm tra trắc nghiệm, thang điểm mỗi lần kiểm tra là 100, và phải đạt điểm trung bình từ 70 điểm trở lên. Qua 5 lần thi Minh đạt điểm trung bình là 64,5 điểm. Hỏi trong lần kiểm tra cuối cùng Minh phải đạt ít nhất là bao nhiêu điểm để được cấp chứng chỉ?

Hướng dẫn giải

Gọi x là số điểm trong lần kiểm tra cuối mà Minh cần đạt được để được cấp chứng chỉ

Ta có số điểm qua 5 lần thi của Minh là $64,5.5 = 322,5$

Suy ra $\frac{x+322,5}{6} = 70 \Leftrightarrow x = 97,5$.

Bài 5.13: Cho hai bảng phân bố tần số mô tả kết quả điểm thi môn Toán của hai lớp 10A và 10B của một trường(Hai lớp làm cùng một đề) như sau:

Bảng 1:Điểm thi của lớp 10A

Điểm	1	3	4	5	6	7	8	
Tần số	1	3	4	8	10	3	1	N = 30

Bảng 2:Điểm thi của lớp 10B

Điểm	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
Tần số	1	2	3	4	6	7	3	3	1	N = 30

a) Tính phương sai của từng bảng .

b) Nhận xét lớp nào có điểm thi môn Toán đồng đều hơn,vì sao?

Hướng dẫn giải

Gọi $\bar{x}$, $\bar{y}$ lần lượt là số TBC của các số liệu trong bảng 1,bảng 2 ta có:

$\bar{x} = \frac{1}{30}(1.2 + 3.3 + ... + 1.8) = 5,2.$

$\bar{y} = \frac{1}{30}(1.1 + 2.2 + ... + 1.9) = 5,2.$

$S_x^2 = \frac{1}{30}[(2-5,2)^2 + 3(3-5,2)^2 + ... + (8-5,2)^2] \approx 1,83$

$S_y^2 = \frac{1}{30}[(1-5,2)^2 + 2(2-5,2)^2 + ... + (9-5,2)^2] \approx 3,69$

Vì $\bar{x} = \bar{y} = 5,2$ nhưng $S_x^2 < S_y^2$ nên điểm thi môn Toán của lớp 10A đồng đều hơn lớp 10B.

Bài 5.14: Người ta đã thống kê số gia cầm bị tiêu hủy trong vùng dịch của 6 xã A, B,..., F như sau (đơn vị: nghìn con):

Xã	A	B	C	D	E	F
Số lượng gia cầm bị tiêu hủy	12	27	22	15	45	5

Tính số trung vị, số trung bình , phương sai và độ lệch chuẩn (chính xác đến hàng trăm) của bảng số liệu thống kê trên

Hướng dẫn giải

$M_e = 22$; $\bar{x} = 21$; $s^2 = 164,333$; $s = 12,8$

Bài 5.15: Tiến hành một cuộc thăm dò về số cân nặng của mỗi học sinh nữ lớp 10 trường THPT A, người điều tra chọn ngẫu nhiên 30 học sinh nữ lớp 10 và đề nghị các em cho biết số cân nặng của mình. Kết quả thu được ghi lại trong bảng sau (đơn vị là kg):

43	50	43	48	45	40	38	48	45	50	43	45	48	43	38
40	43	48	40	43	45	43	50	40	50	43	45	50	43	45

a) Lập bảng phân bố tần số và tần suất (chính xác đến hàng phần trăm).

b) Tính số trung bình ; số trung vị và mốt .

Hướng dẫn giải

a) Bảng phân bố tần số - tần suất

Số cân nặng (kg)	38	40	43	45	48	50	
Tần số	2	4	9	6	4	5	N = 30
Tần suất(%)	6,67	13,33	30	20	13,33	16,67	

b) Số trung bình: $\bar{x} = \frac{2.38 + 4.40 + 9.43 + 6.45 + 4.48 + 5.50}{30} = 44,5$

Số trung vị: $M_e = \frac{43 + 45}{2} = 44$

Mốt: $M_O = 43$

Bài 5.16: Điểm kiểm tra môn toán của hai học sinh An và Bình được ghi lại như sau:

An	9	8	4	10	3	10	9	7
Bình	6	7	9	5	7	8	9	9

a) Tính điểm trung bình của mỗi học sinh .

b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn về điểm của mỗi học sinh (chính xác đến hàng phần trăm).

c) Học sinh nào có kết quả ổn định hơn? Vì sao ?

Hướng dẫn giải

a) An : Số TB $\bar{x} = 7,5$

Bình : Số TB $\bar{x} = 7,5$

b) An: phương sai : $s_A^2 = 6,25$; Độ lệch chuẩn : $s = 2,5$

Bình : phương sai : $s_B^2 = 2$; Độ lệch chuẩn : $s = 1,41$

c) Vì $s_B^2 < s_A^2 \Rightarrow$ Bình có kết quả ổn định hơn

ÔN TẬP CHƯƠNG V

Bài 5.17: Điểm kiểm tra cuối năm môn Toán của lớp 10A ở một trường THPT như sau:

3	9	8	9	8	4	8	9	5	8
5	6	7	3	6	7	6	7	6	5
8	7	5	4	7	3	8	9	4	8
4	6	7	6	7	5	8	7	5	4

a) Đơn vị điều tra ở đây là gì? Kích thước mẫu là bao nhiêu?

b) Lập bảng phân bố tần số - tần suất.

Hướng dẫn giải

a) Đơn vị điều tra là một học sinh lớp 10A, kích thước mẫu $N = 40$

b) Bảng phân bố tần số - tần suất là

Điểm	3	4	5	6	7	8	9
Tần số	3	5	6	6	8	8	4
Tần suất(%)	8	13	15	15	20	20	10

Bài 5.18: Điều tra về thu nhập của công nhân xí nghiệp X (đơn vị: nghìn đồng/ tháng), người ta ghi được bảng tần số ghép lớp sau đây:

Lớp	Tần số
[800; 890]	15
[900; 990]	25
[1000; 1090]	28
[1100; 1190]	35
[1200; 1290]	40
[1300; 1390]	30
[1400; 1490]	27
	N

Tính kích thước mẫu và lập bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp.

Hướng dẫn giải

Kích thước mẫu N = 200

Bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp

Lớp	Tần số	Tần suất(%)
[800; 890]	15	8
[900; 990]	25	13
[1000; 1090]	28	14
[1100; 1190]	35	18
[1200; 1290]	40	20
[1300; 1390]	30	15
[1400; 1490]	27	14

Bài 5.19: Cân lần lượt 40 quả cam (đơn vị gram) ta được kết quả sau (mẫu số liệu)

85	86	86	86	86	86	87	87	87	87	87	88	88	88	88	89
89	89	89	89	89	89	90	90	90	90	90	91	91	91	92	93
93	93	93	94	94	94	94	94	94							

Hãy lập bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp gồm [85; 86], [87; 88], [89; 90], [91; 92], [93; 94]?.

Hướng dẫn giải

Bảng phân bố tần số - tần suất

Lớp	Tần số	Tần suất (%)
[85; 86]	6	15
[87; 88]	9	22,5
[89; 90]	11	27,5
[91; 92]	4	10
[93; 94]	10	25
	N = 40	

Bài 5.20: Một lần kiểm tra toán của một lớp gồm 55 học sinh, thống kê điểm số như sau:

Điểm	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Số hs	0	3	3	5	4	12	10	8	7	1	2

a) Hãy lập bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp gồm 5 lớp [1; 2], [3; 4], [5; 6], [7; 8], [9; 10]

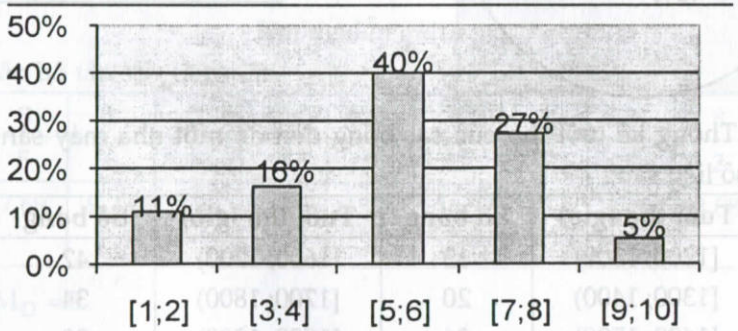
b) Vẽ biểu đồ tần suất hình cột, đường gấp khúc tần suất, biểu đồ tần suất hình quạt.

Hướng dẫn giải

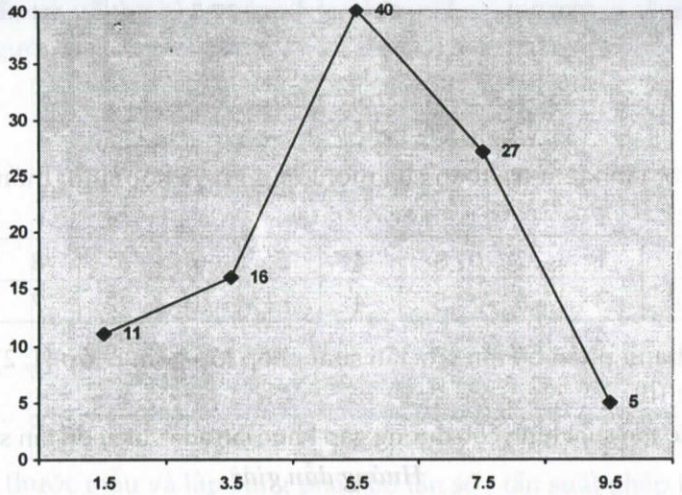
A) Bảng phân bố tần số - tần suất ghép lớp

Lớp	Tần số	Tần suất(%)
[1;2]	6	11
[3;4]	9	16
[5;6]	22	40
[7;8]	15	27
[9;10]	3	5
	N = 55	

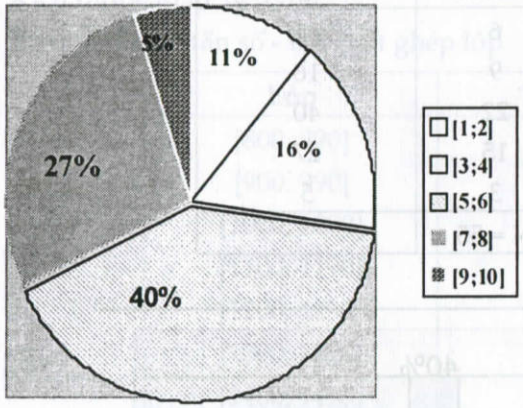
B) Biểu đồ tần suất hình cột



Đường gấp khúc tần suất



Biểu đồ tần suất hình quạt



Lớp điểm	Tần suất (%)	Giá trị đại diện ci
[1;2]	11	1,5
[3;4]	16	3,5
[5;6]	40	5,5
[7;8]	27	7,5
[9;10]	5	9,5

Bài 5.21: Thống kê tuổi thọ của các bóng đèn do một nhà máy sản xuất ta có bảng số liệu sau:

Tuổi thọ (giờ)	Số bóng	Tuổi thọ (giờ)	Số bóng
[1200; 1300)	15	[1600; 1700)	42
[1300; 1400)	20	[1700; 1800)	34
[1400; 1500)	36	[1800; 1900)	30
[1500; 1600)	48	[1900; 2000]	25

a) Tính tuổi thọ trung bình của một bóng đèn.

b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Hướng dẫn giải

a) Tuổi thọ trung bình của một bóng đèn là $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} n_i c_i}{N} = 1622,8$

b) Ta có $\sum_{i=1}^{k} n_i c_i^2 = 668218000$, $\sum_{i=1}^{k} n_i c_i = 405700$

Phương sai là $s^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} n_i c_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i c_i\right)^2 = 39392,2$

Độ lệch chuẩn là $s = 198,5$

Bài 5.22: Tại một cửa hàng bán hoa quả, người ta kiểm tra 65 thùng trái cây thì thấy số lượng quả bị hỏng trong các thùng là:

5	0	8	7	9	4	2	6	1	4	5	3	7
6	4	2	5	4	7	9	7	3	8	6	5	5
0	4	2	3	1	5	6	0	3	5	7	6	7
1	3	5	0	2	4	3	9	7	6	5	4	1
4	5	3	1	3	2	7	0	5	4	2	1	3

a) Lập bảng phân bố tần số - tần suất.

b) Tìm số trung vị và mốt. Nêu ý nghĩa của chúng.

c) Sử dụng máy tính bỏ túi hãy tìm số quả bị hỏng trung bình trong một thùng. Tính phương sai và độ lệch chuẩn (chính xác đến hàng phần trăm).

d) Lập bảng phân bố tần số ghép lớp gồm năm lớp, mỗi lớp là một đoạn có độ dài bằng 1.

Tính giá trị đại diện của mỗi lớp.

e) Tính số trung bình và độ lệch chuẩn theo bảng phân bố tần số ghép lớp.

Hướng dẫn giải

a) Bảng phân bố tần số - tần suất

Điểm	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Tần số	5	6	6	9	9	11	6	8	2	3
Tần suất(%)	7,69	9,23	9,23	13,85	13,85	16,92	9,23	12,31	3,08	4,62

b) $M_e = 4$, $M_O = 5$

c) $\bar{x} = 4,17$; $s^2 = 5,83$; $s = 2,42$

d) Bảng phân bố tần số ghép lớp là

Lớp	[0;1]	[2;3]	[4;5]	[6;7]	[8;9]
Tần số	11	15	20	14	5
Giá trị đại diện	0,5	2,5	4,5	6,5	8,5

$\bar{x} = 4,10$; $s^2 = 5,56$; $s = 2,36$

Bài 5.24: Một nhà nghiên cứu ghi lại tuổi của 30 bệnh nhân. Kết quả thu được mẫu số liệu như sau:

21	17	20	18	20	17	15	13	15	20
15	12	18	17	15	16	21	15	12	18
16	20	14	18	19	13	16	19	18	17

a) Lập bảng phân bố tần số.

b) Tính số trung bình và độ lệch chuẩn.

c) Tính số trung vị và mốt.

d) Vẽ biểu đồ tần số hình cột và đường gấp khúc tần số.

Hướng dẫn giải

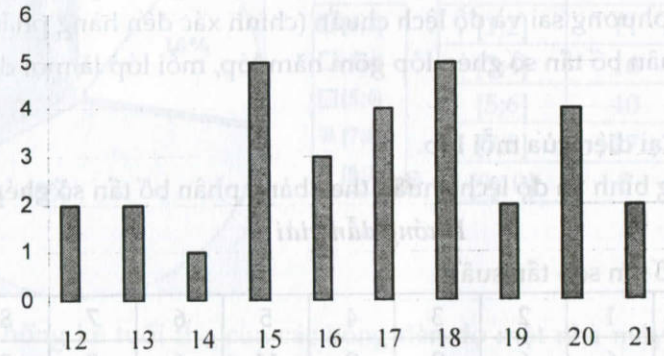
a) Bảng phân bố tần số

Tuổi	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Tần số	2	2	1	5	3	4	5	2	4	2

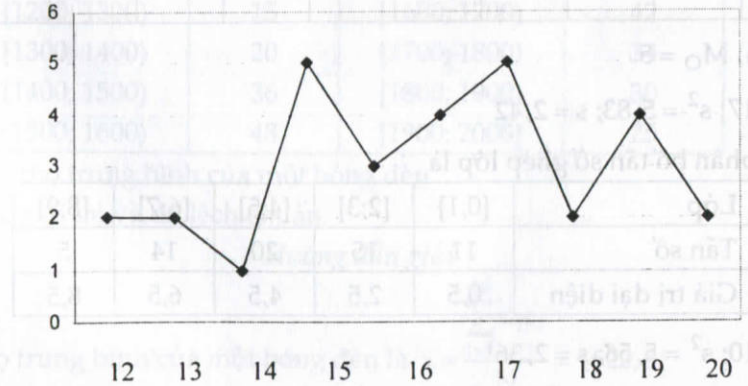
b) $\bar{x} = 16,8;\ s^2 = 6,5;\ s = 2,5$

c) $M_e = 17,\ M_O = 15$ hoặc $M_O = 18$

d) Biểu đồ tần số hình cột



Đường gấp khúc tần số



Bài 5.25: Một trăm bảy mươi chín củ khoai tây Chia thành chín lớp căn cứ trên khối lượng của chúng(đơn vị : gam). Ta có bảng phân bố tần số sau:

Lớp	Khoảng	Tần số
1	[10;19)	1
2	[10;19)	14
3	[10;19)	21
4	[10;19)	73
5	[10;19)	42
6	[10;19)	13
7	[10;19)	9
8	[10;19)	4
9	[10;19)	2

a) Tính Khối lượng trung bình của 1 củ khoai tây.

b) Tính độ lệch chuẩn và phương sai.

Hướng dẫn giải

$\bar{x} \approx 48,3547486;\ s \approx 13,95127664;\ s^2 \approx 194,6381199.$

Bài 5.26: Một mẫu số liệu có kích thước mẫu N và có bảng phân bố tần suất như sau :

Giá trị(x)	0	1	2	3	4
Tần suất (%)	12,5	6,25	25	50	6,25

Tìm giá trị nhỏ nhất có thể có của kích thước mẫu N.

Hướng dẫn giải

Tần số của giá trị 0 là $\frac{12,5.N}{100} = \frac{N}{8}$

Tần số của giá trị 1 và 4 là $\frac{6,25.N}{100} = \frac{N}{16}$

Tần số của giá trị 2 là $\frac{25.N}{100} = \frac{N}{4}$

Tần số của giá trị 3 là $\frac{50.N}{100} = \frac{N}{2}$

$\Rightarrow$ N chia hết cho 2 ; 4 ; 8 ; 16 .

$\Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất có thể có của N là bội số chung nhỏ nhất của 4 số 2; 4; 8; 16

Vậy giá trị nhỏ nhất có thể có của N là 16

Bài 5.27: Để so sánh, kiểm định chất lượng học tập của hai lớp 10A và 10B người ta ra một đề kiểm tra một tiết. Thống kê kết quả làm bài kiểm tra của học sinh hai lớp như sau:

Bảng thống kê các điểm số (Xi) của bài kiểm tra

Lớp	Số bài	Số bài kiểm tra đạt điểm Xi									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10A	46	0	0	2	5	9	9	12	5	4	0
10B	47	0	0	0	3	6	10	13	8	5	2

a) Hãy lập bảng phân bố tần suất của số liệu thống kê trên

b) Vẽ biểu đồ phân bố tần suất của hai lớp

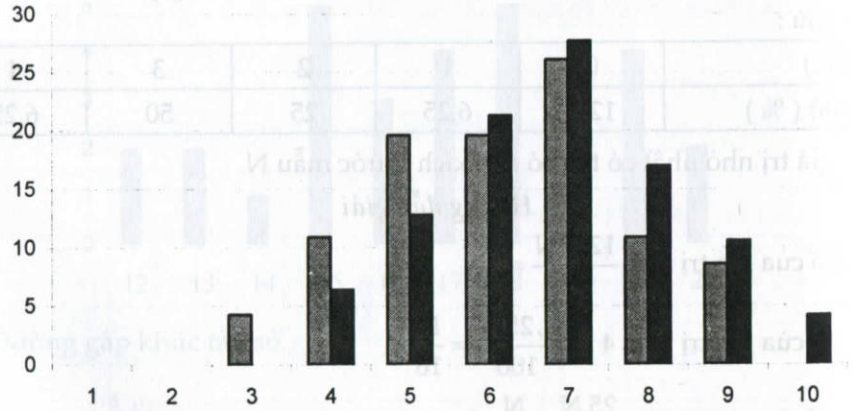
c) Vẽ đường gấp khúc tần suất của hai lớp

Hướng dẫn giải

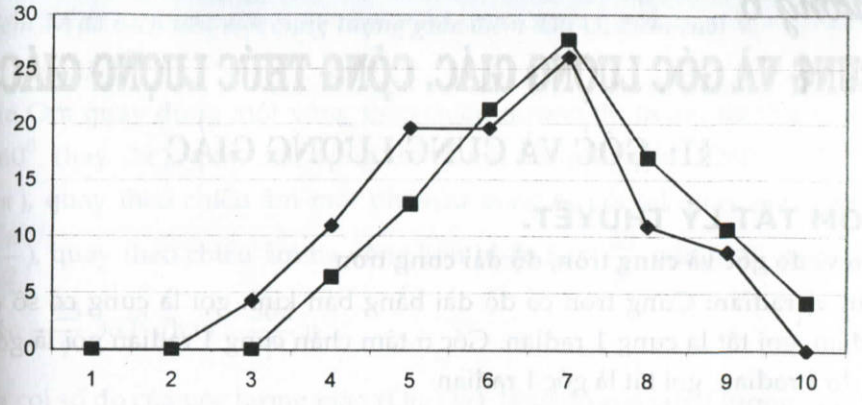
a) Bảng phân phối tần suất

Lớp \ Điểm	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10A	0	0	0	6,4	12,8	21,3	27,7	17	10,6	4,2
10B	0	0	4,3	10,9	19,6	19,6	26,1	10,9	8,6	0

b) Biểu đồ phân phối tần suất của hai lớp



c) Đường gấp khúc tần suất



Bài 5.28: Thống kê điểm số của 46 học sinh lớp 10C trong kì thi học kì như sau

3	6	9	7	8	6	7	5	8	5
5	4	6	7	4	8	9	6	7	5
7	6	5	7	5	8	4	9	5	7
5	7	9	7	6	7	8	6	7	5
3	4	6	7	4	6				

a) Lập bảng phân bố tần số

b) Lập bảng phân bố tần suất với các lớp sau: [1;2], [3;4], [5;6], [7;8] và [9;10]

c) Vẽ biểu đồ tần suất hình cộp ghép lớp.

Hướng dẫn giải

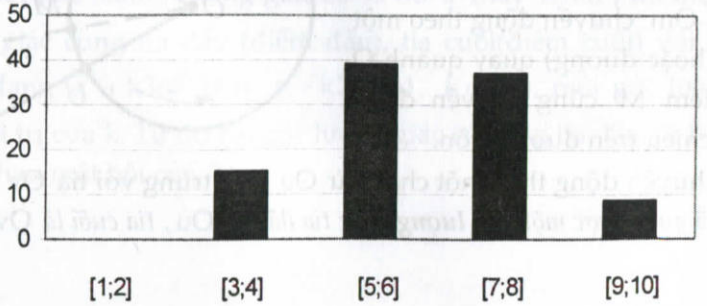
a) Bảng phân bố tần số

Điểm	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Tần số	0	0	2	5	9	9	12	5	4	0

b) Bảng phân bố tần suất

Lớp ghép	[1;2]	[3;4]	[5;6]	[7;8]	[9;10]
Tần suất(%)	0	15,2	39,1	37	8,7

c) Biểu đồ tần suất hình cộp ghép lớp



Chương 6

CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

§1: GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Đơn vị đo góc và cung tròn, độ dài cung tròn

a) Đơn vị radian: Cung tròn có độ dài bằng bán kính gọi là cung có số đo 1 radian, gọi tắt là cung 1 radian. Góc ở tâm chắn cung 1 radian gọi là góc có số đo 1 radian, gọi tắt là góc 1 radian

1 radian còn viết tắt là 1 rad.

Vì tính thông dụng của đơn vị radian người ta thường không viết radian hay rad sau số đo của cung và góc.

b) Độ dài cung tròn. Quan hệ giữa độ và radian:

Cung tròn bán kính R có số đo $\alpha(0 \le \alpha \le 2\pi)$, có số đo a^0 $(0 \le a \le 360)$ và có độ dài là l thì: $l = R\alpha = \frac{\pi a}{180}.R$ do đó $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{a}{180}$

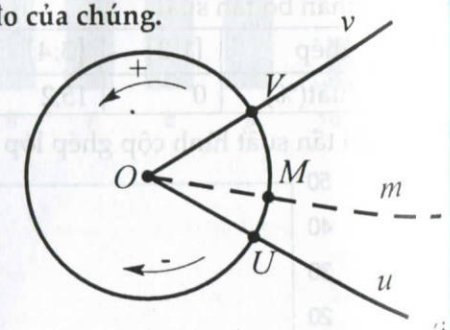
Đặc biệt: $1\,\text{rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0$, $1^0 = \frac{\pi}{180}\,\text{rad}$.

2. Góc và cung lượng giác.

a) Đường tròn định hướng: Đường tròn định hướng là một đường tròn trên đó ta đã chọn một chiều chuyển động gọi là chiều dương, chiều ngược lại gọi là chiều âm. Ta quy ước chọn chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ gọi là chiều dương(cùng chiều kim đồng hồ là chiều âm).

b) Khái niệm góc, cung lượng giác và số đo của chúng.

Cho đường tròn định hướng tâm O và hai tia Ou,Ov lần lượt cắt đường tròn tại U và V. Tia Om cắt đường tròn tại M, tia Om chuyển động theo một chiều(âm hoặc dương) quay quanh O khi đó điểm M cũng chuyển động theo một chiều trên đường tròn.



- Tia Om chuyển động theo một chiều từ Ou đến trùng với tia Ov thì ta nói tia Om đã *quét được một* ***góc lượng giác*** *tia đầu là* Ou, *tia cuối là* Ov. Kí hiệu (Ou,Ov)

- Điểm M chuyển động theo một từ điểm U đến trùng với điểm V thì ta nói *điểm* M *đã vạch nên một* ***cung lượng giác*** *điểm đầu* U, *điểm cuối* V.

Kí hiệu là $\overset{\frown}{UV}$

- Tia Om quay đúng một vòng theo chiều dương thì ta nói tia Om quay góc 360^0 (hay 2π), quay hai vòng thì ta nói nó quay góc $2.360^0 = 720^0$ (hay 4π), quay theo chiều âm một phần tư vòng ta nói nó quay góc -90^0 (hay $-\frac{\pi}{2}$), quay theo chiều âm ba vòng bốn phần bảy($\frac{25}{7}$ vòng) thì nói nó quay góc $-\frac{25}{7}.360^0$ (hay $-\frac{50\pi}{7}$)...

- Ta coi số đo của góc lượng giác (Ou,Ov) là số đo của cung lượng giác $\overset{\frown}{UV}$

c) Hệ thức Sa-lơ.

- Với ba tia Ou, Ov, Ow tùy ý ta có:

$\text{Sđ}(Ou,Ov) + \text{Sđ}(Ov,Ow) = \text{Sđ}(Ou,Ow) + k2\pi\ (k \in Z)$

$\text{Sđ}(Ou,Ov) - \text{Sđ}(Ou,Ow) = \text{Sđ}(Ow,Ov) + k2\pi\ (k \in Z)$

- Với ba điểm tùy ý U,V,W trên đường tròn định hướng ta có :

$\text{Sđ}\overset{\frown}{UV} + \text{Sđ}\overset{\frown}{VW} = \text{Sđ}\overset{\frown}{UW} + k2\pi\ (k \in Z)$

$\text{Sđ}\overset{\frown}{UV} - \text{Sđ}\overset{\frown}{UW} = \text{Sđ}\overset{\frown}{WV} + k2\pi\ (k \in Z)$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: ***XÁC ĐỊNH CÁC YẾU TỐ LIÊN QUAN ĐẾN CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC.***

Phương pháp giải.

Ngoài việc sử dụng định nghĩa góc và cung lượng giác, công thức tính độ dài cung tròn khi biết số đo, mối liên hệ giữa đơn vị độ, radian và hệ thức salơ chúng ta cần lưu ý đến kết quả sau:

Nếu một góc (cung) lượng giác có số đo a^0 (hay α rad) thì mọi góc (cung) lượng giác cùng tia đầu (điểm đầu), tia cuối(điểm cuối) với nó có số đo dạng dạng $a^0 + k360^0$ (hay $\alpha + k2\pi$ rad, $k \in Z$), mỗi góc (cung) ứng với mỗi giá trị của k. Từ đó hai góc lượng giác có cùng tia đầu và tia cuối thì sai khác nhau một bội của 2π

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1:

a) Đổi số đo của các góc sau ra rađian: $72^0, 600^0, -37^045'30''$.

b) Đổi số đo của các góc sau ra độ: $\frac{5\pi}{18}, \frac{3\pi}{5}, -4$.

Lời giải

a) Vì $1^0 = \frac{\pi}{180}$ rad nên $72^0 = 72.\frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{5}, 600^0 = 600.\frac{\pi}{180} = \frac{10\pi}{3}$,

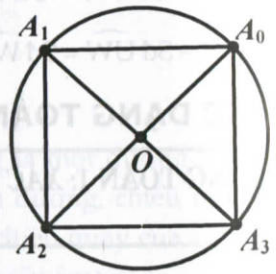
$$-37^045'30'' = -37^0 - \left(\frac{45}{60}\right)^0 - \left(\frac{30}{60.60}\right)^0 = \left(\frac{4531}{120}\right)^0 = \frac{4531}{120}.\frac{\pi}{180} \approx 0,6587$$

b) Vì $1\text{rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0$ nên $\frac{5\pi}{18} = \left(\frac{5\pi}{18}.\frac{180}{\pi}\right)^0 = 50^o, \frac{3\pi}{5} = \left(\frac{3\pi}{5}.\frac{180}{\pi}\right)^0 = 108^o$,

$$-4 = -\left(4.\frac{180}{\pi}\right)^0 = -\left(\frac{720}{\pi}\right)^0 \approx -2260^048'.$$

Ví dụ 2: Cho hình vuông $A_0A_1A_2A_4$ nội tiếp đường tròn tâm O (các đỉnh được sắp xếp theo chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ). Tính số đo của các cung lượng giác $\overset{\frown}{A_0A_i}$, $\overset{\frown}{A_iA_j}$ $(i,j=0,1,2,3,4, i\neq j)$.

Lời giải



Ta có $\overset{\frown}{A_0OA_0} = 0$ nên sđ $\overset{\frown}{A_0A_0} = k2\pi$, $k\in Z$

$\overset{\frown}{A_0OA_1} = \frac{\pi}{2}$ nên sđ $\overset{\frown}{A_0A_1} = \frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k\in Z$

$\overset{\frown}{A_0OA_2} = \pi$ nên sđ $\overset{\flat}{A_0A_1} = \pi + k2\pi$, $k\in Z$

$\overset{\frown}{A_0OA_3} = \frac{\pi}{2}$ nên sđ $\overset{\frown}{A_0A_3} = 2\pi - \frac{\pi}{2} + k2\pi = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$, $k\in Z$

Như vậy sđ $\overset{\frown}{A_0A_i} = \frac{i\pi}{2} + k2\pi$, $i=0,1,2,3$, $k\in Z$

Theo hệ thức salơ ta có sđ $\overset{\frown}{A_iA_j}$ = sđ $\overset{\frown}{A_0A_j}$ − sđ $\overset{\frown}{A_0A_i}$ $+k2\pi = (j-i).\frac{\pi}{2} + k2\pi$, $k\in Z$.

Ví dụ 3: Tìm số đo α của góc lượng giác (Ou,Ov) với $0\le\alpha\le 2\pi$, biết một góc lượng giác cùng tia đầu, tia cuối với góc đó có số đo là:

a) $\frac{33\pi}{4}$ b) $-\frac{291983\pi}{3}$

Lời giải

a) Mọi góc lượng giác (Ou,Ov) có số đo là $\frac{33\pi}{4} + k2\pi, k\in Z$

Vì $0\le\alpha\le 2\pi$ nên $0\le\frac{33\pi}{4} + k2\pi \le 2\pi, k\in Z \Leftrightarrow 0\le\frac{33}{4} + k2\le 2, k\in Z$

$\Leftrightarrow -\frac{33}{8}\le k\le -\frac{25}{8}, k\in Z \Leftrightarrow k=-4$

Suy ra $\alpha = \frac{33\pi}{4} + (-4).2\pi = \frac{\pi}{4}$

b) Mọi góc lượng giác (Ou,Ov) có số đo là $-\frac{291983\pi}{3} + k2\pi, k\in Z$

Vì $0\le\alpha\le 2\pi$ nên $0\le -\frac{291983\pi}{3} + k2\pi \le 2\pi, k\in Z \Leftrightarrow 0\le -\frac{291983}{3} + k2\le 2, k\in Z$

$\Leftrightarrow \frac{291983}{6}\le k\le \frac{291989}{6}, k\in Z \Leftrightarrow k=48664$

Suy ra $\alpha = -\frac{291983\pi}{3} + 48664.2\pi = \frac{\pi}{3}$

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 6.0: Hai góc lượng giác có số đo $\frac{39\pi}{7}$ và $\frac{m\pi}{9}$ (m là số nguyên) có thể cùng tia đầu, tia cuối được không?

Hướng dẫn giải

Giả sử hai góc có cùng tia đầu, tia cuối khi đó $\frac{m\pi}{9} - \frac{39\pi}{7} = k2\pi$, $k\in Z$

Hay $7m - 9.39. = 9.7.k2 \Leftrightarrow 7(m-18k) = 351 \Leftrightarrow m-18k = \frac{351}{7}$ với $k,m\in Z$.

Vì vế trái là một số nguyên, vế phải là số thập phân nên dẫn tới vô lí.

Vậy hai góc lương giác $\frac{39\pi}{7}$ và $\frac{m\pi}{9}$ (m là số nguyên) không thể cùng tia đầu, tia cuối.

Bài 6.1: Cho lục giác đều $A_0A_1A_2A_4A_5A_6$ nội tiếp đường tròn tâm O (các đỉnh được sắp xếp theo chiều ngược chiều quay của kim đồng hồ). Tính số đo của các cung lượng giác $\overset{\flat}{A_0A_i}$, $\overset{\flat}{A_iA_j}$ $(i,j=0,1,2,3,4,5, i\neq j)$.

Hướng dẫn giải

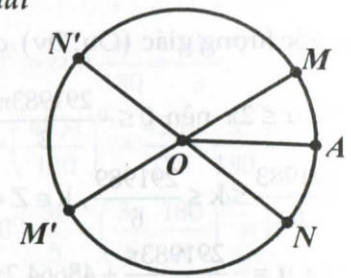
sđ $\overset{\flat}{A_0A_i} = \frac{i\pi}{3} + k2\pi$, $i=0,1,2,3,4,5$, $k\in Z$.

sđ $\overset{\flat}{A_iA_j}$ =sđ $\overset{\flat}{A_0A_j}$ − sđ $\overset{\flat}{A_0A_i}$ $+k2\pi = (j-i).\frac{\pi}{3} + k2\pi$,

$i,j=0,1,2,3,4,5, i\neq j$, $k\in Z$.

Bài 6.2: Trên đường tròn lượng giác gốc A. Cho điểm M, N sao cho sđ $\overset{\frown}{AM}=\frac{\pi}{5}$, sđ $\overset{\frown}{AN}=-\frac{\pi}{5}$. Các điểm M', N' lần lượt là các điểm đối xứng của M, N qua tâm đường tròn. Tìm số đo của cung $\overset{\frown}{AM'}, \overset{\frown}{AN'}$ và $\overset{\frown}{M'N'}$.

Hướng dẫn giải



$$\text{sđ}\overset{\frown}{AM'}=\frac{\pi}{5}+\pi+k2\pi=\frac{6\pi}{5}+k2\pi,\ k\in Z$$

$$\text{sđ}\overset{\frown}{AN'}=-\frac{\pi}{5}+\pi+k2\pi=\frac{4\pi}{5}+k2\pi,\ k\in Z$$

Theo hệ thức salơ ta có

$$\text{sđ}\overset{\frown}{M'N'}=\text{sđ}\overset{\frown}{AN'}-\text{sđ}\overset{\frown}{AM'}+k2\pi$$

$$=-\frac{2\pi}{5}+k2\pi,\ k\in Z.$$

§ 2: GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC (CUNG) LƯỢNG GIÁC

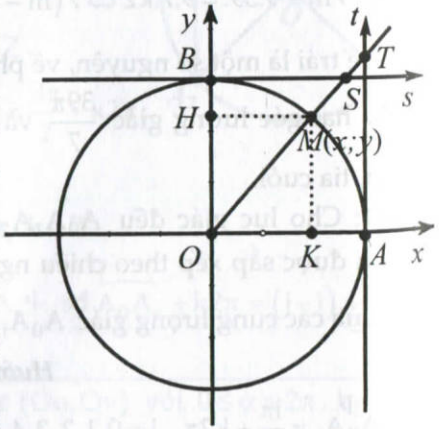
A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Giá trị lượng giác của góc(cung) lượng giác.

a) Đường tròn lượng giác: Đường tròn lượng giác là đường tròn đơn vị, định hướng và trên đó chọn điểm A làm gốc.

b) Tương ứng giữa số thực và điểm trên đường tròn lượng giác.

Điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho $(OA,OM)=\alpha$ gọi là điểm xác định bởi số α (hay bởi cung α, hay bởi góc α). Điểm M còn được gọi là điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn cung(góc) lượng giác có số đo α.



Nhận xét: Ứng với mỗi số thực α có một điểm nằm trên đường tròn lượng(điểm xác định bởi số đó) tương tự như trên trục số. Tuy nhiên, mỗi điểm trên đường tròn lượng giác ứng với vô số thực. Các số thực có dạng là $\alpha+k2\pi, k\in Z$.

d) Giá trị lượng giác sin, côsin, tang và côtang: Cho hệ trục tọa độ gắn với đường tròn lượng giác. Với mỗi góc lượng giác (Ou,Ov) có số đo α, xác định điểm $M(x;y)$ trên đường tròn lượng giác sao cho sđ... Khi đó ta định nghĩa

$\cos\alpha=x,\ \sin\alpha=y\ ;\ \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\ ;\ \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}(\alpha\neq k\pi)$

Ý nghĩa hình học: Gọi K, H lần lượt là hình chiếu của M lên trục Ox, Oy. Vẽ trục số At gốc A cùng hướng với trục Oy và vẽ trục số Bs gốc B cùng hướng với trục Ox, gọi T, S lần lượt là giao điểm của đường thẳng OM cắt với các trục số At, Bs. Khi đó ta có:

$\sin\alpha=\overline{OH},\ \cos\alpha=\overline{OK},\ \tan\alpha=\overline{AT},\ \cot\alpha=\overline{BS}$

e) Tính chất:

- $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ xác định với mọi giá trị của α và $-1\le\sin\alpha\le1, -1\le\cos\alpha\le1$.
- $\tan\alpha$ được xác định khi $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $\cot\alpha$ xác định khi $\alpha\neq k\pi$
- $\sin\alpha=\sin(\alpha+k2\pi)$, $\cos\alpha=\cos(\alpha+k2\pi)$

  $\tan\alpha=\tan(\alpha+k\pi)$, $\cot\alpha=\cot(\alpha+k\pi)$

f) Dấu của các giá trị lượng giác:

Dấu của các giá trị lượng giác phụ thuộc vào vị trí điểm M nằm trên đường tròn lượng giác.

Bảng xét dấu

Giá trị lượng giác \ Phần tư	I	II	III	IV
cosα	+	–	–	+
sinα	+	+	–	–
tanα	+	–	+	–
cotα	+	–	+	–

g) Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt.

Góc α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	180^0	270^0	360^0
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	–1	0
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	–1	0	1
tanα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	||	$-\sqrt{3}$	–1	0	||	0
cotα	||	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	–1	||	0	||

2. Các hệ thức lượng giác cơ bản

1) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 2) $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\ (\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi)$

3) $1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\ (\alpha\neq k\pi)$ 4) $\tan\alpha.\cot\alpha=1\ (\alpha\neq\dfrac{k\pi}{2})$

3. Giá trị lượng giác của góc(cung) có liên quan đặc biệt.

Góc đối nhau (α và $-\alpha$)	Góc bù nhau (α và $\pi-\alpha$)	Góc phụ nhau(α và $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$)
$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$	$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$
$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$
$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$	$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$	$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$
$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$	$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$	$\cot\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$

Góc hơn kém π (α và $\pi+\alpha$)	Góc hơn kém $\dfrac{\pi}{2}$ (α và $\dfrac{\pi}{2}+\alpha$)
$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$
$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$
$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$	$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$
$\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$	$\cot\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$

Chú ý: Để nhớ nhanh các công thức trên ta nhớ câu: "cos đối sin bù phụ chéo hơn kém π tang côtang, hơn kém $\dfrac{\pi}{2}$ chéo sin". Với nguyên tắc nhắc đến giá trị nào thì nó bằng còn không nhắc thì đổi.

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: *BIỂU DIỄN GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC.*

Phương pháp giải.

Để biểu diễn các góc lượng giác trên đường tròn lượng giác ta thường sử dụng các kết quả sau

- Góc α và góc $\alpha+k2\pi, k\in Z$ có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.
- Số điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn bởi số đo có dạng $\alpha+\dfrac{k2\pi}{m}$ (với k là số nguyên và m là số nguyên dương) là m. Từ đó để biểu diễn các góc lượng giác đó ta lần lượt cho k từ 0 tới $(m-1)$ rồi biểu diễn các góc đó.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

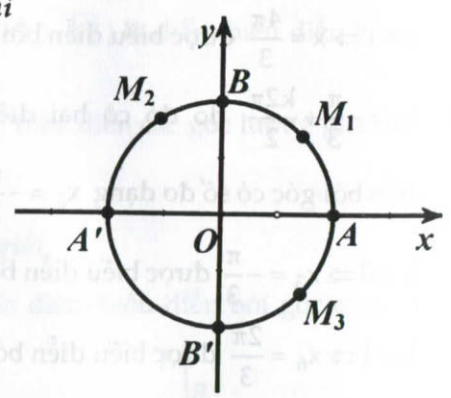
Ví dụ 1: Biểu diễn các góc (cung) lượng giác trên đường tròn lượng giác có số đo sau:

a) $\dfrac{\pi}{4}$ b) $-\dfrac{11\pi}{2}$ c) 120^0 d) -765^0

Lời giải

a) Ta có $\dfrac{\frac{\pi}{4}}{2\pi}=\dfrac{1}{8}$. Ta chia đường tròn thành tám phần bằng nhau.

Khi đó điểm M_1 là điểm biểu diễn bởi góc có số đo $\dfrac{\pi}{4}$.



b) Ta có $-\dfrac{13\pi}{2}=-\dfrac{\pi}{2}+(-3).2\pi$

do đó điểm biểu diễn bởi góc $-\dfrac{11\pi}{2}$ trùng với góc $-\dfrac{\pi}{2}$ và là điểm B'.

c) Ta có $\dfrac{120}{360}=\dfrac{1}{3}$. Ta chia đường tròn thành ba phần bằng nhau.

Khi đó điểm M_2 là điểm biểu diễn bởi góc có số đo 120^0.

d) Ta có $-765^0=-45^0+(-2).360^0$ do đó điểm biểu diễn bởi góc -765^0 trùng với góc -45^0.

$\dfrac{45}{360}=\dfrac{1}{8}$. Ta chia đường tròn làm tám phần bằng nhau (chú ý góc âm)

Khi đó điểm M_3 (điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{AB'}$) là điểm biểu diễn bởi góc có số đo -765^0.

Ví dụ 2 : Trên đường tròn lượng giác gốc A. Biểu diễn các góc lượng giác có số đo sau (với k là số nguyên tùy ý).

$x_1 = k\pi$; $x_2 = \frac{\pi}{3} + k\pi$; $x_3 = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

Các góc lượng giác trên có thể viết dưới dạng công thức duy nhất nào?

Lời giải

- Ta có $x_1 = \frac{k2\pi}{2}$ do đó có hai điểm biểu diễn bởi góc có số đo dạng $x_1 = k\pi$

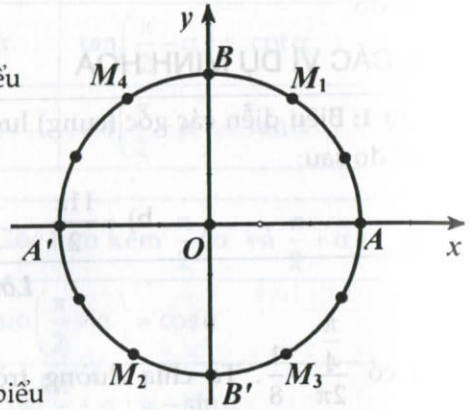
  Với $k = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ được biểu diễn bởi điểm A

  $k = 1 \Rightarrow x_1 = \pi$ được biểu diễn bởi A'

- $x_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{2}$ do đó có hai điểm biểu diễn bởi góc có số đo dạng $x_2 = \frac{\pi}{3} + k\pi$

  $k = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{3}$ được biểu diễn bởi M_1

  $k = 1 \Rightarrow x = \frac{4\pi}{3}$ được biểu diễn bởi M_2



- $x_3 = -\frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{2}$ do đó có hai điểm biểu diễn bởi góc có số đo dạng $x_3 = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

  $k = 0 \Rightarrow x_3 = -\frac{\pi}{3}$ được biểu diễn bởi M_3

  $k = 1 \Rightarrow x_6 = \frac{2\pi}{3}$ được biểu diễn bởi M_4.

- Do các góc lượng giác x_1, x_2, x_3 được biểu diễn bởi đỉnh của đa giác đều $AM_1M_4A'M_2M_3$ nên các góc lượng giác đó có thể viết dưới dạng một công thức duy nhất là $x = \frac{k\pi}{3}$.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

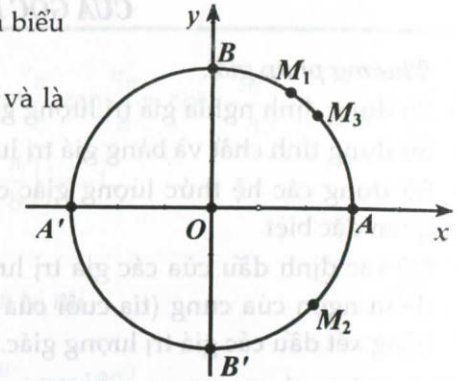
Bài 6.3: Biểu diễn các góc (cung) lượng giác trên đường tròn lượng giác có số đo sau:

a) $\frac{\pi}{3}$ b) $-\frac{17\pi}{4}$ c) -45^0 d) 765^0

Hướng dẫn giải

HD: a) Ta có $\frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi} = \frac{1}{6}$. Ta chia đường tròn thành sáu phần bằng nhau. Khi đó điểm M_1 là điểm biểu diễn bởi góc có số đo $\frac{\pi}{3}$.

b) Ta có $-\frac{17\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + (-2).2\pi$ do đó điểm biểu diễn bởi góc $-\frac{17\pi}{4}$ trùng với góc $-\frac{\pi}{4}$ và là điểm M_2.



c) Ta có $\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$. Ta chia đường tròn thành tám phần bằng nhau.

Khi đó điểm M_2 là điểm biểu diễn bởi góc có số đo -45^0.

d) Ta có $765^0 = 45^0 + 2.360^0$ do đó điểm biểu diễn bởi góc 765^0 trùng với góc 45^0.

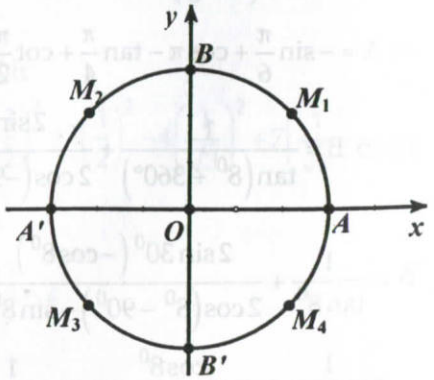
$\frac{45}{360} = \frac{1}{8}$. Ta chia đường tròn làm tám phần bằng nhau

Khi đó điểm M_3 (điểm chính giữa cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$) là điểm biểu diễn bởi góc có số đo 765^0.

Bài 6.4: Trên đường tròn lượng giác gốc A. Biểu diễn các góc lượng giác có số đo là $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ (k là số nguyên tùy ý).

Hướng dẫn giải

Ta có $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{4}$ do đó có bốn điểm biểu diễn bởi góc có số đo dạng $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$



Với $k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ được biểu diễn bởi điểm M_1

$k = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$ được biểu diễn bởi M_2

$k = 2 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4}$ được biểu diễn bởi M_3

$k = 3 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{4}$ được biểu diễn bởi M_4

Vậy góc lượng giác có số đo là $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ được biểu diễn bởi đỉnh của hình vuông $M_1M_2M_3M_4$.

DẠNG TOÁN 2: *XÁC ĐỊNH GIÁ TRỊ CỦA BIỂU THỨC CHỨA GÓC ĐẶC BIỆT, GÓC LIÊN QUAN ĐẶC BIỆT VÀ DẤU CỦA GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC.*

Phương pháp giải.

- Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác
- Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt
- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản và giá trị lượng giác của góc liên quan đặc biệt
- Để xác định dấu của các giá trị lượng giác của một cung (góc) ta xác định điểm ngọn của cung (tia cuối của góc) thuộc góc phần tư nào và áp dụng bảng xét dấu các giá trị lượng giác.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A=\sin\frac{7\pi}{6}+\cos 9\pi+\tan(-\frac{5\pi}{4})+\cot\frac{7\pi}{2}$

b) $B=\frac{1}{\tan 368^\circ}+\frac{2\sin 2550^\circ\cos(-188^\circ)}{2\cos 638^\circ+\cos 98^\circ}$

c) $C=\sin^2 25^\circ+\sin^2 45^\circ+\sin^2 60^\circ+\sin^2 65^\circ$

d) $D=\tan^2\frac{\pi}{8}.\tan\frac{3\pi}{8}.\tan\frac{5\pi}{8}$

Lời giải

a) Ta có $A=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+\cos(\pi+4.2\pi)-\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)+\cot\left(\frac{\pi}{2}+3\pi\right)$

$\Rightarrow A=-\sin\frac{\pi}{6}+\cos\pi-\tan\frac{\pi}{4}+\cot\frac{\pi}{2}=-\frac{1}{2}-1-1+0=-\frac{5}{2}$

b) Ta có $B=\frac{1}{\tan\left(8^0+360^\circ\right)}+\frac{2\sin\left(30^0+7.360^\circ\right)\cos(8^0+180^\circ)}{2\cos\left(-90^0+8^0+2.360^\circ\right)+\cos\left(90^0+8^\circ\right)}$

$B=\frac{1}{\tan 8^0}+\frac{2\sin 30^0\left(-\cos 8^0\right)}{2\cos\left(8^0-90^0\right)-\sin 8^0}=\frac{1}{\tan 8^0}+\frac{2.\frac{1}{2}\left(-\cos 8^0\right)}{2\cos\left(90^0-8^0\right)-\sin 8^0}=$

$=\frac{1}{\tan 8^0}-\frac{\cos 8^0}{2\sin 8^0-\sin 8^0}=\frac{1}{\tan 8^0}-\frac{\cos 8^0}{\sin 8^0}=0$

c) Vì $25^0+65^0=90^0\Rightarrow\sin 65^0=\cos 25^0$ do đó

$C=\left(\sin^2 25^\circ+\cos^2 25\right)+\sin^2 45^\circ+\sin^2 60^\circ=1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$

Suy ra $C=\frac{7}{4}$.

d) $D=-\left(\tan\frac{\pi}{8}.\tan\frac{3\pi}{8}\right).\left[\tan\left(-\frac{\pi}{8}\right)\tan\frac{5\pi}{8}\right]$

Mà $\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{8}+\frac{5\pi}{8}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\tan\frac{3\pi}{8}=\cot\frac{\pi}{8},\tan\frac{5\pi}{8}=\cot\left(-\frac{\pi}{8}\right)$

Nên $D=-\left(\tan\frac{\pi}{8}.\cot\frac{\pi}{8}\right).\left[\tan\left(-\frac{\pi}{8}\right)\cot\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right]=-1$.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Các bài tập sau đây đều không sử dụng máy tính bỏ túi

Bài 6.5: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A=\cos 0^0+\cos 20^0+\cos 40^0+...+\cos 160^0+\cos 180^0$

b) $B=\tan 5^0\tan 10^0\tan 15^0...\tan 80^0\tan 85^0$

Hướng dẫn giải

a) $A=\left(\cos 0^0+\cos 180^0\right)+\left(\cos 20^0+\cos 160^0\right)+...+\left(\cos 80^0+\cos 100^0\right)$

$=\left(\cos 0^0-\cos 0^0\right)+\left(\cos 20^0-\cos 20^0\right)+...+\left(\cos 80^0-\cos 80^0\right)=0$

b) $B=\left(\tan 5^0\tan 85^0\right)\left(\tan 15^0\tan 75^0\right)...\left(\tan 45^0\tan 45^0\right)$

$=\left(\tan 5^0\cot 5^0\right)\left(\tan 15^0\cot 5^0\right)...\left(\tan 45^0\cot 5^0\right)=1$

Bài 6.6: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A=5\sin^2\frac{151\pi}{6}+3\cos^2\frac{85\pi}{3}-4\tan^2\frac{193\pi}{6}+7\cot^2\frac{37\pi}{3}$.

b) $B=\cos^2\frac{\pi}{5}+\cos^2\frac{2\pi}{5}+\cos^2\frac{\pi}{10}+\cos^2\frac{3\pi}{10}$.

Hướng dẫn giải

a) $A=5\sin^2\frac{\pi}{6}+3\cos^2\frac{\pi}{3}-4\tan^2\frac{\pi}{6}+7\cot^2\frac{\pi}{3}=5.\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+7\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=3$

b) Ta có $\cos\frac{\pi}{5}=\sin\frac{3\pi}{10},\cos\frac{2\pi}{5}=\sin\frac{\pi}{10}$ suy ra

$B=\left(\cos^2\frac{\pi}{10}+\sin^2\frac{\pi}{10}\right)+\left(\cos^2\frac{3\pi}{10}+\sin^2\frac{3\pi}{10}\right)=2$

Bài 6.7: Xác định dấu của các biểu thức sau:

a) $B=\sin 215^0.\tan\frac{22\pi}{7}$

b) $C=\cot\frac{3\pi}{5}.\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

Hướng dẫn giải

a) $B=\sin\left(180^0+35^0\right).\tan\left(3\pi+\frac{\pi}{7}\right)=-\sin 35^0.\tan\frac{\pi}{7}<0$

b) $C=-\cot\frac{3\pi}{5}.\sin\frac{2\pi}{3}$. Ta có $\frac{\pi}{2}<\frac{3\pi}{5}<\pi\Rightarrow\cot\frac{3\pi}{5}<0,\ \frac{\pi}{2}<\frac{2\pi}{3}<\pi\Rightarrow\sin\frac{2\pi}{3}>0$

Vì vậy $C=-\cot\frac{3\pi}{5}.\sin\frac{2\pi}{3}>0$

Bài 6.9: Cho $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Xét dấu của các biểu thức sau:

a) $\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{5}\right)$ b) $\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{8}\right)$

Hướng dẫn giải

a) $\frac{2\pi}{5}<\alpha+\frac{2\pi}{5}<\frac{9\pi}{10}\Rightarrow 0<\alpha+\frac{2\pi}{5}<\pi\Rightarrow\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{5}\right)>0$

b) $-\frac{\pi}{8}<\frac{3\pi}{8}-\alpha<\frac{3\pi}{8}\Rightarrow-\frac{\pi}{2}<\frac{3\pi}{8}-\alpha<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos\left(\frac{3\pi}{8}-\alpha\right)>0$

DẠNG TOÁN 3: *CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC, CHỨNG MINH BIỂU THỨC KHÔNG PHỤ THUỘC GÓC x, ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC*

Phương pháp giải.

Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản, các hằng đẳng thức đáng nhớ và sử dụng tính chất của giá trị lượng giác để biến đổi

+ Khi chứng minh một đẳng thức ta có thể biến đổi vế này thành vế kia, biến đổi tương đương, biến đổi hai vế cùng bằng một đại lượng khác.
+ Chứng minh biểu thức không phụ thuộc góc x hay đơn giản biểu thức ta cố gắng làm xuất hiện nhân tử chung ở tử và mẫu để rút gọn hoặc làm xuất hiện các hạng tử trái dấu để rút gọn cho nhau.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Chứng minh các đẳng thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a) $\cos^4 x+2\sin^2 x=1+\sin^4 x$

b) $\frac{\sin x+\cos x}{\sin^3 x}=\cot^3 x+\cot^2 x+\cot x+1$

c) $\frac{\cot^2 x-\cot^2 y}{\cot^2 x.\cot^2 y}=\frac{\cos^2 x-\cos^2 y}{\cos^2 x.\cos^2 y}$

Lời giải

a) Đẳng thức tương đương với

$\cos^4 x=1-2\sin^2 x+\left(\sin^2 x\right)^2\Leftrightarrow\cos^4 x=\left(1-\sin^2 x\right)^2$ (*)

Mà $\sin^2 x+\cos^2 x=1\Rightarrow\cos^2 x=1-\sin^2 x$

Do đó (*) $\Leftrightarrow\cos^4 x=\left(\cos^2 x\right)^2$ (đúng) ĐPCM.

b) Ta có $VT=\frac{\sin x+\cos x}{\sin^3 x}=\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{\cos x}{\sin^3 x}$

Mà $\cot^2 x+1=\frac{1}{\sin^2 x}$ và $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ nên

$VT=\cot^2 x+1+\cot x\left(\cot^2 x+1\right)=\cot^3 x+\cot^2 x+\cot x+1=VP$ ĐPCM.

c) Ta có $VT=\frac{\cot^2 x-\cot^2 y}{\cot^2 x.\cot^2 y}=\frac{1}{\cot^2 y}-\frac{1}{\cot^2 x}=\tan^2 y-\tan^2 x$

$=\left(\frac{1}{\cos^2 y}-1\right)-\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)=\frac{1}{\cos^2 y}-\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x-\cos^2 y}{\cos^2 x.\cos^2 y}=VP$

ĐPCM.

Ví dụ 2: Đơn giản các biểu thức sau(giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a) $A=\cos(5\pi-x)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\tan\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\cot(3\pi-x)$

b) $B=\frac{\sin(900^\circ+x)-\cos(450^\circ-x)+\cot(1080^\circ-x)+\tan(630^\circ-x)}{\cos(450^\circ-x)+\sin(x-630^\circ)-\tan(810^\circ+x)-\tan(810^\circ-x)}$

c) $C=\sqrt{2}-\frac{1}{\sin(x+2013\pi)}.\sqrt{\frac{1}{1+\cos x}+\frac{1}{1-\cos x}}$ với $\pi<x<2\pi$

Lời giải

a) Ta có $\cos(5\pi-x)=\cos(\pi-x+2.2\pi)=\cos(\pi-x)=-\cos x$

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\cos x$

$\tan\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cot x$

$\cot(3\pi-x)=\cot(-x)=-\cot x$

Suy ra $A=-\cos x-(-\cos x)+\cot x+(-\cot x)=0$

b) Ta có $\sin(900^\circ+x)=\sin\left(180^0+2.360^0+x\right)=\sin\left(180^0+x\right)=-\sin x$

$\cos\left(450^0-x\right)=\cos\left(90^0+360^0-x\right)=\cos\left(90^0-x\right)=\sin x$

$\cot(1080^\circ-x)=\cot(3.360^\circ-x)=\cot(-x)=-\cot x$

$\tan(630^\circ-x)=\tan(3.180^\circ+90^0-x)=\tan(90^0-x)=\cot x$

$\sin(x-630^\circ)=\sin\left(x-2.360^0+90^0\right)=\sin\left(x+90^0\right)=\cos x$

$\tan(810^\circ+x)=\tan(4.180^\circ+90^0+x)=\tan(90^0+x)=-\cot x$

$\tan(810^\circ - x) = \tan(4.180^\circ + 90^0 - x) = \tan(90^\circ - x) = \cot x$

Vậy $B = \dfrac{-\sin x - \sin x - \cot x + \cot x}{\sin x + \cos x - (-\cot x) - \cot x} = \dfrac{-2\sin x}{\sin x + \cos x}$

c) Ta có $\sin(x + 2013\pi) = \sin(x + \pi + 1006.2\pi) = \sin(x + \pi) = -\sin x$ nên

$C = \sqrt{2} + \dfrac{1}{\sin x}\cdot\sqrt{\dfrac{1 - \cos x + 1 + \cos x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}}$

$= \sqrt{2} + \dfrac{1}{\sin x}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{1 - \cos^2 x}} = \sqrt{2} + \dfrac{1}{\sin x}\cdot\sqrt{\dfrac{2}{\sin^2 x}} = \sqrt{2}\left(1 + \dfrac{1}{\sin x|\sin x|}\right)$

Vì $\pi < x < 2\pi \Rightarrow \sin x < 0$ nên $C = \sqrt{2}\left(1 - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right) = -\sqrt{2}\cot^2 x$

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa.

Bài 6.10: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = 2\sin(90^0 + x) + \sin(900^0 - x) + \sin(270^0 + x) - \cos(90^0 - x)$

b) $B = \dfrac{\sin(5\pi + x)\cos(x - \dfrac{9\pi}{2})\tan(10\pi + x)}{\cos(5\pi - x)\sin(\dfrac{11}{2}\pi + x)\tan(7\pi - x)}$.

Hướng dẫn giải

a) $A = 2\cos x + \sin x - \cos x - \sin x = \cos x$

b) $B = \dfrac{-\sin x \sin x \tan x}{(-\cos x)(-\cos x)\tan x} = -\tan^2 x$

Bài 6.11: Chứng minh các đẳng thức sau(giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a) $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x.\sin^2 x$

b) $\dfrac{\tan^3 x}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{\sin x \cos x} + \dfrac{\cot^3 x}{\cos^2 x} = \tan^3 x + \cot^3 x$

c) $\sin^2 x - \tan^2 x = \tan^6 x(\cos^2 x - \cot^2 x)$

d) $\dfrac{\tan^2 a - \tan^2 b}{\tan^2 a.\tan^2 b} = \dfrac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\sin^2 a.\sin^2 b}$

Hướng dẫn giải

a) $\tan^2 x - \sin^2 x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \sin^2 x\left(1 + \tan^2 x\right) - \sin^2 x = \tan^2 x.\sin^2 x$

b) $\dfrac{\tan^3 x}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{\sin x \cos x} + \dfrac{\cot^3 x}{\cos^2 x}$

$= \tan^3 x\left(\cot^2 x + 1\right) - \tan x\left(\cot^2 x + 1\right) + \cot^3 x\left(\tan^2 x + 1\right)$

$= \tan x + \tan^3 x - \cot x - \tan x + \cot x + \cot^3 x = \tan^3 x + \cot^3 x$

c) $\tan^6 x(\cos^2 x - \cot^2 x) = \tan^6 x\cos^2 x - \tan^6 x\cot^2 x = \tan^4 x\sin^2 x - \tan^4 x$

$= \tan^4 x.\cos^2 x = \tan^2 x.\sin^2 x = \tan^2 x - \sin^2 x$ (do câu a))

d) $\dfrac{\tan^2 a - \tan^2 b}{\tan^2 a.\tan^2 b} = \dfrac{1}{\tan^2 b} - \dfrac{1}{\tan^2 a}$

$= \cot^2 b - \cot^2 a = \dfrac{1}{\sin^2 b} - \dfrac{1}{\sin^2 a} = \dfrac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\sin^2 a.\sin^2 b}$

Bài 6.12: Đơn giản các biểu thức sau

a) $\dfrac{1}{\cos^2 x} - \tan^2\left(180^0 - x\right) - \cos^2\left(180^0 - x\right)$ b) $\dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \tan^2 x} - \cos^2 x$

c) $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\cos^2 x + \sin x(\sin x - \cos x)}$ d) $\sqrt{\dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} + \sqrt{\dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$

e) $\sqrt{\dfrac{1}{1 + \cos x} + \dfrac{1}{1 - \cos x}}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{1 + \sin x} + \dfrac{1}{1 - \sin x}}$ $(0 < x < \pi)$.

f) $\left(\dfrac{1}{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{\tan^2 x} - \dfrac{1}{\cot^2 x}\right)\left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)$.

Hướng dẫn giải

a) $\dfrac{1}{\cos^2 x} - \tan^2\left(180^0 - x\right) - \cos^2\left(180^0 - x\right) = \tan^2 x + 1 - \tan^2 x - \cos^2 x = \sin^2 x$

b) $\dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \tan^2 x} - \cos^2 x = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\dfrac{1}{\sin^2 x} - 1 - \dfrac{1}{\cos^2 x} + 1} - \cos^2 x$

$= \cos^2 x\sin^2 x - \cos^2 x = -\cos^4 x$

c) $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\cos^2 x + \sin x(\sin x - \cos x)} = \dfrac{(\sin x + \cos x)\left(\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x\right)}{\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x}$

$= \sin x + \cos x$

d) Đặt $A = \sqrt{\dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} + \sqrt{\dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$ khi đó

$A^2 = \dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + \dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x} + 2\sqrt{\dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}\cdot\sqrt{\dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$

$= \dfrac{(1 + \sin x)^2 + (1 - \sin x)^2}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} + 2 = \dfrac{2\left(1 + \sin^2 x\right)}{1 - \sin^2 x} + 2 = \dfrac{4}{\cos^2 x}$

Suy ra $A = \dfrac{2}{|\cos x|}$.

e) $\sqrt{\frac{1}{1+\cos x}+\frac{1}{1-\cos x}}.\sqrt{\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}}=\sqrt{\frac{2}{1-\cos^2 x}}.\sqrt{\frac{2}{1-\sin^2 x}}$

$=\frac{2}{\sqrt{\sin^2 x\cos^2 x}}=\frac{2}{\sin x|\cos x|}$

f) $\left(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\tan^2 x}-\frac{1}{\cot^2 x}\right)\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)$

$=\left(\frac{1-\cos^2 x}{\sin^2 x}+\frac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)\left(\cot^2 x-\tan^2 x\right)$

$\frac{1-\sin^4 x-\cos^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x}.\left(\cot^2 x-\tan^2 x\right)=2\left(\cot^2 x-\tan^2 x\right)$

Bài 6.13: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào α.

a) $(\tan\alpha+\cot\alpha)^2-(\tan\alpha-\cot\alpha)^2$

b) $2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)$

c) $\cot^2 30^0(\sin^8\alpha-\cos^8\alpha)+4\cos 60^0(\cos^6\alpha-\sin^6\alpha)-\sin^6(90^0-\alpha)\left(\tan^2\alpha-1\right)^3$

Hướng dẫn giải

a) $(\tan\alpha+\cot\alpha)^2-(\tan\alpha-\cot\alpha)^2=4$

b) $2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)$

$=2\left(1-3\sin^2 x.\cos^2 x\right)-3\left(1-2\sin^2 x.\cos^2 x\right)=-1$

c) $\cot^2 30^0(\sin^8\alpha-\cos^8\alpha)+4\cos 60^0(\cos^6\alpha-\sin^6\alpha)-\sin^6(90^0-\alpha)\left(\tan^2\alpha-1\right)^3$

$=3\left(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\right)\left(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\right)-2\left(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\right)\left(\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha\right)$

$-\left(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\right)^3=\left(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\right)^3-\left(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\right)^3=0$

DẠNG TOÁN 4: TÍNH GIÁ TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC KHI BIẾT MỘT GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC.

Phương pháp giải.

- Từ hệ thức lượng giác cơ bản là mối liên hệ giữa hai giá trị lượng giác, khi biết một giá trị lượng giác ta sẽ suy ra được giá trị còn lại. Cần lưu ý tới dấu của giá trị lượng giác để chọn cho phù hợp.
- Sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ trong đại số.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Tính giá trị lượng giác còn lại của góc α biết:

a) $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ và $90^0<\alpha<180^0$.

b) $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$ và $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

c) $\tan\alpha=-2\sqrt{2}$ và $0<\alpha<\pi$

d) $\cot\alpha=-\sqrt{2}$ và $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$

Lời giải

a) Vì $90^0<\alpha<180^0$ nên $\cos\alpha<0$ mặt khác $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

Suy ra $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{1}{9}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Do đó $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

b) Vì $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ nên $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\pm\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

Mà $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\sin\alpha<0$ suy ra $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$

Ta có $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ và $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

c) Vì $\tan\alpha=-2\sqrt{2}\Rightarrow\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Ta có $\tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{1}{\tan^2\alpha+1}=\frac{1}{\left(-2\sqrt{2}\right)^2+1}=\frac{1}{9}\Rightarrow\cos\alpha=\pm\frac{1}{3}$.

Vì $0<\alpha<\pi\Rightarrow\sin\alpha>0$ và $\tan\alpha=-2\sqrt{2}<0$ nên $\cos\alpha<0$

Vì vậy $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$

Ta có $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\Rightarrow\sin\alpha=\tan\alpha.\cos\alpha=-2\sqrt{2}.\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

d) Vì $\cot\alpha=-\sqrt{2}$ nên $\tan\alpha=\frac{1}{\cot\alpha}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ta có $\cot^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}\Rightarrow\sin^2\alpha=\frac{1}{\cot^2\alpha+1}=\frac{1}{\left(-\sqrt{2}\right)^2+1}=\frac{1}{3}\Rightarrow\sin\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

Do $\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3\pi}{2}\Rightarrow\cos\alpha<0$ và $\cot\alpha=-\sqrt{2}<0$ nên $\sin\alpha>0$

Do đó $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ta có $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\Rightarrow\cos\alpha=\cot\alpha.\sin\alpha=-\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$

Ví dụ 2: a) Tính giá trị lượng giác còn lại của góc α biết $\sin\alpha=\frac{1}{5}$ và $\tan\alpha+\cot\alpha<0$

b) Cho $3\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\frac{1}{2}$. Tính $A=2\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$.

Lời giải

a) Ta có $\cot^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2}=25\Rightarrow\cot^2\alpha=24$ hay $\cot\alpha=\pm2\sqrt{6}$

Vì $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ cùng dấu và $\tan\alpha+\cot\alpha<0$ nên $\tan\alpha<0$, $\cot\alpha<0$

Do đó $\cot\alpha=-2\sqrt{6}$. Ta lại có $\tan\alpha=\frac{1}{\cot\alpha}=-\frac{1}{2\sqrt{6}}$.

$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\Rightarrow\cos\alpha=\cot\alpha\sin\alpha=-2\sqrt{6}.\frac{1}{5}=\frac{-2\sqrt{6}}{5}$

b) Ta có $3\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\frac{1}{2}\Leftrightarrow3\sin^4\alpha-\left(1-\sin^2\alpha\right)^2=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow6\sin^4\alpha-2\left(1-2\sin^2\alpha+\sin^4\alpha\right)=1\Leftrightarrow4\sin^4\alpha+4\sin^2\alpha-3=0$

$\Leftrightarrow\left(2\sin^2\alpha-1\right)\left(2\sin^2\alpha+3\right)=0\Leftrightarrow2\sin^2\alpha-1=0$ (Do $2\sin^2\alpha+3>0$)

Suy ra $\sin^2\alpha=\frac{1}{2}$.

Ta lại có $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. Suy ra $A=2\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 6.14: Tính các giá trị lượng giác còn lại, biết

a) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ với $0^0<\alpha<90^0$ b) $\tan\alpha=2$ và $\pi<\alpha<2\pi$

c) $\cos\alpha=0,8$ và $\tan\alpha+\cot\alpha>0$

Hướng dẫn giải

a) $0^0<\alpha<90^0\Rightarrow\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{4}{5}$, $\tan\alpha=\frac{3}{4}$, $\cot\alpha=\frac{4}{3}$

b) Vì $\tan\alpha=2\Rightarrow\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{1}{2}$

Ta có $\tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}\Rightarrow\cos^2\alpha=\frac{1}{\tan^2\alpha+1}=\frac{1}{(2)^2+1}=\frac{1}{5}\Rightarrow\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Vì $\pi<\alpha<2\pi\Rightarrow\sin\alpha<0$ và $\tan\alpha=2>0$ nên $\cos\alpha<0$

Vì vậy $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

Ta có $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\Rightarrow\sin\alpha=\tan\alpha.\cos\alpha=2.\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

c) Vì $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ cùng dấu và $\tan\alpha+\cot\alpha>0$ nên $\tan\alpha>0$, $\cot\alpha>0$

Ta có $\tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{(0,8)^2}=\frac{25}{24}\Rightarrow\tan^2\alpha=\frac{1}{24}\Rightarrow\tan\alpha=\frac{1}{2\sqrt{6}}$

$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=2\sqrt{6}$, $\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2\sqrt{6}}.0,8=\frac{2}{5\sqrt{6}}$

Bài 6.15:

a) Cho $\sin a=\frac{1}{3}$. Tính $B=\frac{3\cot a+2\tan a+1}{\cot a+\tan a}$

b) Cho $\cot a=5$. Tính $D=2\cos^2 a+5\sin a\cos a+1$

Hướng dẫn giải

a) Từ giả thiết suy ra

$\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan\alpha=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\cot\alpha=-2\sqrt{2}\Rightarrow B=\frac{26-2\sqrt{2}}{9}$

b) $\frac{D}{\sin^2\alpha}=2\cot^2 a+5\cot a+\frac{1}{\sin^2\alpha}\Rightarrow\left(\cot^2 a+1\right)D=3\cot^2\alpha+5\cot a+1$

Suy ra $D=\frac{101}{26}$

Bài 6.16: Biết $\tan x+\cot x=m$.

a) Tìm $\tan^2 x+\cot^2 x$ b) $\frac{\tan^6 x+\cot^6 x}{\tan^4 x+\cot^4 x}$

Hướng dẫn giải

a) $\tan^2 x+\cot^2 x=m^2-2$

b) Ta có $\tan^4 x+\cot^4 x=\left(\tan^2 x+\cot^2 x\right)^2-2=\left(m^2-2\right)^2-2=m^4-4m^2+2$

$\Rightarrow\frac{\tan^6 x+\cot^6 x}{\tan^4 x+\cot^4 x}=\frac{\left(\tan^2 x+\cot^2 x\right)\left(\tan^4 x+\cot^4 x-\tan^2 x\cot^2 x\right)}{m^4-4m^2+2}$

$=\frac{\left(m^2-2\right)\left(m^4-4m^2+1\right)}{m^4-4m^2+2}$

§3. MỘT SỐ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Công thức cộng:

$$\sin(a+b)=\sin a.\cos b+\sin b.\cos a$$

$$\sin(a-b)=\sin a.\cos b-\sin b.\cos a$$

$$\cos(a+b)=\cos a.\cos b-\sin a.\sin b$$

$$\cos(a-b)=\cos a.\cos b+\sin a.\sin b$$

$$\tan(a+b)=\frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}$$

$$\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a.\tan b}$$

2. Công thức nhân đôi, hạ bậc:

a) Công thức nhân đôi.

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha.\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

b) Công thức hạ bậc.

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2};\qquad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2};\qquad \tan^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

3. Công thức biến đổi tích thành tổng.

$$\cos a\cos b=\frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$$

$$\sin a\sin b=-\frac{1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$$

$$\sin a\cos b=\frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$$

4. Công thức biến đổi tổng thành tích.

$$\cos a+\cos b=2\cos\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\sin a+\sin b=2\sin\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}.\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\tan a+\tan b=\frac{\sin(a+b)}{\cos a.\cos b}$$

$$\tan a-\tan b=\frac{\sin(a-b)}{\cos a.\cos b}$$

$$\cot a+\cot b=\frac{\sin(a+b)}{\sin a.\sin b}$$

$$\cot a-\cot b=\frac{\sin(b-a)}{\sin a.\sin b}$$

B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.

DẠNG TOÁN 1: *TÍNH GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC, BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC*

Phương pháp giải.

Sử dụng công thức lượng giác một cách linh hoạt để biến đổi biểu thức lượng giác nhằm triệt tiêu các giá trị lượng giác của góc không đặc biệt và đưa về giá trị lượng giác đặc biệt.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Tính các giá trị lượng giác sau: $\cos 795^0$, $\sin 18^0$, $\tan\frac{7\pi}{12}$, $\cot\frac{5\pi}{8}$.

Lời giải

- Vì $795^0=75^0+2.360^0=30^0+45^0+2.360^0$ nên

$$\cos 795^0=\cos 75^0=\cos 30^0\cos 45^0-\sin 30^0\sin 45^0=\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

- Vì $54^0+36^0=90^0$ nên $\sin 54^0=\cos 36^0$

Mà $\cos 36^0=\cos\left(2.18^0\right)=1-2\sin^2 18^0$

$$\sin 54^0=\sin\left(18^0+36^0\right)=\sin 18^0\cos 36^0+\sin 36^0\cos 18^0$$

$$=\sin 18^0.\left(1-2\sin^2 18^0\right)+2\sin 18^0\cos^2 18^0$$

$$=\sin 18^0.\left(1-2\sin^2 18^0\right)+2\sin 18^0\left(1-\sin^2 18^0\right)$$

$$=3\sin 18^0-4\sin^3 18^0$$

Do đó $3\sin 18^0-4\sin^3 18^0=1-2\sin^2 18^0$

$$\Leftrightarrow\left(\sin 18^0-1\right)\left(4\sin^2 18^0+2\sin 18^0-1\right)=0$$

$\Leftrightarrow \sin 18^0=1$ hoặc $\sin 18^0=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ hoặc $\sin 18^0=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

Vì $0<\sin 18^0<1$ nên $\sin 18^0=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

- $\tan\frac{7\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}=-2-\sqrt{3}$

- $\cot\frac{5\pi}{8}=\cot\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=-\tan\frac{\pi}{8}$

Ta lại có $1=\tan\frac{\pi}{4}=\tan\left(2.\frac{\pi}{8}\right)=\frac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}$ suy ra

$1-\tan^2\frac{\pi}{8}=2\tan\frac{\pi}{8}\Leftrightarrow\tan^2\frac{\pi}{8}+2\tan\frac{\pi}{8}-1=0$

$\Leftrightarrow\tan\frac{\pi}{8}=-1-\sqrt{2}$ hoặc $\tan\frac{\pi}{8}=-1+\sqrt{2}$

Do $\tan\frac{\pi}{8}>0$ nên $\tan\frac{\pi}{8}=-1+\sqrt{2}$. Vậy $\cot\frac{5\pi}{8}=1-\sqrt{2}$

Ví dụ 2: Tính giá trị biểu thức lượng giác sau:

a) $A=\sin22^030'\cos202^030'$ b) $B=4\sin^4\frac{\pi}{16}+2\cos\frac{\pi}{8}$

c) $C=\dfrac{\sin\frac{\pi}{5}-\sin\frac{2\pi}{15}}{\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{15}}$ d) $D=\sin\frac{\pi}{9}-\sin\frac{5\pi}{9}+\sin\frac{7\pi}{9}$

Lời giải

a) Cách 1: Ta có $\cos202^030'=\cos\left(180^0+22^030'\right)=-\cos22^030'$

Do đó $A=-\sin22^030'\cos22^030'=-\frac{1}{2}\sin45^0=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

Cách 2:

$A=\frac{1}{2}\left[\sin\left(22^030'+202^030'\right)+\sin\left(22^030'-202^030'\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\sin225^0+\sin\left(-180^0\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\sin\left(180^0+45^0\right)-\sin180^0\right]=-\frac{1}{2}\sin45^0=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

b) $B=\left(2\sin^2\frac{\pi}{16}\right)^2+2\cos\frac{\pi}{8}=\left[1-\cos\left(2.\frac{\pi}{16}\right)\right]^2+2\cos\frac{\pi}{8}$

$=1-2\cos\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}+2\cos\frac{\pi}{8}=1+\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}=1+\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{6+\sqrt{2}}{4}$

c) $C=\dfrac{\sin\frac{\pi}{5}-\sin\frac{2\pi}{15}}{\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{15}}=\dfrac{2\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{15}\right)\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{5}-\frac{2\pi}{15}\right)}{-2\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{15}\right)\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{5}-\frac{2\pi}{15}\right)}=-\dfrac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}=-\cot\frac{\pi}{6}=-\sqrt{3}$

d) $D=\left(\sin\frac{\pi}{9}+\sin\frac{7\pi}{9}\right)-\sin\frac{5\pi}{9}=2\sin\frac{4\pi}{9}.\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{5\pi}{9}=\sin\frac{4\pi}{9}-\sin\frac{5\pi}{9}=0$

Ví dụ 3: Tính giá trị biểu thức lượng giác sau:

a) $A=\dfrac{1}{\cos290^0}+\dfrac{1}{\sqrt{3}\sin250^0}$ b) $B=\left(1+\tan20^0\right)\left(1+\tan25^0\right)$

c) $C=\tan9^0-\tan27^0-\tan63^0+\tan81^0$ d) $D=\sin^2\frac{\pi}{9}+\sin^2\frac{2\pi}{9}+\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}$

Lời giải

a) Ta có $\cos290^0=\cos\left(180^0+90^0+20^0\right)=-\cos\left(90^0+20^0\right)=\sin20^0$

$\sin250^0=\sin\left(180^0+90^0-20^0\right)=-\sin\left(90^0-20^0\right)=-\cos20^0$

$C=\dfrac{1}{\sin20^0}-\dfrac{1}{\sqrt{3}\cos20^0}=\dfrac{\sqrt{3}\sin20^0-\sin20^0}{\sqrt{3}\sin20^0.\cos20^0}=4\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos20^0-\frac{1}{2}\sin20^0}{\sqrt{3}.2.\sin20^0.\cos20^0}$

$=4\dfrac{\sin60^0\cos20^0-\cos60^0\sin20^0}{\sqrt{3}\sin40^0}=\dfrac{4\sin40^0}{\sqrt{3}\sin40^0}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

b) Cách 1: Ta có

$B=\left(1+\dfrac{\sin20^0}{\cos20^0}\right)\left(1+\dfrac{\sin25^0}{\cos25^0}\right)=\dfrac{\sin20^0+\cos20^0}{\cos20^0}.\dfrac{\sin25^0+\cos25^0}{\cos25^0}$

$=\sqrt{2}.\dfrac{\sin20^0\cos45^0+\cos20^0\sin45^0}{\cos20^0}.\sqrt{2}.\dfrac{\sin25^0\cos45^0+\cos25^0\sin45^0}{\cos25^0}$

$=2\dfrac{\sin65^0\sin70^0}{\cos20^0\cos25^0}=2$

Cách 2: Ta có $\tan45^0=\tan\left(20^0+50^0\right)=\dfrac{\tan20^0+\tan25^0}{1-\tan20^0\tan25^0}$

Suy ra $1=\dfrac{\tan20^0+\tan25^0}{1-\tan20^0\tan25^0}\Leftrightarrow\tan20^0+\tan25^0+\tan20^0\tan25^0=1$

$\Leftrightarrow\left(1+\tan20^0\right)\left(1+\tan25^0\right)=2$.

Vậy $B=2$

c) $C=\tan9^0+\tan81^0-\left(\tan27^0+\tan63^0\right)$

$=\dfrac{\sin9^0\cos81^0+\sin81^0\cos9^0}{\cos9^0\cos81^0}-\dfrac{\sin27^0\cos63^0+\sin63^0\cos27^0}{\cos27^0\cos63^0}$

$=\dfrac{1}{\cos9^0\sin9^0}-\dfrac{1}{\cos27^0\sin27^0}=\dfrac{2}{\sin18^0}-\dfrac{2}{\sin54^0}=\dfrac{2\left(\sin54^0-\sin18^0\right)}{\sin18^0\sin54^0}$

$=\dfrac{4\cos36^0.\sin18^0}{\sin18^0.\sin54^0}=4$

d) $D=\sin^2\frac{\pi}{9}+\sin^2\frac{2\pi}{9}+\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}=\left(\sin\frac{\pi}{9}+\sin\frac{2\pi}{9}\right)^2-\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}$

$=\left(2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{18}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{9}\right)=\cos^2\frac{\pi}{18}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\cos\frac{\pi}{9}\right)$

$=\dfrac{1+\cos\frac{\pi}{9}}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\cos\frac{\pi}{9}\right)=\frac{3}{4}$

Lưu ý: Biến đổi sau thường xuyên được sử dụng

- $\sin x \pm \sqrt{3}\cos x = 2\left[\frac{1}{2}\sin x \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right] = 2\sin\left(x \pm \frac{\pi}{3}\right)$
- $\sqrt{3}\sin x \pm \cos x = 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x \pm \frac{1}{2}\cos x\right] = 2\sin\left(x \pm \frac{\pi}{6}\right)$
- $\sin x \pm \cos x = \sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right] = \sqrt{2}\sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right)$.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 6.18: Tính các giá trị lượng giác sau $\sin\frac{\pi}{8}, \sin\frac{\pi}{16}, \cot\frac{11\pi}{12}$

Hướng dẫn giải

Sử dụng công thức hạ bậc ta tính được

$$2\sin^2\frac{\pi}{8} = 1-\cos\frac{\pi}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$2\sin^2\frac{\pi}{16} = 1-\cos\frac{\pi}{8} = 1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{16} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$$

$$\cot\frac{11\pi}{12} = -\cot\frac{\pi}{12} = -\cot\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}} = -\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = -2-\sqrt{3}$$

Bài 6.19: Tính giá trị của biểu thức sau:

a) $A = 4\sin 45^0\cos 12^0\cos 3^0 - \sin 54^0 - \sin 36^0$

b) $B = \left(1-\cot 23^0\right)\left(1-\cot 22^0\right)$

c) $D = \dfrac{2\sin\frac{\pi}{5}+\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{20}}{2\cos\frac{\pi}{5}-\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{20}}$

Hướng dẫn giải

a) $4\sin 45^0\cos 12^0\cos 3^0 - \sin 54^0 - \sin 36^0$

$= 2\sin 45^0\left(\cos 15^0+\cos 9^0\right) - 2\sin 45^0\cos 9^0$

$2\sin 45^0\cos 15^0 = \sin 30^0 + \sin 60^0 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

b) C1: $B = \left(1-\dfrac{\cos 23^0}{\sin 23^0}\right)\left(1-\dfrac{\cos 22^0}{\sin 22^0}\right) = \dfrac{\sqrt{2}\sin\left(23^0-45^0\right).\sqrt{2}\sin\left(22^0-45^0\right)}{\sin 23^0\sin 22^0} = 2$

C2: $1 = \cot 45^0 = \cot\left(22^0+23^0\right) = \dfrac{\cot 22^0\cot 23^0-1}{\cot 22^0+\cot 23^0} \Rightarrow B = 2$

c) $D = \dfrac{2\sin\frac{\pi}{5}+2\sin\frac{\pi}{20}\cos\frac{\pi}{4}}{2\cos\frac{\pi}{5}-2\sin\frac{\pi}{20}\sin\frac{\pi}{4}} = \dfrac{2\sin\frac{\pi}{5}+\sin\frac{3\pi}{10}-\sin\frac{\pi}{5}}{2\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{10}-\cos\frac{\pi}{5}} = \dfrac{2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{10}}{2\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{10}} = 1$

Bài 6.20: Tính:

a) Tính giá trị lượng giác của góc $\frac{\pi}{12}$ b) $\cos^4\frac{\pi}{24}-\sin^4\frac{\pi}{24}$

c) $\cos 36^0 - \cos 72^0$ d) $\sin 10^0\sin 50^0\sin 70^0$

Hướng dẫn giải

a) $\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Tương tự $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \tan\frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}, \cot\frac{\pi}{12} = 2+\sqrt{3}$

b) $\cos^4\frac{\pi}{24}-\sin^4\frac{\pi}{24} = \left(\cos^2\frac{\pi}{24}+\sin^2\frac{\pi}{24}\right)\left(\cos^2\frac{\pi}{24}-\sin^2\frac{\pi}{24}\right) = \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

c) $\cos 36^0 - \cos 72^0 = \dfrac{2\left(\cos 36^0-\cos 72^0\right)\left(\cos 36^0+\cos 72^0\right)}{2\left(\cos 36^0+\cos 72^0\right)} =$

$\dfrac{2\cos^2 36^0 - 2\cos^2 72^0}{2\left(\cos 36^0+\cos 72^0\right)} = \dfrac{\cos 72^0-\cos 144^0}{2\left(\cos 36^0+\cos 72^0\right)} = \dfrac{1}{2}$

d) $8\sin 20^0\sin 10^0\sin 50^0\sin 70^0 = 8\sin 20^0\cos 20^0\cos 40^0\cos 80^0$

$= 4\sin 40^0\cos 40^0\cos 80^0 = 2\sin 80^0\cos 80^0 = \sin 160^0 = \sin 20^0$

$\Rightarrow \sin 10^0\sin 50^0\sin 70^0 = \dfrac{1}{8}$

Bài 6.21: Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = \cos^2 73^0 + \cos^2 47^0 + \cos 73^0\cos 47^0$ b) $B = \sin 6^0\sin 42^0\sin 66^0\sin 78^0$

Hướng dẫn giải

a) $A = \left(\cos 73^0+\cos 47^0\right)^2 - \cos 73^0\cos 47^0 = \left(2\cos 60^0\cos 18^0\right)^2 - \dfrac{1}{2}\left(\cos 120^0+\cos 36^0\right)$

$= \dfrac{1+\cos 36^0}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{\cos 36^0}{2} = \dfrac{3}{4}$

b) $B = \sin 6^0\cos 48^0\cos 24^0\cos 12^0 = \dfrac{\sin 12^0}{2\cos 6^0}.\dfrac{\sin 24^0}{2\sin 12^0}.\dfrac{\sin 48^0}{2\sin 24^0}.\dfrac{\sin 96^0}{2\cos 48^0} = \dfrac{1}{16}$

Bài 6.22: Tính $A = \left(1+\tan 1^0\right)\left(1+\tan 2^0\right)...\left(1+\tan 45^0\right)$

Hướng dẫn giải

$$1+\tan k^0 = \frac{\sqrt{2}\cos\left(45^0-k^0\right)}{\cos k^0} \Rightarrow \left(1+\tan k^0\right)\left(1+\tan\left(45^0-k^0\right)\right) = 2$$

Do đó $A = 2^{23}$

Bài 6.23: Tính $A=\cos\alpha\cos2\alpha\cos3\alpha...\cos999\alpha$ với $\alpha=\dfrac{2\pi}{1999}$

Hướng dẫn giải

Đặt $B=\sin\alpha\sin2\alpha\sin3\alpha...\sin999\alpha$ khi đó

$2^{999}A.B=\sin2\alpha\sin4\alpha...\sin1998\alpha$

$=(\sin2\alpha\sin4\alpha...\sin998\alpha).[-\sin(2\pi-1002\alpha)]...[-\sin(2\pi-1998\alpha)]=B$

Suy ra $A=\dfrac{1}{2^{999}}$.

DẠNG TOÁN 2: *XÁC ĐỊNH GIÁ TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC CÓ ĐIỀU KIỆN.*

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Cho $\cos2x=-\dfrac{4}{5}$, với $\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$.

Tính $\sin x,\cos x,\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right),\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Vì $\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{\pi}{2}$ nên $\sin x>0,\ \cos x>0$.

Áp dụng công thức hạ bậc, ta có :

$$\sin^2x=\frac{1-\cos2x}{2}=\frac{9}{10}\Rightarrow\sin x=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\cos^2x=\frac{1+\cos2x}{2}=\frac{1}{10}\Rightarrow\cos x=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

Theo công thức cộng, ta có

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3}{\sqrt{10}}.\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{10}}.\frac{\sqrt3}{2}=\frac{3+\sqrt3}{2\sqrt{10}}$$

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos2x\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\sin2x=-\frac{4}{5}.\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}.2.\frac{3}{\sqrt{10}}.\frac{1}{\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt2}{10}$$

Ví dụ 2: Cho $\dfrac{1}{\tan^2\alpha}+\dfrac{1}{\cot^2\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=7$. Tính $\cos4\alpha$.

Lời giải

Ta có $\dfrac{1}{\tan^2\alpha}+\dfrac{1}{\cot^2\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=7$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin^2\alpha+1}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha+1}{\sin^2\alpha}=7$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin^2\alpha\left(\sin^2\alpha+1\right)+\cos^2\alpha\left(\cos^2\alpha+1\right)}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=7$$

$$\Leftrightarrow\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+1=7\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+1=7\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow2=9\sin^2\alpha\cos^2\alpha\Leftrightarrow8=9(2\sin\alpha\cos\alpha)^2$$

$$\Leftrightarrow8=9\sin^22\alpha\Leftrightarrow16=9(1-\cos4\alpha)\Leftrightarrow\cos4\alpha=-\frac{7}{9}$$

Vậy $\cos4\alpha=-\dfrac{7}{9}$

Ví dụ 3: Cho $\sin\alpha+\cos\alpha=\cot\dfrac{\alpha}{2}$ với $0<\alpha<\pi$. Tính $\tan\left(\dfrac{\alpha+2013\pi}{2}\right)$.

Lời giải

Ta có $\sin\alpha=2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}.\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{\tan^2\frac{\alpha}{2}+1}$

$$\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right)=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{\tan^2\frac{\alpha}{2}+1}$$

Do đó $\sin\alpha+\cos\alpha=\cot\dfrac{\alpha}{2}\Leftrightarrow\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{\tan^2\frac{\alpha}{2}+1}+\dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{\tan^2\frac{\alpha}{2}+1}=\dfrac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}}$

$$\Leftrightarrow\tan\frac{\alpha}{2}\left(1+2\tan\frac{\alpha}{2}-\tan^2\frac{\alpha}{2}\right)=1+\tan^2\frac{\alpha}{2}\Leftrightarrow\tan^3\frac{\alpha}{2}-\tan^2\frac{\alpha}{2}-\tan\frac{\alpha}{2}+1=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\tan\frac{\alpha}{2}-1\right)^2\left(\tan\frac{\alpha}{2}+1\right)=0\Leftrightarrow\tan\frac{\alpha}{2}=\pm1$$

Vì $0<\alpha<\pi\Rightarrow0<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ do đó $\tan\dfrac{\alpha}{2}>0$ nên $\tan\dfrac{\alpha}{2}=1\Rightarrow\cot\dfrac{\alpha}{2}=1$

Ta có $\tan\left(\dfrac{\alpha+2013\pi}{2}\right)=\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}+2006\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\cot\dfrac{\alpha}{2}=-1$

Vậy $\tan\left(\dfrac{\alpha+2013\pi}{2}\right)=-1$

Lưu ý: Ta có thể biểu diễn $\sin\alpha,\cos\alpha,\tan\alpha,\cot\alpha$ qua $t=\tan\dfrac{\alpha}{2}$ như sau:

$\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2},\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2},\tan\alpha=\frac{2t}{1-t^2},\cot\alpha=\frac{1-t^2}{2t}$ với α làm các biểu thức có nghĩa.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 6.24: Cho $\cos2x=\frac{3}{5}$ (với $\frac{3\pi}{4}<x<\pi$). Tính $\sin x$, $\cos x$, $\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

Hướng dẫn giải

Vì $\frac{3\pi}{4}<x<\pi$ nên $\sin x>0$, $\cos x<0$.

Áp dụng công thức hạ bậc, ta có :

$\sin^2x=\frac{1-\cos2x}{2}=\frac{1}{5}\Rightarrow\sin x=\frac{1}{\sqrt5}$; $\cos^2x=\frac{1+\cos2x}{2}=\frac{4}{5}\Rightarrow\cos x=-\frac{2}{\sqrt5}$

Bài 6.25: Cho $2\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos(\pi+\beta)$.

Tính $A=\frac{1}{2\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha}+\frac{1}{2\sin^2\beta+3\cos^2\beta}$.

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta có $2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=-\cos\alpha\cos\beta\Rightarrow\tan\beta=\frac{3}{2\tan\alpha}$.

Khi đó ta có: $A=\frac{1+\tan^2\alpha}{2\tan^2\alpha+3}+\frac{1+\tan^2\beta}{2\tan^2\beta+3}=\frac{1+\tan^2\alpha}{2\tan^2\alpha+3}+\frac{1+\frac{9}{4\tan^2\alpha}}{2\frac{9}{4\tan^2\alpha}+3}$

$$A=\frac{1+\tan^2\alpha}{2\tan^2\alpha+3}+\frac{4\tan^2\alpha+9}{6\left(2\tan^2\alpha+3\right)}=\frac{10\tan^2\alpha+15}{6\left(2\tan^2\alpha+3\right)}=\frac{5}{6}$$

Bài 6.26: a) Cho $\tan\alpha=\frac{m}{n}$. Tính $A=m\sin2\alpha+n\cos2\alpha$.

b) Cho $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{m}{n}$. Tính $B=\tan\alpha.\tan\beta$.

c) Cho $\tan(\alpha+\beta)=m$ và $\tan(\alpha-\beta)=n$. Tính $\tan2\alpha$.

Hướng dẫn giải

a) $A=m\sin2\alpha+n\cos2\alpha=m\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}+n\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

b) Áp dụng công thức cộng ta có

$\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}=\frac{m}{n}\Leftrightarrow\frac{1-\tan\alpha\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{m}{n}\Leftrightarrow\tan\alpha\tan\beta=\frac{n-m}{m+n}$

c) $\tan2\alpha=\tan[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta)}=\frac{m+n}{1-mn}$

Bài 6.27: Cho $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt7}{2}$ và $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$. Tính $\tan\frac{2\alpha+2015\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t=\tan\frac{\alpha}{2}$ ta có $\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2},\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ từ giả thiết ta có

$$\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{\sqrt7}{2}\Leftrightarrow\left(\sqrt7+2\right)t^2-4t+\sqrt7-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{\sqrt7-2}{3}\\t=\sqrt7-2\end{array}\right.$$

Do $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ nên $t=\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt7-2}{3}$.

Ta có $\tan\frac{2\alpha+2015\pi}{4}=\tan\left(\frac{\alpha}{2}+504\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\frac{\tan\frac{\alpha}{2}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{\sqrt7-2}{3}-1}{1+\frac{\sqrt7-2}{3}}=\frac{\sqrt7-5}{\sqrt7+1}$$

DẠNG TOÁN 3: *CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC, ĐƠN GIẢN BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC VÀ CHỨNG MINH BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC KHÔNG PHỤ THUỘC VÀO BIẾN.*

Phương pháp giải.

Để chứng minh đẳng thức lượng giác ta có các cách biến đổi: vế này thành vế kia, biến đổi tương đương, biến đổi hai vế cùng bằng một đại lượng trung gian. Trong quá trình biến đổi ta cần sử dụng linh hoạt các công thức lượng giác.

Lưu ý: Khi biến đổi cần phải *hướng đích* , chẳng hạn biến đổi vế phải, ta cần xem vế trái có đại lượng nào để từ đó liên tưởng đến kiến thức đã có để làm sao xuất hiện các đại lượng ở vế trái. Và ta thường biến đổi vế phức tạp về vế đơn giản hơn.

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với mọi góc lượng giác α làm cho biểu thức xác định thì

a) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos4\alpha$ b) $\frac{1-\sin2\alpha}{1+\sin2\alpha}=\cot^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$

Lời giải

a) Ta có

$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$

$=\left(\sin^2\alpha\right)^3+\left(\cos^2\alpha\right)^3+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)$

$=\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^3-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$=1-\frac{3}{4}(2\sin\alpha\cos\alpha)^2=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha=1-\frac{3}{8}(1-\cos 4\alpha)$

$=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4\alpha$

b) Ta có $\frac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$

$=\frac{\left[\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2}{\left[\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2}=\frac{2\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{2\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=\cot^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$

Ví dụ 2: Cho $0<\alpha<\pi,\alpha\neq\frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng:

a) $\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}=2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

b) $\frac{\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{1+\cos\alpha}-\sqrt{1-\cos\alpha}}=\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

Lời giải

a) Do $0<\alpha<\pi$ nên $\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)>0,\sin\alpha>0$

Đẳng thức tương đương với

$\left(\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}\right)^2=4\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow 2+2\sqrt{1+\cos\alpha}\sqrt{1-\cos\alpha}=2\left[1-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right]$

$\Leftrightarrow\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sin\alpha$

$\Leftrightarrow 1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha\Leftrightarrow\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ (luôn đúng) $\Rightarrow$ ĐPCM.

b) $VT=\frac{\left(\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}\right)^2}{\left(\sqrt{1+\cos\alpha}-\sqrt{1-\cos\alpha}\right)\left(\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}\right)}$

$=\frac{2+2\sqrt{1+\cos\alpha}.\sqrt{1-\cos\alpha}}{2\cos\alpha}=\frac{1+\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}=\frac{1+|\sin\alpha|}{\cos\alpha}$

Vì $0<\alpha<\pi$ nên $\sin\alpha>0$ do đó

$VT=\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}$

$=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=\tan\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=VP\Rightarrow$ ĐPCM.

Ví dụ 3: Chứng minh rằng

a) $\sin(\alpha+\beta).\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$

b) $\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}=2$ với $\sin\alpha+\sin\beta=3\sin(\alpha+\beta),\alpha+b\neq k2\pi$

Lời giải

a) Ta có $\sin(\alpha+\beta).\sin(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}[\cos 2\alpha-\cos 2\beta]$

$=-\frac{1}{2}\left[\left(1-2\sin^2\alpha\right)-\left(1-2\sin^2\beta\right)\right]=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$

b) Từ giả thiết ta có $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=6\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

Do $\alpha+\beta\neq k2\pi\Rightarrow\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\neq 0$ suy ra $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=3\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\Leftrightarrow\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=3\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\Leftrightarrow\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}=2\Rightarrow$ ĐPCM

Ví dụ 4: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x.

a) $A=\cos^2\alpha+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)$

b) $B=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right).\cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{4}\right)$

Lời giải

a) Ta có: $A=\cos^2\alpha+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)=$

$=\frac{1}{2}\left[3+\cos 2\alpha+\cos\left(\frac{4\pi}{3}+2\alpha\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{3}-2\alpha\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left[3+\cos 2\alpha+2\cos\frac{4\pi}{3}\cos 2\alpha\right]=\frac{3}{2}$

b) Vì $\alpha+\frac{\pi}{6}=\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$

và $\cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{4}\right)=-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ nên

$B=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right).\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$

$=\cos\left[\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)-\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right]=\cos\left(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$

$=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

Ví dụ 5: Chứng minh rằng

a) $\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=4\sin\alpha.\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right).\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$

b) $\sin^3\frac{\alpha}{3}+3\sin^3\frac{\alpha}{3^2}+...+3^{n-1}\sin^3\frac{\alpha}{3^n}=\frac{1}{4}\left(3^n\sin\frac{\alpha}{3^n}-\sin\alpha\right).$

Lời giải

a) Ta có $\sin3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin2\alpha\cos\alpha+\cos2\alpha\sin\alpha$

$=2\sin\alpha\cos^2\alpha+\cos2\alpha\sin\alpha$

$=2\sin\alpha\left(1-\sin^2\alpha\right)+\left(1-2\sin^2\alpha\right)\sin\alpha$

$=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ (1)

Mặt khác $4\sin\alpha.\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right).\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=-4\sin\alpha.\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}-\cos(-2\alpha)\right)$

$=-2\sin\alpha.\left(-\frac{1}{2}-\cos2\alpha\right)=2\sin\alpha\left(\frac{1}{2}+1-2\sin^2\alpha\right)$

$=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ĐPCM

b) Theo câu a) ta có $\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\Rightarrow\sin^3\alpha=\frac{3\sin\alpha-\sin3\alpha}{4}$

Do đó

$\sin^3\frac{\alpha}{3}=\frac{3\sin\frac{\alpha}{3}-\sin\alpha}{4},\ \sin^3\frac{\alpha}{3^2}=\frac{3\sin\frac{\alpha}{3^2}-\sin\frac{\alpha}{3}}{4},\ ...,\sin^3\frac{\alpha}{3^n}=\frac{3\sin\frac{\alpha}{3^n}-\sin\frac{\alpha}{3^{n-1}}}{4}$

Suy ra $VT=\frac{3\sin\frac{\alpha}{3}-\sin\alpha}{4}+3\frac{3\sin\frac{\alpha}{3^2}-\sin\frac{\alpha}{3}}{4}+...+3^{n-1}\frac{3\sin\frac{\alpha}{3^n}-\sin\frac{\alpha}{3^{n-1}}}{4}$

$=-\frac{\sin\alpha}{4}+3^{n-1}\frac{3\sin\frac{\alpha}{3^n}}{4}=\frac{1}{4}\left(3^n\sin\frac{\alpha}{3^n}-\sin\alpha\right)=VP\Rightarrow$ ĐPCM.

Lưu ý: Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$, $\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$, hai công thức này được gọi là công thức nhân ba

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 6.24: Chứng minh rằng

a) $\sin^4\alpha=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos2\alpha+\frac{1}{8}\cos4\alpha$ b) $\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{7\pi}{16}=\frac{3}{2}$

Hướng dẫn giải

a) $\sin^4\alpha=\left(\frac{1-\cos2\alpha}{2}\right)^2=\frac{1-2\cos2\alpha+\cos^2 2\alpha}{4}=\frac{1-2\cos2\alpha+\frac{1+\cos4\alpha}{2}}{4}$

$=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos2\alpha+\frac{1}{8}\cos4\alpha$

b) Theo câu a ta có:

$VT=4.\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}\right)+\frac{1}{8}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{4}+\cos\frac{7\pi}{4}\right)$

Mà $\cos\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{5\pi}{8}=\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{7\pi}{8}=\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}=\cos\frac{5\pi}{4}+\cos\frac{7\pi}{4}=0$

nên $VT=\frac{3}{2}=VP$

Bài 6.25: Cho $\sin x=2\sin(x+y),x+y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$.

Chứng minh $\tan(x+y)=\frac{\sin y}{\cos y-2}$.

Hướng dẫn giải

$\sin x=\sin\left[(x+y)-y\right]=\sin(x+y)\cos y-\cos(x+y)\sin y$

$\Rightarrow\sin(x+y)\cos y-\cos(x+y)\sin y=2\sin(x+y)$

$\Rightarrow(\cos y-2)\sin(x+y)=\cos(x+y)\sin y\Rightarrow\tan(x+y)=\frac{\sin y}{\cos y-2}$

Bài 6.26: Chứng minh các hệ thức sau:

a) $\tan x+\tan y=\frac{2\sin(x+y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}$ b) $\tan x.\tan3x=\frac{\tan^2 2x-\tan^2 x}{1-\tan^2 2x.\tan^2 x}$

Hướng dẫn giải

a) $VP=\frac{2(\sin x\cos y+\sin y\cos x)}{2\cos x\cos y}=\tan x+\tan y=VT$

b) $VP=\frac{(\tan2x+\tan x)(\tan2x-\tan x)}{(1-\tan2x.\tan x)(1+\tan2x.\tan x)}=\tan(2x+x)\tan(2x-x)=VT$

Bài 6.27: Đơn giản biểu thức sau:

a) $A=\dfrac{\cos a-\cos 3a+\cos 5a-\cos 7a}{\sin a+\sin 3a+\sin 5a+\sin 7a}$ b) $B=\cos a-\dfrac{\cos\left(2a-\dfrac{\pi}{6}\right)-\cos\left(2a+\dfrac{\pi}{6}\right)}{2\cos a}$

Hướng dẫn giải

a) $A=\dfrac{-2\sin 4a\sin(-3a)-2\sin 4a\sin 2a}{2\sin 4a\cos 3a+2\sin 4a\cos 2a}=\dfrac{\sin 3a-\sin 2a}{\cos 3a-\cos 2a}=\dfrac{2\cos\dfrac{5a}{2}\sin\dfrac{a}{2}}{-2\sin\dfrac{5a}{2}\sin\dfrac{a}{2}}=-\cot\dfrac{5a}{2}$

b) $B=\dfrac{2\cos^2 a-2\sin 2a\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)}{2\cos a}=\dfrac{2\cos^2 a+4\sin a\cos a}{2\cos a}=\cos a+2\sin a$

Bài 6.28: Chứng minh các hệ thức sau:

a) Nếu $2\tan a=\tan(a+b)$ thì $\sin b=\sin a.\cos(a+b)$

b) Nếu $2\tan a=\tan(a+b)$ thì $3\sin b=\sin(2a+b)$

c) Nếu $\tan(a+b).\tan b=-3$ thì $\cos(a+2b)+2\cos a=0$

Hướng dẫn giải

a) $2\tan a=\tan(a+b)\Rightarrow \tan a=\tan(a+b)-\tan a$

$\Rightarrow \tan a=\dfrac{\sin b}{\cos(a+b)\cos a}\Rightarrow \sin a\cos(a+b)=\sin b$

b) $2\tan a=\tan(a+b)\Rightarrow 3\tan a=\tan(a+b)+\tan a=\dfrac{\sin(2a+b)}{\cos(a+b)\cos a}$

$\Rightarrow 3\sin a\cos(a+b)=\sin(2a+b)$

Theo câu a) ta có $\sin b=\sin a.\cos(a+b)$ suy ra $3\sin b=\sin(2a+b)$

c) $\tan(a+b).\tan b=-3\Rightarrow \sin(a+b)\sin b=-3\cos(a+b)\cos b$

$\Rightarrow \cos(a+b)\cos b+\sin(a+b)\sin b=-2\cos(a+b)\cos b$

$\Rightarrow \cos a=-\left[\cos(2a+b)+\cos a\right]\Rightarrow \cos(a+2b)+2\cos a=0$

Bài 6.29: Chứng minh rằng $\sin\dfrac{\pi}{9}\sin\dfrac{2\pi}{9}\sin\dfrac{4\pi}{9}=\cos\dfrac{\pi}{18}\cos\dfrac{5\pi}{18}\cos\dfrac{7\pi}{18}=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

Hướng dẫn giải

Ta có $\sin 3\alpha=4\sin\alpha.\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right).\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)$,

$\cos 3\alpha=4\cos\alpha.\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right).\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)$

Suy ra $\sin\dfrac{\pi}{9}\sin\dfrac{2\pi}{9}\sin\dfrac{4\pi}{9}=\dfrac{1}{4}\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$;

$\cos\dfrac{\pi}{18}\cos\dfrac{5\pi}{18}\cos\dfrac{7\pi}{18}=\dfrac{1}{4}\cos 3.\dfrac{\pi}{18}=\dfrac{1}{4}\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

Bài 6.30: Chứng minh rằng

a) $\cos x=\dfrac{\sin 2x}{2\sin x}$. b) $\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\ldots\cos\dfrac{x}{2^n}=\dfrac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}$.

Hướng dẫn giải

a) Ta có $\sin 2x=2\sin x\cos x\Rightarrow \cos x=\dfrac{\sin 2x}{2\sin x}$

b) Áp dụng câu a ta có

$$VT=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\ldots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2\sin\dfrac{x}{2}}.\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{2\sin\dfrac{x}{2^2}}.\frac{\sin\dfrac{x}{2^2}}{2\sin\dfrac{x}{2^3}}\ldots\frac{\sin\dfrac{x}{2^{n-1}}}{2\sin\dfrac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{2^n\sin\dfrac{x}{2^n}}=VP$$

Bài 6.31: Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{1}{\sin x}=\cot\dfrac{x}{2}-\cot x$.

b) $\dfrac{1}{\sin\alpha}+\dfrac{1}{\sin 2\alpha}+\ldots+\dfrac{1}{\sin 2^{n-1}\alpha}=\cot\dfrac{\alpha}{2}-\cot 2^{n-1}\alpha\ (2^{n-1}\alpha\neq k\pi)$

Hướng dẫn giải

a) $VP=\cot\dfrac{x}{2}-\cot x=\dfrac{\cos\dfrac{x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}-\dfrac{\cos x}{\sin x}=\dfrac{\sin x\cos\dfrac{x}{2}-\cos x\sin\dfrac{x}{2}}{\sin x\sin\dfrac{x}{2}}=\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\sin x\sin\dfrac{x}{2}}=\dfrac{1}{\sin x}$

$=VP$

b) Áp dụng câu a ta có

$$VT=\left(\cot\frac{\alpha}{2}-\cot\alpha\right)+(\cot\alpha-\cot 2\alpha)+\ldots+\left(\cot 2^{n-2}\alpha-\cot 2^{n-1}\alpha\right)$$

$$=\cot\frac{\alpha}{2}-\cot 2^{n-1}\alpha=VP$$

Bài 6.32: Chứng minh rằng

a) $\tan x=\cot x-2\cot 2x$

b) $\dfrac{1}{2}.\tan\dfrac{a}{2}+\dfrac{1}{2^2}.\tan\dfrac{a}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}.\tan\dfrac{a}{2^n}=\dfrac{1}{2^n}.\cot\dfrac{a}{2^n}-\cot a$

Hướng dẫn giải

a) $VP=\dfrac{\cos x}{\sin x}-2\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}=\dfrac{\cos^2 x-\cos 2x}{\sin x\cos x}=\dfrac{\cos^2 x-2\cos^2 x+1}{\sin x\cos x}=\dfrac{\sin^2 x}{\sin x\cos x}=\tan x$

$=VT$

b) Áp dụng câu a) ta có

$$VT=\frac{1}{2}\left(\cot\frac{a}{2}-2\cot a\right)+\frac{1}{2^2}\left(\cot\frac{a}{2^2}-2\cot\frac{a}{2}\right)+\ldots+\frac{1}{2^n}\left(\cot\frac{a}{2^n}-2\cot\frac{a}{2^{n-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2^n}.\cot\frac{a}{2^n}-\cot a=VP$$

Bài 6.33: Chứng minh rằng nếu $x \neq \frac{k\pi}{6}, k \in Z$ thì

$$\frac{\tan 3x}{\tan x} = \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

Áp dụng tính $A = \tan 6^\circ \tan 54^\circ \tan 66^\circ$.

Hướng dẫn giải

$$\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x} = \tan x.\frac{\left(\sqrt{3} - \tan x\right)\left(\sqrt{3} + \tan x\right)}{\left(1 - \sqrt{3}\tan x\right)\left(1 + \sqrt{3}\tan x\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - \tan x}{1 + \sqrt{3}\tan x}.\tan x.\frac{\sqrt{3} + \tan x}{1 - \sqrt{3}\tan x} = \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right).\tan x.\tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

$$A = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$$

Bài 6.34: Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sin 1^0 \sin 2^0} + \frac{1}{\sin 2^0 \sin 3^0} + \ldots + \frac{1}{\sin(n-1)^0 \sin n^0} = \cot 1^0 - \cot n^0$$

Hướng dẫn giải

Ta có $\sin 1^0 = \sin\left[(k+1)^0 - k^0\right] = \sin(k+1)^0 \cos k^0 - \cos(k+1)^0 \sin k^0$

$$\frac{\sin 1^0}{\sin k^0 \sin(k+1)^0} = \cot k^0 - \cot(k+1)^0$$

Do đó $\frac{\sin 1^0}{\sin 1^0 \sin 2^0} + \frac{\sin 1^0}{\sin 2^0 \sin 3^0} + \ldots + \frac{\sin 1^0}{\sin(n-1)^0 \sin n^0}$

$$= \cot 1^0 - \cot 2^0 + \cot 2^0 - \cot 3^0 + \ldots + \cot(n-1)^0 - \cot n^0$$

Suy ra $\frac{1}{\sin 1^0 \sin 2^0} + \frac{1}{\sin 2^0 \sin 3^0} + \ldots + \frac{1}{\sin(n-1)^0 \sin n^0} = \cot 1^0 - \cot n^0$

Bài 6.35: Chứng minh rằng $2\sin 2^0 + 4\sin 4^0 + \ldots + 178\sin 178^0 = 90\cot 1^0$

Hướng dẫn giải

$$2\sin 2^0.\sin 1^0 + 2\left(2\sin 4^0.\sin 1^0\right) + \ldots + 89\left(2\sin 178^0.\sin 1^0\right) = 90\cos 1^0$$

Vì $2\sin 2k^0 \sin 1^0 = \cos(2k-1)^0 - \cos(2k+1)$ nên

$$VT = \cos 1^0 - \cos 3^0 + 2\left(\cos 3^0 - \cos 5^0\right) + \ldots + 89\left(\cos 177^0 - \cos 179^0\right)$$

$$= \cos 1^0 + \cos 3^0 + \ldots + \cos 177^0 - 89\cos 179^0$$

$$= \cos 1^0 + \left(\cos 3^0 + \cos 177^0\right) + \ldots + \left(\cos 89^0 + \cos 91^0\right) + 89\cos 1^0$$

$$= 90\cot 1^0 = VP$$

DẠNG TOÁN 4: *BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC VÀ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC.*

Phương pháp giải.

- Sử dụng phương pháp chứng minh đại số quen biết.
- Sử dụng các tính chất về dấu của giá trị lượng giác một góc.
- Sử dụng kết quả $|\sin\alpha| \leq 1, |\cos\alpha| \leq 1$ với mọi số thực α

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Chứng minh rằng với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ thì

a) $2\cot^2\alpha \geq 1 + \cos 2\alpha$ b) $\cot\alpha \geq 1 + \cot 2\alpha$

Lời giải

a) Bất đẳng thức tương đương với

$$2\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1\right) \geq 2\cos^2\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2\alpha} - 1 \geq 1 - \sin^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2\alpha} + \sin^2\alpha \geq 2 \Leftrightarrow \sin^4\alpha - 2\sin^2\alpha + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin^2\alpha - 1\right)^2 \geq 0 \text{ (đúng) ĐPCM.}$$

b) Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \geq \frac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \Leftrightarrow \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \geq \frac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} \quad (*)$$

Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases}\sin\alpha > 0\\ \cos\alpha > 0\end{cases}$ nên

$(*) \Leftrightarrow 2\cos^2\alpha \geq \sin 2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \Leftrightarrow 1 \geq \sin 2\alpha$ (đúng) ĐPCM.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng với $0 \leq \alpha \leq \pi$ thì

$$(2\cos 2\alpha - 1)^2 - 4\sin^2\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) > \left(\sqrt{2\sin\alpha} - 2\right)(3 - 2\cos 2\alpha).$$

Lời giải

Bất đẳng thức tương đương với

$$\Leftrightarrow (2\cos 2\alpha - 1)^2 - 2\left[1 - \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)\right] + 2(3 - 2\cos 2\alpha) > \sqrt{2\sin\alpha}\left[3 - 2\left(1 - 2\sin^2\alpha\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 2\alpha - 8\cos 2\alpha + 5 + 2\sin\alpha > \sqrt{2\sin\alpha}\left(4\sin^2\alpha + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow 4(1 - \cos 2\alpha)^2 + 1 + 2\sin\alpha > \sqrt{2\sin\alpha}\left(4\sin^2\alpha + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow 16\sin^4\alpha + 2\sin\alpha + 1 > \sqrt{2\sin\alpha}\left(4\sin^2\alpha + 1\right)$$

Đặt $\sqrt{2\sin\alpha} = t$, vì $0 \leq \alpha \leq \pi \Rightarrow 0 \leq t \leq \sqrt{2}$.

Bất đẳng thức trở thành $t^8+t^2+1>t\left(t^4+1\right)\Leftrightarrow t^8-t^5+t^2-t+1>0$ (*)

+ Nếu $0\le t<1$: (*) $\Leftrightarrow t^8+t^2\left(1-t^3\right)+1-t>0$ đúng vì $1-t>0, 1-t^3>0, t^2\ge 0$ và $t^8\ge 0$.

+ Nếu $1\le t\le\sqrt{2}$: (*) $\Leftrightarrow t^5\left(t^3-1\right)+t(t-1)+1>0$ đúng vì $t^5\left(t^3-1\right)\ge 0, t(t-1)\ge 0$.

Vậy bất đẳng thức (*) đúng suy ra ĐPCM.

Ví dụ 3: Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức sau:

a) $A=\sin x+\cos x$ b) $B=\sin^4 x+\cos^4 x$

Lời giải

a) Ta có $A^2=(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=1+\sin 2x$

Vì $\sin 2x\le 1$ nên $A^2=1+\sin 2x\le 1+1=2$ suy ra $-\sqrt{2}\le A\le\sqrt{2}$.

Khi $x=\frac{\pi}{4}$ thì $A=\sqrt{2}$, $x=-\frac{3\pi}{4}$ thì $A=-\sqrt{2}$

Do đó $\max A=\sqrt{2}$ và $\min A=-\sqrt{2}$.

b) Ta có

$$B=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}+\frac{1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}$$

$$=\frac{2+2\cos^2 2x}{4}=\frac{2+1+\cos 4x}{4}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}.\cos 4x$$

Vì $-1\le\cos 4x\le 1$ nên $\frac{1}{2}\le\frac{3}{4}+\frac{1}{4}.\cos 4x\le 1$ suy ra $\frac{1}{2}\le B\le 1$.

Vậy $\max B=1$ khi $\cos 4x=1$ và $\min B=\frac{1}{2}$ khi $\cos 4x=-1$.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 6.36: Cho $0<x<\frac{\pi}{2}$. Chứng minh rằng $\tan x+\cot x\ge 2$

Hướng dẫn giải

$$0<x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\begin{cases}\tan x>0\\ \cot x>0\end{cases}$$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có $\tan x+\cot x\ge 2\sqrt{\tan x.\cot x}=2$.

Bài 6.37: Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức $B=\cos 2x+\sqrt{1+2\sin^2 x}$

Hướng dẫn giải

Ta có $B=\cos 2x+\sqrt{1+1-\cos 2x}=\cos 2x+\sqrt{2-\cos 2x}$

Đặt $t=\sqrt{2-\cos 2x}\Rightarrow\cos 2x=2-t^2$, vì $-1\le\cos 2x\le 1\Rightarrow 1\le t\le\sqrt{3}$

Biểu thức trở thành $B=2-t^2+t$.

Xét hàm số $y=-t^2+t+2$ với $1\le t\le\sqrt{3}$.

Bảng biến thiên

t	1		$\sqrt{3}$
y	2	↘	$\sqrt{3}-1$

Từ bảng biến thiên suy ra $\max B=2$ khi $t=1$ hay $\cos 2x=1$.

$\min A=\sqrt{3}-1$ khi $t=\sqrt{3}$ hay $\cos 2x=-1$.

Bài 6.38: Chứng minh rằng $\cos x(\sin x+\sqrt{\sin^2 x+2})\le\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Ta có:

$$\sqrt{3}P=\sqrt{3}\sin x.\cos x+\sqrt{3}\cos x.\sqrt{\sin^2 x+2}\le\frac{3\sin^2 x+\cos^2 x}{2}+\frac{3\cos^2 x+\sin^2 x+2}{2}=3$$

Vậy: $P\le\sqrt{3}$

Bài 6.39: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2\sin x+\sin 2x$.

Hướng dẫn giải

Ta có $P=2\sin x+2\sin x\cos x=2\sin x(1+\cos x)$

Suy ra $P^2=4\sin^2 x(1+\cos x)^2=\sin^2 x\left(1+2\cos x+\cos^2 x\right)$

Ta có $\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0\Rightarrow\cos^2 x+\frac{1}{4}\ge\cos x$ suy ra

$$P\le\sin^2 x\left(1+2\cos^2 x+\frac{1}{2}+\cos^2 x\right)=\sin^2 x\left(\frac{3}{2}+3\cos^2 x\right)$$

Mặt khác theo bất đẳng thức $xy\le\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$, $\forall x,y\in R$ ta có

$$\sin^2 x\left(\frac{5}{4}+3\cos^2 x\right)=\frac{1}{3}.3\sin^2 x\left(\frac{3}{2}+3\cos^2 x\right)\le\frac{1}{3}.\left[\frac{3\sin^2 x+\left(\frac{3}{2}+3\cos^2 x\right)}{2}\right]^2=\frac{27}{16}$$

Suy ra $P\le\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Bài 6.40: Cho tam giác ABC.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sin\frac{A}{2}\sqrt{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}=-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A+C}{2}-\cos\frac{A-C}{2}\right)=\frac{1}{2}\cos\frac{A-C}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{A+C}{2}$

Vì $\cos\frac{A+C}{2}=\sin\frac{B}{2}$ và $\cos\frac{A-C}{2}\le 1$ nên $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\le\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{B}{2}$

Do đó $P\le\frac{1}{2}\left(1-\sin\frac{B}{2}\right).\sqrt{\sin\frac{B}{2}}$

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có

$$\left(1-\sin\frac{B}{2}\right).\sqrt{\sin\frac{B}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(1-\sin\frac{B}{2}\right)\left(1-\sin\frac{B}{2}\right)2\sin\frac{B}{2}}$$

$$\le\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{1-\sin\frac{B}{2}+1-\sin\frac{B}{2}+2\sin\frac{B}{2}}{3}\right)^3}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{8}{27}}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

Suy ra $P\le\frac{1}{2}.\frac{2\sqrt{3}}{9}=\frac{\sqrt{3}}{9}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}\cos\frac{A-C}{2}=1\\ 1-\sin\frac{B}{2}=2\sin\frac{B}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=C\\ \sin\frac{B}{2}=\frac{1}{3}\end{cases}$.

Vậy $\max P=\frac{\sqrt{3}}{9}$.

DẠNG TOÁN 5: *CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC.*

1. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

a) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

b) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2(1+\cos A\cos B\cos C)$

c) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$

Lời giải

a) $VT=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

Mặt khác trong tam giác ABC ta có $A+B+C=\pi\Rightarrow\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$

Suy ra $\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}$, $\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A+B}{2}$

Vậy

$$VT=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2}=2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$=4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=VP\Rightarrow \text{ĐPCM.}$$

b) $VT=\frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}+1-\cos^2 C=2-\frac{\cos 2A+\cos 2B}{2}-\cos^2 C$

$=2-\cos(A+B)\cos(A-B)-\cos^2 C$

Vì $A+B+C=\pi\Rightarrow\cos(A+B)=-\cos C$ nên

$VT=2+\cos C\cos(A-B)+\cos C\cos(A+B)=2+\cos C[\cos(A-B)+\cos(A+B)]$

$=2+\cos C.2\cos A\cos B=2(1+\cos A\cos B\cos C)=VP\Rightarrow$ ĐPCM.

c) $VT=2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C$

Vì $A+B+C=\pi\Rightarrow\cos C=-\cos(A+B)$, $\sin(A+B)=\sin C$ nên

$VT=2\sin C\cos(A-B)-2\sin C\cos(A+B)=2\sin C[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$

$=2\sin C.[-2\sin A\sin(-B)]=4\sin A\sin B\sin C=VP\Rightarrow$ ĐPCM.

Ví dụ 2: Chứng minh trong mọi tam giác ABC không vuông ta đều có:

a) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$

b) $\cot A.\cot B+\cot B.\cot C+\cot C.\cot A=1$

Lời giải

a) Đẳng thức tương đương với $\tan A+\tan B=\tan A.\tan B.\tan C-\tan C$

$\Leftrightarrow\tan A+\tan B=\tan C(\tan A\tan B-1)$ (*)

Do tam giác ABC không vuông nên $A+B\ne\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow\tan A\tan B-1=\frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}-1=\frac{\sin A\sin B-\cos A\cos B}{\cos A\cos B}=-\frac{\cos(A+B)}{\cos A\cos B}\ne 0$$

Suy ra

$$(*)\Leftrightarrow\frac{\tan A+\tan B}{\tan A\tan B-1}=\tan C\Leftrightarrow\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C\Leftrightarrow\tan(A+B)=-\tan C$$

Đẳng thức cuối đúng vì $A+B+C=\pi\Rightarrow$ ĐPCM.

b) Vì $A+B+C=\pi\Rightarrow\cot(A+B)=-\cot C$

Theo công thức cộng ta có:

$$\cot(A+B)=\frac{1}{\tan(A+B)}=\frac{1-\tan A\tan B}{\tan A+\tan B}=\frac{1-\frac{1}{\cot A\cot B}}{\frac{1}{\cot A}+\frac{1}{\cot B}}=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}$$

Suy ra $\frac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}=-\cot C\Rightarrow \cot A\cot B-1=-\cot C(\cot A+\cot B)$

Hay $\cot A.\cot B+\cot B.\cot C+\cot C.\cot A=1$ ĐPCM.

Ví dụ 3: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

a) $\sin A+\sin B+\sin C\le \cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}$

b) $\cos A\cos B\cos C\le \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

c) $\tan A+\tan B+\tan C\ge \cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}$ Với tam giác ABC không vuông.

Lời giải

a) Vì $\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}>0$ và $\cos\frac{A-B}{2}\le 1$

nên $\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\le 2\cos\frac{C}{2}$

Hoàn toàn tương tự ta có $\sin B+\sin C\le 2\cos\frac{A}{2}$, $\sin C+\sin A\le 2\cos\frac{B}{2}$

Công vế với vế các bất đẳng thức trên và rút gọn ta được

$\sin A+\sin B+\sin C\le \cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}$. ĐPCM.

b) + TH1: Nếu tam giác ABC tù: không mất tính tổng quát giả sử $A>\frac{\pi}{2}\Rightarrow B<\frac{\pi}{2},C<\frac{\pi}{2}$ suy ra $\cos A<0,\cos B>0,\cos C>0$

$\cos A\cos B\cos C<0$. Mà $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}>0$ do đó bất đẳng thức luôn đúng.

+ TH2: Nếu tam giác ABC nhọn: $\cos A\cos B=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$.

Vì $\cos(A+B)=-\cos C$ và $\cos(A-B)\le 1$

nên $\cos A\cos B\le\frac{1}{2}(1-\cos C)=\sin^2\frac{C}{2}$.

Chứng minh tương tự ta có $\cos B\cos C\le\sin^2\frac{A}{2}$, $\cos C\cos A\le\sin^2\frac{B}{2}$.

Do các vế đều không âm nên nhân vế với vế các bất đẳng thức trên ta được

$(\cos A\cos B)(\cos B\cos C)(\cos C\cos A)\le\sin^2\frac{C}{2}\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}$

$\Leftrightarrow\cos A\cos B\cos C\le\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$. ĐPCM.

c) Ta có $\tan A+\tan B=\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}=\frac{2\sin(A+B)}{\cos(A+B)+\cos(A-B)}$

Mà $\sin(A+B)=\sin C,\cos(A+B)=-\cos C$ nên

$\tan A+\tan B=\frac{2\sin C}{-\cos C+\cos(A-B)}\ge\frac{2\sin C}{1-\cos C}=\frac{4\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}{2\sin^2\frac{C}{2}}=2\cot\frac{C}{2}$

Tương tự ta có $\tan B+\tan C\ge 2\cot\frac{A}{2}$, $\tan C+\tan A\ge 2\cot\frac{B}{2}$

Công vế với vế và rút gọn ta được

$\tan A+\tan B+\tan C\ge\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}$. ĐPCM.

Nhận xét:

+ Để chứng minh $x+y+z\ge a+b+c$ ta có thể đi chứng minh $x+y\ge 2a$ (hoặc 2b, 2c) rồi xây dựng bất đẳng thức tương tự. Cộng vế với vế suy ra đpcm.
+ Để chứng minh $xyz\ge abc$ với x,y,z,a,b,c không âm ta đi chứng minh $xy\ge a^2$ (hoặc b^2,c^2) rồi xây dựng bất đẳng thức tương tự nhân vế với vế suy ra đpcm.

Ví dụ 4: Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có:

a) $\sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}+\sqrt{\sin C}\le 3\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

b) $\left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right).\left(1+\frac{1}{\sin C}\right)\ge\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$

Lời giải

a) Áp dụng bất đẳng thức $x+y\le\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}$ với mọi x,y không âm ta có

$\sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}\le\sqrt{2(\sin A+\sin B)}=\sqrt{2.2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}\le 2\sqrt{\sin\frac{A+B}{2}}$

Tương tự ta có $\sqrt{\sin C}+\sqrt{\sin\frac{\pi}{3}}\le 2\sqrt{\sin\frac{1}{2}\left(C+\frac{\pi}{3}\right)}$

Công vế với vế ta được

$\sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}+\sqrt{\sin C}+\sqrt{\sin\frac{\pi}{3}}\le 2\left(\sqrt{\sin\frac{A+B}{2}}+\sqrt{\sin\frac{1}{2}\left(C+\frac{\pi}{3}\right)}\right)$

Mà $\sqrt{\sin\frac{A+B}{2}}+\sqrt{\sin\frac{1}{2}\left(C+\frac{\pi}{3}\right)}\le 2\sqrt{\sin\left[\frac{A+B}{2}+\frac{1}{2}\left(C+\frac{\pi}{3}\right)\right]}$

$=2\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)}=2\sqrt{\sin\frac{\pi}{3}}$

Suy ra $\sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}+\sqrt{\sin C}+\sqrt{\sin\frac{\pi}{3}}\le 4\sqrt{\sin\frac{\pi}{3}}$

Hay $\sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}+\sqrt{\sin C}\le 3\sqrt{\sin\frac{\pi}{3}}=3\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$. ĐPCM.

b) Ta có $\left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right)=1+\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin A\sin B}$.

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$ với mọi x,y dương ta có

$$\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}\ge\frac{4}{\sin A+\sin B}=\frac{4}{2\sqrt{\sin A\sin B}}=\frac{2}{\sqrt{\sin A\sin B}}$$

Do đó

$$\left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right)\ge 1+\frac{2}{\sqrt{\sin A\sin B}}+\frac{1}{\sin A\sin B}=\left(1+\frac{1}{\sqrt{\sin A\sin B}}\right)^2$$

Mặt khác

$$\sin A\sin B=-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-\cos(A-B)]=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$$

$$\ge\frac{\cos(A+B)+1}{2}=\sin^2\frac{A+B}{2}$$

Nên $\left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right)\ge\left(1+\frac{1}{\sin\frac{A+B}{2}}\right)^2$ (1)

Tương tự ta có $\left(1+\frac{1}{\sin C}\right).\left(1+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}\right)\ge\left(1+\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\left(C+\frac{\pi}{3}\right)}\right)^2$ (2)

Nhân vế với vế của (1) và (2) ta được

$$\left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right).\left(1+\frac{1}{\sin C}\right).\left(1+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}\right)\ge\left(1+\frac{1}{\sin\frac{A+B}{2}}\right)^2\left(1+\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\left(C+\frac{\pi}{3}\right)}\right)^2$$

Ta lại có

$$\left(1+\frac{1}{\sin\frac{A+B}{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\left(C+\frac{\pi}{3}\right)}\right)\ge\left(1+\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\left[\frac{A+B}{2}+\frac{1}{2}\left(C+\frac{\pi}{3}\right)\right]}\right)^2=\left(1+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}\right)^2$$

Suy ra $\left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right).\left(1+\frac{1}{\sin C}\right).\left(1+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}\right)\ge\left(1+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}\right)^4$

Hay $\left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right).\left(1+\frac{1}{\sin C}\right)\ge\left(1+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}}\right)^3=\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$. ĐPCM.

Nhận xét: Cho tam giác ABC và hàm số f

- Để chứng minh $f(A)+f(B)+f(C)\ge 3f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Ta đi chứng minh $f(A)+f(B)\ge 2f\left(\frac{A+B}{2}\right)$

Khi đó $f(C)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)\ge 2f\left(\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\right)$ từ đó suy ra

$$f(A)+f(B)+f(C)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)\ge 2\left[f\left(\frac{A+B}{2}\right)+f\left(\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\right)\right]\ge 4f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Do đó $f(A)+f(B)+f(C)\ge 3f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

- Để chứng minh $f(A)f(B)f(C)\ge f^3\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Ta đi chứng minh $f(A)f(B)\ge f^2\left(\frac{A+B}{2}\right)$

Khi đó $f(C)f\left(\frac{\pi}{3}\right)\ge f^2\left(\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\right)$ từ đó suy ra

$$f(A)f(B)f(C)f\left(\frac{\pi}{3}\right)\ge f^2\left(\frac{A+B}{2}\right)f^2\left(\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\right)\ge f^4\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Do đó $f(A)f(B)f(C)\ge f^3\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

2. BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 6.41: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Hướng dẫn giải

Khai triển $\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)$.

Chú ý: Từ $\cos\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=\sin\frac{A}{2} \Rightarrow \cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}=\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$

$\Rightarrow \sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2}.\cos\frac{C}{2}=\sin^2\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2}.\sin\frac{C}{2}$

Bài 6.42: Cho tam giác ABC . Chứng minh: $\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\ge 1$

Hướng dẫn giải

Sử dụng $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$

và $\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2}=1$

Bài 6.43: Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có

$$1+\cos A\cos B\cos C\ge\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C$$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có:

$$(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)(\sin A+\sin B+\sin C)$$
$$\ge 3\sqrt[3]{\sin^2 A\sin^2 B\sin^2 C}.3\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C}$$

hay $(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)(\sin A+\sin B+\sin C)\ge 9\sin A\sin B\sin C$

Mặt khác: $\sin A+\sin B+\sin C\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$ nên

$$(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)\frac{3\sqrt{3}}{2}\ge 9\sin A\sin B\sin C$$

Mà theo ví dụ 1 thì $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2(1+\cos A\cos B\cos C)$

$$2(1+\cos A\cos B\cos C)\frac{3\sqrt{3}}{2}\ge 9\sin A\sin B\sin C$$

Do đó $1+\cos A\cos B\cos C\ge\sqrt{3}\sin A\sin B\sin C$. ĐPCM

Cách 2: Theo ví dụ 1 ta có $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$ và

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=3-2\left(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\right)$$
$$=3-4(1+\cos A\cos B\cos C)=-1-4\cos A\cos B\cos C$$

Do đó bất đẳng thức tương đương với

$$4-1-(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)\ge\sqrt{3}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$$

$$\Leftrightarrow(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2A+\frac{1}{2}\cos 2A)+(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2B+\frac{1}{2}\cos 2B)+(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2C+\cos 2C)\le\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow\cos(2A-\frac{\pi}{3})+\cos(2B-\frac{\pi}{3})+\cos(2C-\frac{\pi}{3})\le\frac{3}{2}\quad(*)$$

Ta có $\left(2A-\frac{\pi}{3}\right)+\left(2B-\frac{\pi}{3}\right)+\left(2C-\frac{\pi}{3}\right)=2(A+B+C)-\pi=\pi$ nên

$\left(2A-\frac{\pi}{3}\right),\left(2B-\frac{\pi}{3}\right),\left(2C-\frac{\pi}{3}\right)$ là ba góc của một tam giác do đó bất đẳng thức (*) đúng theo ví dụ 3

$\Rightarrow$ ĐPCM

Cách 3: Bất đẳng thức (*) tương đương với

$$1+\frac{1-(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C)}{2}-\sqrt{3}.\sqrt{(1-\cos^2 A)(1-\cos^2 B)(1-\cos^2 C)}\ge 0\quad(**)$$

Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có:

$$VT(**)\ge\frac{3-(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C)}{2}-\sqrt{3}.\sqrt{\left(\frac{3-(\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C)}{3}\right)^3}$$

Đặt $t=\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C$ dễ thấy $3\ge t\ge\frac{3}{4}$

$$VT(**)\ge\frac{3-t}{2}-\sqrt{3}.\sqrt{\left(\frac{3-t}{3}\right)^3}=(3-t)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\sqrt{3-t}\right)\ge 0$$ vì từ điều kiện $3\ge t\ge\frac{3}{4}$

Ta có $3-t\ge 0,\ \frac{1}{2}-\frac{1}{3}\sqrt{3-t}\ge\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\sqrt{3-\frac{3}{4}}=0\Rightarrow$ ĐPCM

Cách 4: Đặt $x=\tan\frac{A}{2},\ y=\tan\frac{B}{2},\ z=\tan\frac{C}{2}$

Bài toán trở thành : cho $\begin{cases}xy+yz+zx=1\\x,y,z>0\end{cases}$ chứng minh:

$$1+\frac{1-x^2}{1+x^2}.\frac{1-y^2}{1+y^2}.\frac{1-z^2}{1+z^2}\ge\sqrt{3}\frac{2x}{1+x^2}.\frac{2y}{1+y^2}.\frac{2z}{1+z^2}\quad(***)$$

Ta có : $(4)\Leftrightarrow(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)+(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)\ge 8\sqrt{3}xyz$

Khai triển rút gọn ta có:

$(***)\Leftrightarrow x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+1\ge 4\sqrt{3}xyz$

Áp dụng bất đẳng thức bunhiacopxki và côsi ta có

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\ge\frac{1}{3}(xy+yz+zx)^2=\frac{1}{3}$$

$$xyz=\sqrt{xy.yz.zx}\le\sqrt{\left(\frac{xy+yz+zx}{3}\right)^3}=\sqrt{\frac{1}{27}}$$

Nên $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+1\ge 1+\frac{1}{3}=4\sqrt{3}.\sqrt{\frac{1}{27}}\ge 4\sqrt{3}xyz\Rightarrow$ ĐPCM

Bài 6.44: Cho ΔABC. Chứng minh rằng

$$2\sin A+3\sin B+4\sin C\le 5\cos\frac{A}{2}+3\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}.$$

Hướng dẫn giải

Ta có $\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\le 2\cos\frac{C}{2}$

Tương tự $\frac{5}{2}(\sin B+\sin C)\le 5\cos\frac{A}{2}$, $\frac{3}{2}(\sin C+\sin A)\le 3\cos\frac{B}{2}$

Cộng vế với vế ta được $2\sin A+3\sin B+4\sin C\le 5\cos\frac{A}{2}+3\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}$

Bài 6.45: Cho ΔABC. Chứng minh rằng

$$x^2-2(\cos B+\cos C)x+2-2\cos A\ge 0\ \ \forall x.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Hướng dẫn giải

Ta thấy VT của BĐT là một tam thức bậc hai có hệ số $a=1>0$. Do đó để chứng minh ta chỉ cần chứng minh: $\Delta\le 0$. Ta có:

$$\Delta'=(\cos B+\cos C)^2-2(1-\cos A)=4\cos^2\frac{B+C}{2}.\cos^2\frac{B-C}{2}-4\sin^2\frac{A}{2}$$

$$=4\sin^2\frac{A}{2}\left(\cos^2\frac{B-C}{2}-1\right)=-4\sin^2\frac{A}{2}.\sin^2\frac{B-C}{2}\le 0.$$

Đẳng thức có $\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\frac{B-C}{2}=0\\ x=\cos B+\cos C\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=C\\ x=2\cos B\end{cases}$.

Bài 6.46: Cho ΔABC nhọn. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$(\tan B+\tan C)x^2-4x+2\tan\frac{A}{2}\ge 0\ \ \forall x$. Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Hướng dẫn giải

VT của bất đẳng thức là một tam thức có:

$$a=\tan B+\tan C=\frac{\sin(B+C)}{\cos B.\cos C}$$

$$=\frac{2\sin A}{\cos(B+C)+\cos(B-C)}\ge\frac{2\sin A}{1-\cos A}=2\cot\frac{A}{2}>0\ \text{(do }\Delta ABC\text{ nhọn).}$$

Nên để chứng minh (1) ta chỉ cần chứng minh $\Delta'\le 0$.

Ta có: $\Delta'=4-2\tan\frac{A}{2}(\tan B+\tan C)\le 4-2\tan\frac{A}{2}.\cot\frac{A}{2}=0$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\cos(B-C)=1\\ x=\frac{2}{\tan B+\tan C}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B=C\\ x=\frac{1}{\tan B}\end{cases}$

ÔN TẬP CHƯƠNG VI

Bài 6.47: Cho $\sin\alpha=-\frac{3}{5}\ \ \left(\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}\right)$.

Tính $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$

$$\Rightarrow\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow\sqrt{\cos^2\alpha}=\frac{4}{5}\Rightarrow|\cos\alpha|=\frac{4}{5}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\alpha=\frac{4}{5}\\ \cos\alpha=-\frac{4}{5}\end{array}\right.$$

Vì $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ nên $\cos\alpha<0$.

Do đó $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$; $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}$, $\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{4}{3}$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha.\cos\alpha=2\left(-\frac{3}{5}\right).\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\left(-\frac{4}{5}\right)^2-\left(-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{7}{25}$$

Bài 6.48: Không sử dụng máy tính hãy tính

a) $\tan 75^0$ b) $\tan 15^0$

c) $A=\sin^2\frac{\pi}{9}+\sin^2\frac{\pi}{18}+\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{\pi}{18}$ d) $B=\frac{\left(4\cos^2 9^0-3\right)\left(4\cos^2 27^0-3\right)}{\tan 9^0}$

Hướng dẫn giải

a) $\tan 75^0=\tan\left(30^0+45^0\right)=\frac{\tan 30^0+\tan 45^0}{1-\tan 30^0.\tan 45^0}$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+1}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}.1}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{(\sqrt{3}-1)\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{4+2\sqrt{3}}{3-1}=2+\sqrt{3}$$

b) $\tan 15^0=\tan\left(45^0-30^0\right)=\frac{\tan 45^0-\tan 30^0}{1+\tan 45^0.\tan 30^0}$

$$=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1.\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{4-2\sqrt{3}}{3-1}=2-\sqrt{3}.$$

c) $A=\dfrac{1-\cos\dfrac{2\pi}{9}}{2}+\dfrac{1-\cos\dfrac{\pi}{9}}{2}-\sqrt{3}.\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}-\cos\dfrac{\pi}{18}\right)$

$=1-\dfrac{\cos\dfrac{2\pi}{9}+\cos\dfrac{\pi}{9}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\dfrac{\pi}{18}$

$=\dfrac{1}{4}-\cos\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\dfrac{\pi}{18}=\dfrac{1}{4}$

d) Áp dụng công thức $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$ ta có

$\left(4\cos^2 9^0-3\right)\left(4\cos^2 27^0-3\right)=\dfrac{\left(4\cos^3 9^0-3\cos 9^0\right)\left(4\cos^3 27^0-3\cos 27^0\right)}{\cos 9^0\cos 27^0}$

$=\dfrac{\cos 27^0\cos 81^0}{\cos 9^0\cos 27^0}=\tan 9^0\Rightarrow B=1$

Bài 6.49: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A=\sin^2 1^0+\sin^2 2^0+...+\sin^2 89^0+\sin^2 90^0$

b) $B=\sin^2 45^0-2\sin^2 50^0+3\cos^2 45^0-2\sin^2 40^0+4\tan 55^0.\tan 35^0$

Hướng dẫn giải

a) $A=\left(\sin^2 1^0+\sin^2 89^0\right)+\left(\sin^2 2^0+\sin^2 88^0\right)+...$

$+\left(\sin^2 44^0+\sin^2 46^0\right)+\sin^2 45^0+\sin^2 90^0$

$=\left(\sin^2 1^0+\cos^2 1^0\right)+\left(\sin^2 2^0+\cos^2 2^0\right)+...+\left(\sin^2 44^0+\cos^2 44^0\right)+\dfrac{1}{2}+1$

$=\underbrace{1+1+...+1}_{44\text{ số}}+\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{91}{2}$

b) $B=\sin^2 45^0+3\cos^2 45^0-2\left(\sin^2 50^0+\sin^2 40^0\right)+4\tan 55^0.\cot 55^0$

Suy ra $B=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+3\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-2\left(\sin^2 50^0+\cos^2 40^0\right)+4=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}-2+4=4$

Bài 6.50: Rút gọn biểu thức sau:

$A=\cos^6(5\pi-x)+\sin^6(5\pi+x)-2\sin^4(12\pi+x)-\sin^4\left(\dfrac{15}{2}\pi+x\right)+3\cos^2\left(\dfrac{15}{2}\pi-x\right)$.

Hướng dẫn giải

$A=\cos^6 x+\sin^6 x-2\sin^4 x-\cos^4 x+3\sin^2 x$

$=\left(1-\sin^2 x\right)^3+\sin^6 x-2\sin^2 x-\left(1-\sin^2 x\right)^2+3\sin^2 x$

$=1-3\sin^2 x+3\sin^4 x-\sin^6 x+\sin^6 x-2\sin^2 x-1+2\sin^2 x-\sin^4 x+3\sin^2 x$

$=2\sin^4 x$

Bài 6.51: Chứng minh các đẳng thức sau

a) $\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{1}{\tan^2 x}+\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\cot^2 x}\right)\dfrac{1}{1-\sin^2 x\cos^2 x}=\dfrac{2}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

b) $\dfrac{1}{\sin x+\sqrt{\cot^2 x-\cos^2 x}}=\sin x(0<x<\pi)$

c) $\left(\dfrac{\tan x+\cos x}{1+\cot x\cos x}\right)^n=\dfrac{\tan^n x+\cos^n x}{1+\cot^n x\cos^n x}(n\in Z^+)$

Hướng dẫn giải

a) $VT=\left(\dfrac{1+\cos^2 x}{\sin^2 x}+\dfrac{1+\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)\dfrac{1}{1-\sin^2 x\cos^2 x}=\dfrac{1+\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x}.\dfrac{1}{1-\sin^2 x\cos^2 x}$

$=\dfrac{1+1-2\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}.\dfrac{1}{1-\sin^2 x\cos^2 x}=\dfrac{2}{\sin^2 x\cos^2 x}=VP$

b) $\dfrac{1}{\sin x+\sqrt{\cot^2 x-\cos^2 x}}=\sin x(0<x<\pi)$

$VT=\dfrac{1}{\sin x+\sqrt{\cos^2 x\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-1\right)}}=\dfrac{1}{\sin x+\sqrt{\cos^2 x\cot^2 x}}=\dfrac{1}{\sin x+\cos^2 x\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2 x}}}$

Vì $0<x<\pi\Rightarrow\sin x>0$ nên $VT=\dfrac{\sin x}{\sin^2 x+\cos^2 x}=\sin x=VP$

c) $VT=\left(\dfrac{\dfrac{\sin x}{\cos x}+\cos x}{1+\dfrac{\cos x}{\sin x}\cos x}\right)^n=\left(\dfrac{\sin^2 x+\sin x\cos^2 x}{\sin x\cos x+\cos^3 x}\right)^n=\tan^n x\left(\dfrac{\sin x+\cos^2 x}{\sin x+\cos^2 x}\right)^n=\tan^n x$

$VP=\dfrac{\tan^n x+\cos^n x}{1+\dfrac{1}{\tan^n x}\cos^n x}=\tan^n x.\dfrac{\tan^n x+\cos^n x}{\tan^n x+\cos^n x}=\tan^n x$

Vậy VT = VP . ĐPCM

Bài 6.52: Chứng minh đẳng thức:

a) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ b) $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

Hướng dẫn giải

a) $VP=\sqrt{2}\left(\sin x\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos x\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)$

$=\sin x+\cos x=VT$

b) $VP=\sqrt{2}\left(\sin x\cos\dfrac{\pi}{4}-\cos x\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)$

$=\sin x-\cos x=VT$

Bài 6.53: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào α.

a) $\sin^2\alpha\tan^2\alpha+2\sin^2\alpha-\tan^2\alpha+3\cos^2\alpha+\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$

b) $\tan\alpha.\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right).\tan\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+\tan\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right).\tan\alpha$

Hướng dẫn giải

a) Ta biến đổi biểu thức thành

$\tan^2\alpha\left(\sin^2\alpha-1\right)+2\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)+\cos^2\alpha+\left(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\right)\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)$

$=-\tan^2\alpha.\cos^2\alpha+2+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=2$

b) Ta có $\tan\frac{\pi}{3}=\tan\left[\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-x\right]=\frac{\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\tan x}{1+\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\tan x}$

$\Rightarrow\sqrt{3}\left[1+\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\tan x\right]=\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\tan x$ (1)

Tương tự ta có $\sqrt{3}\left[1+\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]=\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)-\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ (2)

$\tan\frac{2\pi}{3}=\tan\left[\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)-x\right]=\frac{\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)-\tan x}{1+\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\tan x}$

$\Rightarrow\sqrt{3}\left[1+\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)\tan x\right]=-\left[\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)-\tan x\right]$ (3)

Cộng vế với vế ta được

$\sqrt{3}\left[3+\tan x.\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right).\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\tan\left(x+\frac{2\pi}{3}\right).\tan x\right]=0$

$\Rightarrow D=-3$

Bài 6.54: Chứng minh rằng:

a) $\tan^2 x.\tan 2x=\tan 2x-2\tan x$.

b) $\tan^2\frac{a}{2}.\tan a+2\tan^2\frac{a}{2^2}.\tan\frac{a}{2}+\ldots+2^{n-1}\tan^2\frac{a}{2^n}.\tan\frac{a}{2^{n-1}}=\tan a-2^n\tan\frac{a}{2^n}$

Hướng dẫn giải

a) $VP=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}-2\frac{\sin x}{\cos x}=2\sin x\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}-\frac{1}{\cos x}\right)=2\sin x.\frac{\cos^2 x-\cos 2x}{\cos x\cos 2x}$

$=2\tan x.\frac{\cos^2 x-\left(2\cos^2 x-1\right)}{\cos 2x}=2\tan x.\tan 2x\frac{\sin^2 x}{\sin 2x}=\tan^2 x.\tan 2x=VT$

b) Áp dụng câu a) ta có

$VT=\tan a-2\tan\frac{a}{2}+2\left(\tan\frac{a}{2}-2\tan\frac{a}{2^2}\right)+2^2\left(\tan\frac{a}{2^2}-2\tan\frac{a}{2^3}\right)+$

$\ldots+2^{n-1}\left(\tan\frac{a}{2^{n-1}}-2\tan\frac{a}{2^{n-1}}\right)$

$=\tan a-2^n\tan\frac{a}{2^n}=VP$

Bài 6.55: Chứng minh rằng

a) $\frac{1}{4.\cos^2\frac{x}{2}}-\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{-1}{4.\sin^2\frac{x}{2}}$

b) $\frac{1}{4.\cos^2\frac{a}{2}}+\frac{1}{4^2.\cos^2\frac{a}{2^2}}+\ldots+\frac{1}{4^n.\cos^2\frac{a}{2^n}}=\frac{1}{\sin^2 a}-\frac{1}{4^n.\sin^2\frac{a}{2^n}}$

Hướng dẫn giải

a) $VT=\frac{1}{4.\cos^2\frac{x}{2}}-\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{4.\cos^2\frac{x}{2}}\left(1-\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}\right)$

$=\frac{1}{4.\cos^2\frac{x}{2}}.\frac{-\cos^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{-1}{4.\sin^2\frac{x}{2}}=VP$

b) Theo câu a) ta có $\frac{1}{4.\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{4.\sin^2\frac{x}{2}}$ suy ra

$VT=\left(\frac{1}{\sin^2 a}-\frac{1}{4.\sin^2\frac{a}{2}}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{a}{2}}-\frac{1}{4.\sin^2\frac{a}{2^2}}\right)+$

$\ldots+\frac{1}{4^{n-1}}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{a}{2^{n-1}}}-\frac{1}{4.\sin^2\frac{a}{2^n}}\right)=\frac{1}{\sin^2 a}-\frac{1}{4^n.\sin^2\frac{a}{2^n}}$

Bài 6.56: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$\sin^3 A\cos(B-C)+\sin^3 B\cos(C-A)+\sin^3 C\cos(A-B)=3\sin A\sin B\sin C$

Hướng dẫn giải

$VT=\sin^2 A\sin(B+C)\cos(B-C)+\sin^2 B\sin(A+C)\cos(C-A)$

$+\sin^2 C\sin(A+B)\cos(A-B)$

$$=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{l}\sin^2 A(\sin B\cos B+\sin C\cos C)+\sin^2 A(\sin B\cos B+\sin C\cos C)\\ +\sin^2 A(\sin B\cos B+\sin C\cos C)\end{array}\right]$$

$$=\sin A\sin B\sin(A+B)+\sin B\sin C\sin(B+C)+\sin C\sin A\sin(C+A)$$

$$=3\sin A\sin B\sin C=VT$$

Bài 6.57: Gọi A, B, C là ba góc của tam giác ABC. Chứng minh rằng để tam giác ABC đều thì điều kiện cần và đủ là:

$$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}-2=\frac{1}{4}\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}$$

Hướng dẫn giải

$$ĐT\Leftrightarrow 2(3+\cos A+\cos B+\cos C)-8=\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(\cos A+\cos B+\cos C-1)=\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}$$

$$\Leftrightarrow 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}$$

$$\Leftrightarrow 8\sin A.\sin B.\sin C=(\sin A+\sin B)(\sin B+\sin C)(\sin C+\sin A)$$

$\Leftrightarrow \sin A=\sin B=\sin C$ (dùng BĐT Cô–si cho vế phải)$\Leftrightarrow A=B=C$.

Bài 6.58: Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh là $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. Tính diện tích tam giác ABC, biết rằng: $b\sin C(b.\cos C+c.\cos B)=20$.

Hướng dẫn giải

$ĐT\Leftrightarrow 4R^2\sin B\sin C(\sin B\cos C+\sin C\cos B)=20$ (dùng định lí hàm số sin)

$\Leftrightarrow 4R^2\sin A\sin B\sin C=20$

Mà $S=\frac{abc}{4R}=\frac{8R^3}{4R}\sin A\sin B\sin C=2R^2\sin A\sin B\sin C=10.$

Vậy $S=10$ (đvdt).

Bài 6.59: Cho $\cos x+\cos y+\cos z=0$ và $\cos 3x+\cos 3y+\cos 3z=0$.

Chứng minh rằng: $\cos 2x\cos 2y\cos 2z\le 0$.

Hướng dẫn giải

$$0=\cos 3x+\cos 3y+\cos 3z=4\left(\cos^3 x+\cos^3 y+\cos^3 z\right)-3(\cos x+\cos y+\cos z)$$

$$\Rightarrow \cos^3 x+\cos^3 y+\cos^3 z=0$$

Ta có $\cos x+\cos y+\cos z=0\Rightarrow\cos^3 x+\cos^3 y+3\cos x\cos y(\cos x+\cos y)=-\cos^3 z$

$\Rightarrow \cos x\cos y\cos z=0$.

Không mất tính tổng quát giả sử $\cos x=0\Rightarrow\cos y+\cos z=0\Rightarrow\cos y=-\cos z$

Suy ra $\cos 2x\cos 2y\cos 2z=\left(2\cos^2 x-1\right)\left(2\cos^2 y-1\right)\left(2\cos^2 z-1\right)=-\left(2\cos^2 y-1\right)^2\le 0$

ĐPCM.

Bài 6.60: Cho $\cos x+\cos y+\cos z=0$, $\sin x+\sin y+\sin z=0$. Chứng minh rằng:

a) $\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z=\cos 2x+\cos 2y+\cos 2z=0$

b) $$\sin(x+y+z)=\frac{\sin 3x+\sin 3y+\sin 3z}{3}$$

và $$\cos(x+y+z)=\frac{\cos 3x+\cos 3y+\cos 3z}{3}$$

Hướng dẫn giải

a) Từ giả thiết ta có $\begin{cases}\sin x+\sin y=-\sin z\\ \cos x+\cos y=-\cos z\end{cases}\Rightarrow(\sin x+\sin y)^2+(\cos x+\cos y)^2=1$

$\Rightarrow 2+2(\sin x\sin y+\cos x\cos y)=1\Rightarrow\cos(x-y)=-\frac{1}{2}$ (1)

Tương tự ta có $\cos(y-z)=-\frac{1}{2},\cos(z-x)=-\frac{1}{2}$.

Ta có $(\cos x+\cos y+\cos z)(\sin x+\sin y+\sin z)=0$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}(\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z)+\sin(x+y)+\sin(y+z)+\sin(z+x)=0$ (2)

Mặt khác $\sin 2x+\sin 2y=2\sin(x+y)\cos(x-y)=-\sin(x+y)$ (do (1))

Tương tự $\sin 2y+\sin 2z=-\sin(y+z)$, $\sin 2z+\sin 2x=-\sin(z+x)$

Thay vào (2) ta suy ra được $\sin 2x+\sin 2y+\sin 2z=0$

Mặt khác ta có $(\sin x+\sin y+\sin z)^2-(\cos x+\cos y+\cos z)^2=0$

$\Leftrightarrow\cos 2x+\cos 2y+\cos 2z+2\left[\cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(z+x)\right]=0$

Kết hợp với $\cos 2x+\cos 2y=2\cos(x+y)\cos(x-y)=-\cos(x+y)$, tương tự $\cos 2y+\cos 2z=-\cos(y+z)$, $\cos 2z+\cos 2x=-\cos(z+x)$

nên $\cos 2x+\cos 2y+\cos 2z=0$

b) Ta có

$$\sin 3x+\sin 3y+\sin 3z=3(\sin x+\sin y+\sin z)-4\left(\sin^3 x+\sin^3 y+\sin^3 z\right)$$

$$\Rightarrow\sin 3x+\sin 3y+\sin 3z=-4\left(\sin^3 x+\sin^3 y+\sin^3 z\right)$$

Mặt khác $\sin x+\sin y+\sin z=0\Rightarrow\sin^3 x+\sin^3 y+\sin^3 z=3\sin x\sin y\sin z$

$\Rightarrow\sin 3x+\sin 3y+\sin 3z=-12\sin x\sin y\sin z$

Do đó ta cần chứng minh $\sin(x+y+z)=-4\sin x\sin y\sin z$

Ta có $\sin(x+y+z)=\sin x\cos(y+z)+\cos x\sin(y+z)$

$=\sin x(\cos y\cos z-\sin y\sin z)+\cos x(\sin y\cos z-\cos y\sin z)$

$=\sin x\cos y\cos z+\sin y\cos x\cos z+\sin z\cos x\cos y-\sin x\sin y\sin z$

Ta cần chứng minh

$$\sin x\cos y\cos z+\sin y\cos x\cos z+\sin z\cos x\cos y-\sin x\sin y\sin z$$
$$=-4\sin x\sin y\sin z$$

$$\Leftrightarrow \sin x\cos y\cos z+\sin y\cos x\cos z+\sin z\cos x\cos y+3\sin x\sin y\sin z=0$$

$$\Leftrightarrow \sin x(\cos y\cos z+\sin y\sin z)+\sin y(\cos x\cos z+\sin x\sin z)$$
$$+\sin z(\cos x\cos y+\sin x\sin y)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin x\cos(y-z)+\sin y\cos(z-x)+\sin z\cos(x-y)=0$$

Đẳng thức cuối đúng vì theo câu a) ta có

$\cos(x-y)=-\frac{1}{2}$, $\cos(y-z)=-\frac{1}{2}$, $\cos(z-x)=-\frac{1}{2}$ và giả thiết

$\sin x+\sin y+\sin z=0$.

Vậy $\sin(x+y+z)=\frac{\sin 3x+\sin 3y+\sin 3z}{3}$.

Đặt $\alpha=\frac{\pi}{2}-x,\beta=\frac{\pi}{2}-y,\gamma=\frac{\pi}{2}-z$ kết hợp với giả thiết ta có

$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$, $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$.

Do đó theo chứng minh trên thì $\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\sin 3\alpha+\sin 3\beta+\sin 3\gamma}{3}$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{3\pi}{2}-x-y-z\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)}{3}$$

$$\Rightarrow \cos(x+y+z)=\frac{\cos 3x+\cos 3y+\cos 3z}{3}$$

Mục lục

CHƯƠNG 1: MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP

§1.Mệnh đề và mệnh đề chứa biến 3
§2.Áp dụng mệnh đề vào suy luận toán học 14
§3.Tập hợp và các phép toán trên tập hợp 21
§4.Số gần đúng. Sai số 36
ÔN TẬP CHƯƠNG I 43

CHƯƠNG 2: HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ HÀM SỐ BẬC HAI

§1.Đại cương về hàm số 48
§2.Hàm số bậc nhất 65
§3.Hàm số bậc hai 82
ÔN TẬP CHƯƠNG II 98

CHƯƠNG 3: PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

§1. Đại cương về phương trình 101
§2. Phương trình bậc nhất và bậc hai một ẩn 108
§3. Một số phương trình quy về phương trình bậc nhất hoặc bậc hai 132
§4. Hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn 169
§5. Một số ví dụ về hệ phương trình bậc hai hai ẩn 180
ÔN TẬP CHƯƠNG III 217

CHƯƠNG 4: BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

§1. Bất đẳng thức 223
§2. Đại cương về bất phương trình 269
§3. Bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn 275
§4. Bất phương trình và hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn 283
§5. Dấu của nhị thức bậc nhất 297
§6. Dấu của tam thức bậc hai 308
§7. Bất phương trình bậc hai 317
§8. Phương trình và bất phương trình quy về bậc hai 334
ÔN TẬP CHƯƠNG IV 362

CHƯƠNG 5: THỐNG KÊ

§1. Những khái niệm mở đầu 370
§2. Trình bày một mẫu số liệu 370
§3. Các số đặc trưng cùaa mẫu số liệu 382
ÔN TẬP CHƯƠNG V 389

CHƯƠNG 6: CUNG VÀ GÓC LƯỢNG GIÁC, CÔNG THỨC LƯỢG GIÁC

§1: Góc và cung lượng giác 398
§ 2: Giá trị lượng giác của góc (cung) lượng giác 402
§3. Một số công thức lượng giác 418
ÔN TẬP CHƯƠNG VI 447